
Scanzia
XXIII
S.C
N.140




ÆRARIVM
PHILOSOPHIÆ
MATHEMATICÆ
IHS
F. Curtus Bonon Incid.

ÆRARII PHILOSOPHIÆ MATHEMATICÆ

TOMVS SECVNDVS,

IN QVO

Liber Sextus (ſecundus ex noſtrà Methodo) elementaris de planis applicatus, &c.

ET

Epinomis Exodiorum horariorum, Sandalium, Cythara, Microcoſmus, Arcus, Tympanum.

Indices viginti –

– Communes huic Secundo, ac Tertio Tomo vide in fine Tertij Tomi.







BONONIAE, Typis Io. Baptiſtæ Ferronij cum facultate Superiorum. Anno M.DC.XLVIII.

V. D. Andreas Cuttica Sacræ Pœnitentiariæ Rector, pro Eminentiſs. ac Reuerendiſs.Card.Ludouiſio Arch.Bonon.& Principe.

Imprimatur F.Io.Baptiſta Spadius Magiſter,pro Reuerendiſs. P. Inquiſit. Bonon.

Ego Cæſar à Boſco in Prouinciâ Venetâ Præpoſitus Prouincialis, poteſtate ad id mihi factâ ab Adm. Reuer. Patre Vicario Noſtro Generali Carolo Sangrio, facultatem concedo,vt Opus,quod inſcribitur: *Ærarij Philoſophiæ Mathematicæ. &c. Tomus ſecundus*,à P.Mario Bettino Bononienſi è Societate Noſtra conſcriptum, & trium Doctorum Virorum Noſtræ Societatis iudicio approbatum Typis mandetur, ſi ita ijs, àd quos pertinet, videbitur.

In quorum fidem has literas manu noſtrâ ſubſcriptas,& ſigillo noſtro munitas dedimus. Bononiæ die 6 Iulij anni 1645.

Cæſar à Boſco.

Locus † Sigilli.

IN DOCTRINIS GLORIFICATE

DOMINVM.

Isaiæ cap. 24.

Apud Cornel. à lap. in eum locum: Optimè, & plenissimè S. Thomas, Lyranus, & Sanchez, monētur hic, inquiunt, viri apostolici vt glorificent Deum percurrendo orbem, docendoq; omnes gentes, etiam Indos in antris, & speluncis habitantes. &c. *Sept. Vatablus, & Pagnin. pro*: in doctrinis, *vertunt*: in vallibus. *alij*, in speluncis.

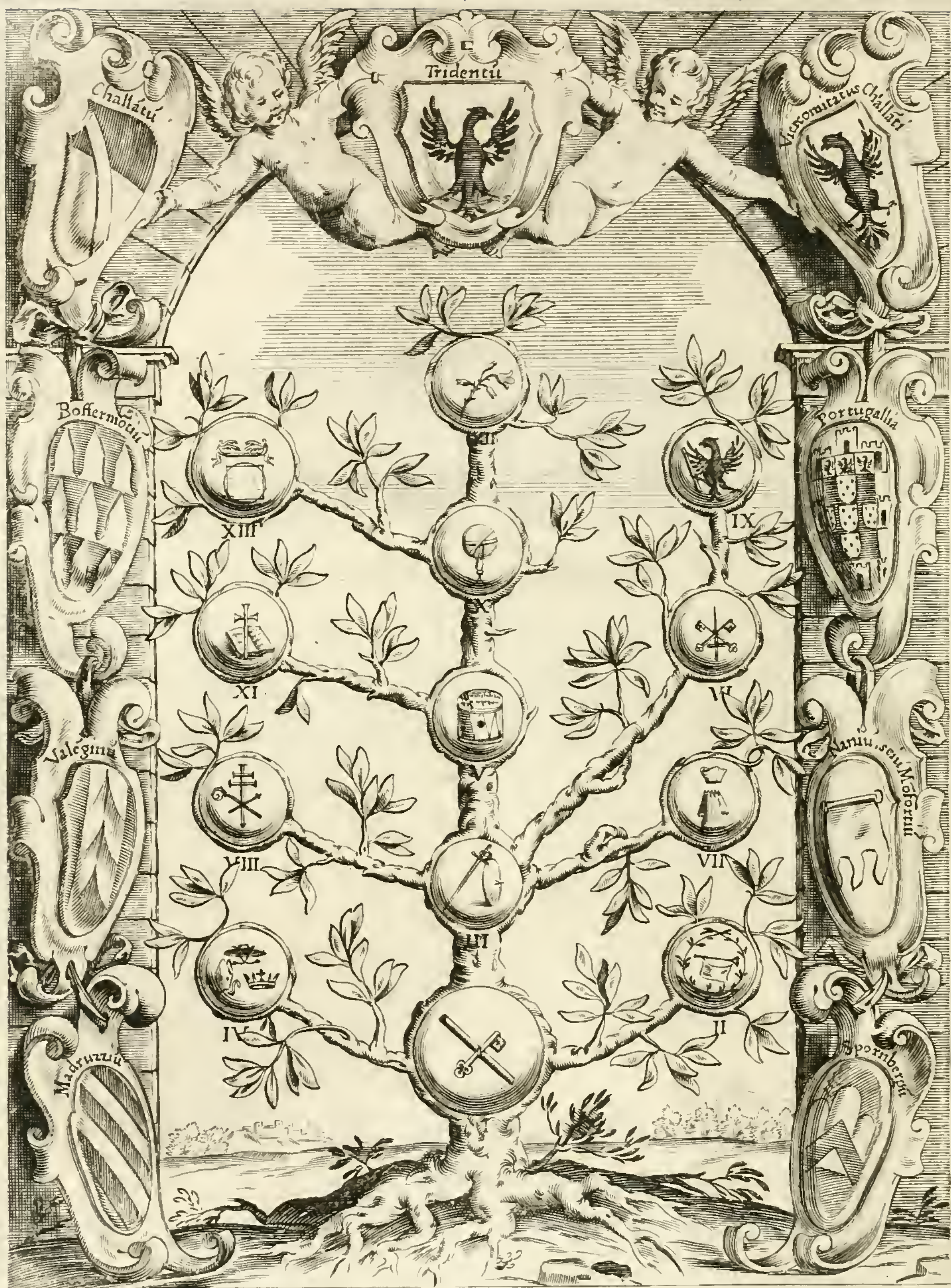
REGISTRVM.

a b c A B C D E F G H I K L M N O P Q R S T V X Y Z Aa Bb Cc Dd Ee F f Gg Hh Ii Kk Ll Mm Nn Oo Pp Q q Rr Ss Tt Vu Xx Yy Zz Aaa Bbb Ccc Ddd Eee Fff Ggg Hhh Iii Kkk Lll Mmm Nnn
✠ A B C D E F G
Omnes sunt duerniones, præter G quæ est ternio.

E R R O R E S

Grauioris momenti aut nullos, aut correctos habes, Amice Lector.





Tridentú
Challatú
Vicecomitatus Challati
Bossermotiu
Portugallia
Valegniu
Naniu, seu Mosfortiu
Madruzziu
Spornbergiu
XIII
IX
X
XI
VI
V
VIII
VII
IIII
IV
II

TOMI SECVNDI ÆRARII Philosophiæ Mathematicæ PARS PRIMA.

A Definitionibus ad Propositionem 16.

Elementorum Geometricorum Liber Secundus ex nostra methodo, sextus ex veteri.

DEFINITIONES.

I.

1 SImiles figuræ rectilineę sunt, quę singulos angulos æquales habent, & latera circa æquales angulos proportionalia. *Cuiusmodi sunt propos. 4. triangula ABC, DCE.*

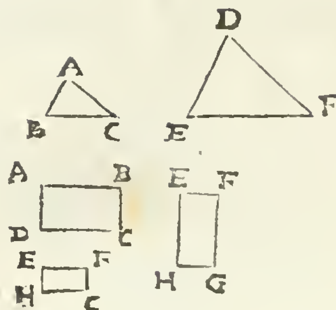
§. I.

SCHOLION I.

De figuris non solum similibus, sed etiam similiter descriptis.

FIguræ aliquæ dicuntur non solum similes, sed etiam similiter descriptæ super aliqua recta lineâ. Quemadmodum in hoc li. 6, propos 18. Quid sit figuras esse non solum similes, sed etiam similiter descriptas accipe à Clauio ad cit. prop. 18.

Quæ figuræ sint etiam similiter descriptæ.



Dicuntur autem rectilinea super lineas rectas descripta esse similia, & similiter posita, quando anguli æquales constituũtur super ipsas rectas lineas, & tam reliqui æquales anguli, quàm latera proportionalia sẽper ordine se se consequuntur. Vt triangula ABC, DEF non solum erunt similia, sed etiam super rectas BC, EF similiter descripta, si anguli B, C æquales fuerint angulis E, F; & ita sit AB ad BC, vt DE ad EF. &c. At supra rectas BC, DE non dicentur similiter esse descripta (quamquam similia sint) cùm anguli B, C non sint æquales angulis D, E. Similiter rectangula AC, EC similia, dicentur similiter esse descripta super rectas DC, HC, quoniam vt AD ad DC; ita est EH ad HC, &c. At vero rectangula AC, EG non dicentur similiter descripta super rectas DC, HG, quamuis sint similia, vt manifestum est. Eadem tamen similiter erunt descripta super rectas DC, EH, vel super rectas AD, HG.

SCHOLION II.

Haec definitio est, quatenus per eam indicatur quæ nam rectilineæ figuræ similes significentur, & quas habere debeant conditiones. Quatenus verò pertinet ad veritatem demonstratam, quod scilicet figuræ rectilineæ æquiangulæ sint etiam proportionalium laterum circa equales angulos, hoc est, sint similes, hoc modo fit propositio, quæ demonstratur in, & ex 4 prop. huius.

II.

Reciprocæ figuræ sunt, quando in vtraque figura antecedentes, & consequentes rationes sunt. *Vt propos. 14. sunt figuræ ADBF, BECG, in quibus antecedentes sunt DB, GB, consequentes BE, BF. & propos. 15. triangula ABC, ADE. in quibus antecedentes sunt CA, AE; consequentes AD, AB.*

§. 1.

§. I.

PRAXIS —

... Definitionis secundæ in æquiponderantijs philosophiæ Machinariæ.

VIde nos in *Ap. 4. Prog. 2, hypothesi 2, vbi docemus sequentia*: In philosophia Machinaria hypotesis est, quam fulcit etiam physica passim experientia, ex Aristotele Mechan. quæst. 3. vbi habet: Quod motum pondus ad mouens, longitudo patitur ad longitudinem & Archimedes post Ar. propos. 6, & 7 de æquiponderantibus: Magnitudines in grauitate commensurabiles æquiponderant, si permutatim suspendantur in distantijs secundum grauitatis rationem constitutis. Post hos Guidubaldus prop. 3 de vecte: Potentia sustinens pondus vecti appensum eandem ad ipsum pōdus proportionem habet, quam vectis distantia inter fulcimentum, ac ponderis suspensionem ad distantiam à fulcimento ad potentiam interiectā. Idest breuiter, ac geometricè loquēdo: Vt distantia ad distantiam, sic reciprocè pondus ad pondus, siue ad potentiam. Vt scilicet iuxta definitionem 2 huius sexti li. Euclidis, ex alterutra parte vectis ab hypomoclio diuisi quasi in gemina figura, sint antecedentes, & consequentes rationum termini Exempli causa in primà formà vectis, vt AC ad BC (distantia ad distantiam) sic B pondus ad A potentiam.



Vt distā-tia ad distantiam, sic pōdus ad pōdus, vel ad potentiam reciprocè &c.

SCHOLION I.

CIrca reliqua duo genera vectium exempla reciprocationis, & alia notanda vide in cit. Ap. Satis hæc hìc nunc ad Euclidem pro Tyronibus.

§.II.
VSVS, & applicatio

Defin. secundæ Eucl. pro theorica ſtateræ, ac libræ in commercijs, & iuſtitia commutatiua.

IN rerum aliquarum venalium commercijs tota iuſtitiæ commutatiuæ ratio videtur poſita eſſe in reciprocatione geometrica huius 2 defin. applicatà, & efficiente æquilibrium in ſtateris, & libris, quibus venalia aliqua è pondere ſpectantur. Vide nos in cit. Ap. 3. Prog. 2. prop. 3 & Lemm. & corollar. Nos conuerſam Archimedi hanc facimus: Quæ æquiponderant habent ſe reciprocè. *vide ibi apud nos explicationem.*

In iuſtitia commutatiua æquipōdia quomodo ſit vſus geometrica reciprocationis.

In venalibus ponderoſis, ac ponderandis quæritur vt petenti, atq; ementi detur quantitas determinata rei venalis, ac ponderoſæ. Ea vero quantitas exploratur, & inuenitur per æquiponderantiam, quæ fit per reciprocationem ponderum, & diſtantiarum inæqualium in ſtatera; in libra verò per reciprocationem diſtantiarum, & ponderū æqualium. Vide huius applicatæ reciprocationis theoricen, ac demōſtrationes vnà cum ſuis figuris in cit. prop. 3. vbi iucundum eſt noſſe, quì faciat ſatis, & geometricè debitum, ac ſuum cuiq; tribuat Iuſtitia, quæ lances pingitur ſuſtinere. &c. Interim habes hic indicatum quanti ponderet geometrica Euclidianæ definitionis reciprocatio.

§.III.
SCHOLION II.
De rectangulis æqualibus reciprocis.

IN corollarijs prop. 2. Prog. 10, Ap. 3 oſtendimus vſum geometricum huius 2. definitionis. Hic exemplum omittimus, quia ſupponūt ea corollaria 16 prop. huius lib. 6

In ſchol. verò 2 poſt cit. prop. 2 noſtram dum dicimus poſſe aliter à nobis demonſtrari propoſ. 14 huius lib. 6. Eucl. intellige eam demonſtrationem non eſſe apponendam niſi poſt 16. prop. Eucl.

Ex-

III

Extrema ac media ratione linea recta secari dicitur, quando est vt tota ad maiorem portionem, ita maior portio ad minorem. *Hæc sectio demonstrata est prop.* 11. *lib.* 2, *in qua linea AB in H extrema, ac media ratione secta est, estque vt recta AB ad maiorem portionem AH, ita maior ad minorem BH. Demonstrabitur etiam lib.6.prop.30.*

IV

Altitudo cuiusque rectilineæ figuræ est perpendicularis, quæ à vertice ad basim ducitur. *Vt propos. primâ triãgulorum AHB, ABD, ADL altitudo est perpendicularis AC.*

V

Proportio ex proportionibus componi dicitur, quãdo proportionum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam efficiunt proportionem. *Vt ex proportione dupla, & tripla componitur sextupla: nam denominator duplæ 2 ductus in denominatorem triplæ 3, facit 6. sunt autem ipsi denominatores quantitates proportionum.*

His appone, seu præpone definitiones ante librum 5, quas habes in 3 parte huius 2 Tomi.

§.I.

SCHOLION I.

Explicata, & asserta quinta definitio.

1 PAter Christophorus Griembergerus in suo Euclide ad hanc defin. sic: Ratio duarum magnitudinum dicitur composita ex tot rationibus, quot inter easdem continuantur. hoc est si (in appositis literis ABCD) inter A, C intercedat B, proportio *Proportio composita quæ nam.*

portio A ad C dicitur composita ex ratione A ad B, & B ad C, siue huiusmodi rationes sint eædem (vt requirit definitio 10 lib 5) siue non. Eademq; ratio A ad D componi dicitur ex rationibus A ad B, B ad C, & C ad D, propterea quod dictæ rationes inter terminos A, D, continuentur per interiectos terminos B, C;

Antiquissima hæc quinta definitio.

Definitiones geometricæ aliqua docent quid rei significetur.

2 *Aliquibus non admodum probatur hæc quinta definitio, & suppositia, nec legitima geometricorum horum elementorum, ac potius theorema demonstrandum, quàm definitio reputatur. Mihi verò qui eam improbant non probantur. Nec est pro Philosophia Geometrica, cui pro inconcussis fundamentis hæc elementa supponuntur, eorum fidem tam facilè eleuare, aut firmitudinem concutere. Patet ex ijs, quę Theon affert elucidandæ, & confirmandæ huic 5 definitioni, eam cęteris hisce geometricis elementis antiquitate parem esse, ac antiquis Geometricæ Philosophiæ Scriptoribus, & Doctoribus tot sæculis fuisse probatam. Nam quod demonstratione firmanda videatur, nihil id officit, quo minus etiã sit definitio. Nec insolẽs est in Geometricæ Philosophiæ his elementis inter definitiones collocari aliqua, quæ suis locis demonstranda sunt. Definitio enim tantùm aperit quid rei significetur, vt hìc quid intelligendũm sit pro ratione composita, scilicet eam, quæ proditur à denominatore producto ex denominatoribus intermediarum proportionum inter se multiplicatis. Quod vero eiusmodi cõposita proportio fiat ex multiplicatione denominatorum intermediorum rectè etiam demonstratione peculiari confirmatur.*

Veritas rei per definitionem significatæ demonstratur post definitionẽ.

Exempla prædictorum.

3 *Quemadmodum in definitione 11. lib 3.* similes circulorum portiones definiuntur eæ, quæ capiunt æquales angulos, aut in quibus anguli æquales consistunt. *At qui constet Tyroni eas circulorum portiones ex inclusione angulorum æqualium esse similes? Ideo breui etiam demonstratione, à nobis in 3 parte huius 2 tomi, cum ad eam ventum erit, demonstrabitur. Sed nimirum Geometræ Doctori defin. 11 satis fuit promere, ac definire quid intelligatur in Geometrica Philosophia per nominatas similes circulorum portiones, indicari nempe illas, in quibus anguli æquales. &c. Paria prædictis habes etiam à nobis indicata in schol. 2. ad definitionem 1 huius, de figuris rectilineis similibus.*

Paribus modis etiam ante lib. 5, modi illi geometricè inferendi à proportionibus permutatis, perturbatis, conuersis, compositis, diuisis, ordinatis, &c. ponuntur inter definitiones, quatenus in eius libri vestibulo exponitur quid rei significetur per verba modos illos argumẽtandi significantia. Tamen singulæ illæ geometricè inferendi formæ, vt constet eorum veritas, & firmitudo, peculiari geometrica demonstra-

stratione confirmantur in theorematibus li 5. Ac quemadmodum interpretibus Geometricis satis est inductione in numeris ostendere, & exponere vtcunq; earum definitionum veram enuntiationem ante theoremata earum confirmatoria; sic prudentes veteres Geometrici elementarij Philosophi sufficere arbitrati sunt in hac quinta definitione docere sub nominibus numerarias operationes indicantibus quid sit composita proportio

4 Ac prudenter eadem operà indicant modum conficiendi, atque agnoscendi compositam proportionem, simulq; ostendũt compositam proportionem confici, atque intelligi debere pro multiplicatione, & producto (non pro adregatione, vel compositione, vel summà ex additione) facto per multiplicationem intermediarum proportionum. &c. *Definitio 5 prudenter docet modũ cõficiẽdi, & cognoscẽdi cõpositam proportionẽ.*

Hic igitur etiam sub forma arithmeticà operationibus, & cognitionibus compositarum proportionum perutili indicatur, & explicatur id, quod deinde Euclides vsurpat in geometrico exemplo demonstrationis ad propos. 23 huius lib. 6. Ibi alia huc spectantia apud nos legito. Quare ob prædicta censemus hìc non discedendum a veterum Geometrarum sententia, qui hanc definitionem hìc asseruerunt, explicarunt, ac deinde etiam (vt dictum est in defin 11. lib. 3. & in alijs li. 5) demonstratione peculiari confirmarunt, sine detrimento definitionis &c.

§.II.

SCHOLION II.

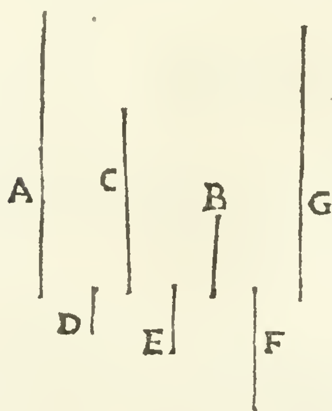
Demonstratio explicatoria, & confirmatoria Theorematis, siue Problematis, per defin. 5 huius lib. 6 significati.

QVoniam constat per definitionem significari compositam proportionem eam esse, quæ producitur ex multiplicatione denominatorum intermediarum proportionum, nunc demonstranda res ipsa est significata, idest productum ex ea multiplicatione denominatorum intermediarum proportionum esse denominatorem compositæ proportionis. Omitto demõstrationes alio-

rum

rum antiquorum Theonis ad hanc defin. ac Vitellionis lib. 1. prop. 13 Optic. ac etiam ipsius Eutocij, quam alibi habet lib. 2 Arch. de sph. & cylind. theor. 4, ac appono eius eam, quæ est ad proposit. 11. li. 1 Conic. Apollonij. Eam, inquam, bona fide vt apud suum Authorem iacet, apponendam hìc censeo, quia & breuior, & apertior ab eo est, quàm ab alijs, qui suo arbitratu eam permutarunt. Ante, ac post eam verba aliqua sunt Eutocij, quæ verbis huius defin. 5, lucem afferunt, & tuentur morem magnorum Geometrarum veterum vtentium arithmeticis probationibus etiam in Geometricis demonstrationibus. Cuius rei exemplum aliquod est etiam apud ingeniorum Phœnicem Archimedem. Igitur Eutocius primò explicat quid à definitione 5 significetur nomine quantitatum in proportionibus. Per quantitatem intellige numerum, a quo proportio ipsa denominatur. In multiplicibus quidem quantitas erit numerus integer, in reliquis verò habitudinibus necesse est quantitatem numerum esse, & partem, seu partes, nisi forte quispiam velit etiam ἀῤῥήτους, videlicet quæ exprimi non possunt, habitudines esse, quales sunt magnitudines irrationalium.

Addit deinde suppositionē, quæ apud nos erit loco lemmatis explicata post Eutocij demōstrationē. Suppositio est: In omnibus habitudinibus ipsa quantitas multiplicata in consequentē terminū producit antecedentem. *Mox demonstrationem sic instituit. Cuius figuræ nos tantùm numeros ad euidentiorem pro Tyronibus cognitionem addidimus.* Sit igitur proportio A ad B, & sumpto termino quolibet intermedio C, sit proportionis AC quātitas D, proportionis autem CB quantitas sit E: & D multiplicans E producat F. Dico F proportionis AB quantitatem esse: hoc est, si F multiplicet B, produci ipsum A. Itaque multiplicet F ipsum B, & producat G. Quoniam igitur D ipsum quidem E multiplicans, producit F, multiplicans autem C, ipsum A producit; erit F ad A, vt E ad C. Rursus cum B multiplicans E faciat C, & multiplicans F faciat G, erit vt E ad F, ita C ad G: & permutando vt E ad C, ita F ad G. Sed vt E ad C, ita erat F ad A, ergo G ipsi A est æqualis: & idcirco F multiplicans B producit A.



pro-

proportionis igitur AB, F quantitas necessario erit.

Addit excusationem apologeticā suæ demōstrationis, quæ possit etiā nos, aut alios tueri, si quid simile in nostris demōstraionibus aliquando reperiaur. Non perturbentur autē qui in hęc inciderint, quod illud ex Arithmeticis demonstretur: antiqui enim huiusmodi demonstrationibus sępe vti consueuerūt; quæ tamen Mathematicę potius sunt, quàm arithmeticæ, propter analogiā. Adde quod quæsitum arithmeticum est; nam proportiones, proportionum quantitates, & multiplicationes, primo numeris, secundo loco per numeros & magnitudinibus insunt, ex illius sentētia qui ita scripsit: ταῦτα γὰρ τὰ μαθήματα δοκοῦντι εἶμεν ἀδελφα, hoc est: *hæ enim mathematicæ disciplinæ germanæ esse videntur.*

Antiqui Philosophi Geometrici vsi sunt aliquando numeris etiam in geometricis demōstrationibus.

§. III.

LEMMA.

More veterum Geometrarum hoc lemma post demonstrationem adpono. Verum esse id assumptum de denominatore proportionis, qui multiplicatus in consequentem terminum proportionis producit antecedentem, patet, quia denominator proportionis indicat quoties terminus consequens proportionis sit in antecedente, multiplicatio autem est, vt docuimus de ea in Ap. nostro 11, proportionata additio, ac numerus alium multiplicans, & ea multiplicatione productum maioris numeri efficiens, indicat quoties numerus multiplicatus sibi additus conficiat maiorem alterum numerum; siue (quod idem est) indicat quoties numerus multiplicatus sit in producto; quod idem est ac indicare quam proporionem habeat multiplicandus ad multiplicatum, & productum; estque eius proportionis terminus minor alter, alter maior, quorum ille, iuxta prædicta, per denominatorem numerum (vt multiplicantem,) multiplicatus producit alterum maiorem.

In exemplo numerico: Quoniam 12 ad 3 habent proportionē quadruplam, ideo denominator 4 proportionis quadruplæ, indicans quoties 3 terminus consequens proportionis contineatur in 12, & multiplicans per se, idest per 4, idest quater addens sibi ipsis 3, producit 12 terminum antecedentem. Rectè igitur Eutocius vsus est hoc verissimo supposito.

§.IV.

SCHOLION III.

Adiumenta praxi facilitandæ circa inuentionem compositę proportionis aliter etiam à nobis definitæ.

Sine prolixioribus satis est nūc tyronibus vsus compositæ proportionis ex tribus, vel tribus proportionibus.

1 *NOn est quod Tyro turbetur, atq; absterreatur aliquorum abundantia circa proportionum compositiones, ac sciat pro Geometricæ philosophiæ theorematibus, vel problematibus satis esse vsum compositæ proportionis ex duabus, vel tribus intermedijs proportionibus, nec sibi nunc opus esse vlteriorem ingenij, atque intelligentiæ laborem protendere ad plures proportiones componendas. Nam Geometræ, vt videbis ad 23 prop. huius, vtuntur proportione composita laterum in parallelogrammis, quorum bina latera bis inter se comparata duas tantum afferunt proportiones, quæ deinde per tertiam inter extrema dicuntur componi.*

Quemadmodum duplicata proportio pro planis, triplicata pro solidis figuris vsui est Geometris Philosophis, vt videbis ad 20. prop. huius, nec vlterius in Geometricis vsibus fit extensio per quadruplicatam, & plures alias proportiones; sic & in composita proportione è duabus, vt plurimum proportionibus. Componere autem duas proportiones in numeris non est tantæ difficultatis, quantam præferunt qui componunt proportiones ex pluribus intermedijs.

Omnis duplicata, triplicata, &c. est etiā composita proportio, at non è contra.

2 *Ad cognitionem distinctiorem, & facilitatem sequentium hìc praxeon norit Tyro omnem duplicatam, triplicatam, & vlteriorem aliam proportionem esse etiam compositam, at non omnem compositam proportionem esse duplicatam, triplicatam &c. Duplicata, triplicata, &c. fit & ipsa ex multiplicatione denominatorum inter se, qui sunt in intermedijs proportionibus, ver. gr. in dupla proportione 2, 4, 8 proportio 2 ad 8, quæ est duplicata, fit ex multiplicatione eiusdem denominatoris 2 in se, qui est inter 2, 4, & inter, 4. 8. scilicet 2 in 2 ? producunt 4 denominatorem duplicatę inter 2, & 8. Sed differt hæc compositio (de qua in defin. 10. lib. 5) à propriè dicta compo-*

po-

posità proportione, quæ in hac 5 definitione huius lib 6 ponitur, quòd compositio duplicatæ, triplicatæ, &c. proportionum, est ex multiplicatione denominatoris (in exemplo allato) ipsius 2 bis, vel ter assumpti: at propria hic compositio est ex multiplicatione inter se denominatorum diuersi generis proportionum, & maioris, & minoris inæqualitatis, &c.

Differentia propriè dictæ compositæ proportionis a cõpositis ex duplicata, triplicata, &c:

3 Vt autem inueniatur denominator cõpositæ proportionis, sequenda sunt exempla & Euclidis geometricum, (quod videbis a nobis expositũ ad 23 huius) & proportionum duplicatæ, triplicatæ, &c. Nã vt in ijs ordinantur, & connectuntur per numeros proportiones, sic & in composita agendum. Vide exempla apud nos ad 23. Hìc saltem vnum esto: Proportiones sunto 15 ad 5, & 20 ad 10: cõtinuandæ sunt istæ duæ proportiones, & connectendæ in tribus numeris etiam minoribus, facilioris operationis gratiâ, velut in his: 12, 4, 2, vel 6, 2, 1, quorum primus ad secundum est vt 15 ad 5, & secundus ad tertium vt 20 ad 10. Ac denominatores 3 primæ proportionis, & 2 secundæ multiplicati inter se dant denominatorem 6 proportionis compositæ ex duobus intermedijs, habentq; extremi duo 12, 2, vel 6, 1 sextuplam proportionem.

Modus inueniẽdi denominatorem compositæ proportionis.

Cæterum duæ difficultates anxios habent Tyrones in hac praxĩ componendarum proportionum. Altera est circa inuentionem, & continuationem numerorum, ac minimorum, in ijsdem proportionibus, in quibus sunt dati numeri, quorum bini varias habent inter se proportiones, ex quibus proportio composita producenda est. Altera difficultas est dum denominatores intermediarum proportionum sunt numeri vel fracti, vel cum integris fracti, qui in multiplicationibus negotium facessunt Tyronibus. In multiplicibus enim proportionibus, vt monuit etiam Eutocius, denominatores sunt numeri integri: non sic in non multiplicibus

Vtriq; difficultati, quà licet, remedium affero ex praxi arithmeticâ, cuius rationem videbis ad 23 huius. Ac quod quidem attinet ad inuentionem, & continuationem proportionum diuersarum in numeris, etiam minimis, vide Euclidem lib. 8. propos. 4.

4 Quod autem attinet ad effugium, & continuationes datarum proportionum in alijs numeris, & fractionum in denominatoribus proportionum intermediarum, multiplica inter se datarum proportionum antecedentes terminos, item & inter se consequentes terminos multiplica; tum productorum maius partire per minus, & quotiẽs erit denominator proportionis compositæ ex proportionibus intermedijs. Sunto numeri 3, 2, 4, 3, quorum antecedentes proportionum sunt

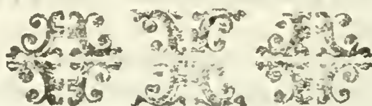
Remedia difficultatibus in praxibus pro 5 definitione.

3, & 4, consequentes 2, & 3. Duc 3 in 4, fiunt 12, & ex ductu 2 in 3. fiunt 6: productum maius 12 diuisum per perductum 6 dat quotientem 2 denominatorem proportionis duplæ compositæ ex proportionibus sesquialtera inter 3, & 2, & sesquitertia inter 4, & 3. Sunto 5, 1, 2, 4, quorum primus ad secundum habet quintuplam proportionem, tertius ad quartum subduplam. Ex multiplicatione antecedentium 5, 2 fiunt 10, ex consequentium 1, 4 multiplicatione fiunt 4: ex partitione producti maioris 10 per minus 4 fit quotiens 2½ denominator proportionis compositæ duplæ sesquialteræ ex quintupla, & subdupla.

Altera nostra definitio cōpositæ proportionis.

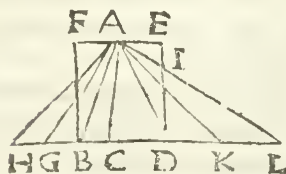
Itaq; liceat etiam aliter, cum similitudine tamen huius quintæ definitionis definire proportionem cōpositam sic: Proportio ex proportionibus componi dicitur, quando antecedentium, & consequentium producta per diuisionem efficiunt aliquam proportionem, *iuxta exēpla modò allata in antecedentibus operationibus arithmeticis.*

Alia ad cognitionem, ac vsum compositæ proportionis vide in Euclidis exemplo, propos. 23 huius, atq; ibidem hallucinationes, quæ vitandæ sunt.



Propos. I. Theor. I.

Triangula, & parallelogramma eandem habentia altitudinem, inter se sunt vt bases.



SInt triangula ABC, ACD, parallelogramma EC, CF habentia altitudinem eandem perpendicularem, nempe ex A in BD ductam. Dico esse & triangulum ABC ad triangulum ACD, & parallelogrammum EC ad parallelogrāmum CF, vt est basis BC ad basin CD. Producatur enim BD vtrinque in HL, sintque basi BC æquales

les BG, GH; basi verò CD quæcunque DK, KL, & iungantur AG, AH, AK, AL. Cumque BC, BG, GH æquales sint, a erunt & triangula AGH, AGB, ABC æqualia. Quam multiplex ergo est basis HC baseos BC, tam multiplex est triangulum AHC trianguli ABC. Eadem de cāusa quam multiplex est LC basis ipsius CD, tam multiplex est triangulum ALC trianguli ACD. Et si basis HC basi CL æqualis sit, erit & triangulum AHC triangulo ACL æquale; Et si superet HC ipsam CL, superabit & triangulum AHC triangulum ACL, & si minor minus. Cum ergo quatuor sint magnitudines, duæ bases BC, CD, & duo triangula ABC, ACD; acceptæq; sint baseos quidem BC, & trianguli ABC æque multiplicia, basis HC, & triangulum AHC; baseos verò CD, & trianguli ACD alia vtcunque, nempe basis CL, & triangulum ALC; demonstratumque sit si HC excedat CL, & AHC excedere ALC; & si æqualis, æquale; & si minor minus; b erit vt basis BC ad basim CD, ita triangulum ABC ad triangulum ACD. Et cum trianguli ABC c duplum sit parallelogrammum EC; triāguli verò ACD duplum parallelogrammum FC, & d partes eodem modo multipliciū eandem habeant proportionem, erit vt triangulum ABC ad triangulum ACD, ita parallelogrammum BC ad parallelogrammum FC. Et quia demonstratū est esse vt basim BC ad basim CD, ita triangulum ABC ad triangulum ACD; vt vero ABC ad ACD, ita EC ad CF; e erit vt basis BC ad basim CD, ita parallelogrammum EC ad parallelogrāmum CF. Triangula ergo & parallelogramma, &c. Quod oportuit demonstrare.

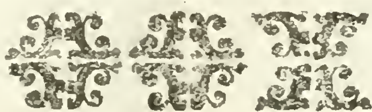
a *propos.* 38.1.

b *def.* 5.5.

c *prop.* 41 1.

d *prop.* 15 1.

e *prop.* 11. 5.



SCHO-

SCHOLION I.

Ex vsu geometrico centri grauitatis aliter, breuissimè, ac facillimè demonstratam habes hanc 1 propos. & huic similes in lib. 1. 35, 36, 37, 38, & de solidis parallelepipedis, porismatibus, Cylindris, conis ex lib. 11, 12, 13 Elem. apud nos in fine 3 partis hu. 2 To. in Epilogo Geometrico §§ 1, 2, 3, 11, 12, 13, 22, 23.

§. I.

SCHOLION II.

Nodus geometricus circa veritatem huius 1 Propos. solutus. Fallacia circa figurarum rectilinearum similitudinem, ac Theoriæ ad nodi solutionem, & ad lucem pro 25 propositione huius lib. 6.

1 *Videtur hæc prima propositio contradicere propositionibus 19, & 20 huius lib 6. Nam in hac 1 propos. affirmatur triangula, & parallelogr. eiusdem altitudinis habere inter se eam proportionem, quam inter se habent eorum bases, scillcet acceptæ in simplici, non in duplicata, vel triplicata, &c. proportione. At vero in 19. propositione affirmatur speciatim de triangulis similibus ea inter se habere proportionem duplicatam laterum, siue basium homologarum. Quod & vniuersè affirmatur in propos. 20. de polygonis omnibus similibus. Exempli gratia in figura huius 1 propos. finge rectam, siue basim DL trianguli DAL (siue etiam parallelogrammi super ea excitati) esse duplam basis CD triãguli CAD, & rectanguli CE; item ipsam CD esse duplam basis BC trianguli BAC, & rectanguli CF; est, per hãc 1, triangulum DAL duplum trianguli CAD, & CAD duplum trianguli BAC; vt & rectangulum CE duplum rectanguli CF, & per 19,*



&

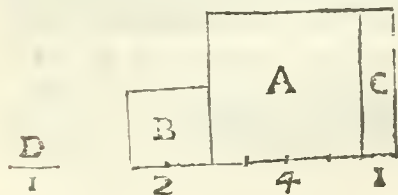
& 20 erit (exemplum esto in rectangulo, siue parallelogrammo) rectangulum CE ad CF, vt est DL, ad BC, hoc est, vt est proportio primæ DL ad tertiam BC duplicata (idest bis sumpta, & vnita proportio ipsius DL ad DC cum proportione ipsius CD ad BC) idest, vt est DL, quadrupla ipsius BC; sic triangulum, & parallelogrammum super DL erit quadruplum trianguli BAC, & parallelogrammi CF. Vnde igitur earum hac propositionum dissonantia? An in propos. 19, & 20 affirmatio est solum de triangulis, & polygonis similibus? At quæ maior similitudo figurarum, quam in hac 1 propositione, nempe triãgulorum cum triangulis, parallelogrammorum cum parallelogrammis, & figurarum in eadem specie inter se comparatarum?

2 Respondeo, ac distinguo. Apud Philosophos Geometricos, præter similitudinem figurarum in eàdem specie, similitudo etiam est proprie geometrica, quam habes in 1 defin. ante hunc lib 6. Similes enim figuræ similitudine geometricà eæ sunt, quæ habent etiam singulos angulos æquales, & latera circa æquales angulos proportionalia. Itaq; licet in figura huius 1 propos. sint triangula, & parallelogrammata inter se specificè, idest in eadem figurarum specie similia, non sunt tamen geometricè similia, neque enim triangula ACD ADK, AKL habent aut angulos vnius trianguli æquales singulis alterius, aut latera proportionalia, vt patet oculo geometricè inspectanti, &c. At licet parallelogrammata, præsertim rectangula, ceu BA, CE habeant angulos æquales, non habent tamen latera proportionalia. Neq; enim est vt FB ad BC, sic ED ad CD, propter inæqualitatem ipsarum BC, CD ad æquales FB, ED relatarum. Euclides igitur in prop. 19, & 20 affirmat tantum de similibus geometricè polygonis proportionem duplicatam laterum; in 1 verò hac propositione similitudo tantùm specifica est figurarum, à qua non habent nisi simplicem proportionem laterum &c.

Conciliatæ propositiones 1, 19, 20, huius.

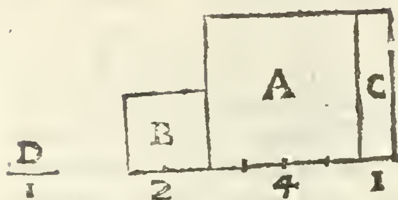
Duplex figurarũ similitudo.

Quænam proprie similitudo geometrica figurarum.



3 Ac sanè mirè iucũdum est geometricè philosophando inspicere in exemplo appositæ figuræ quemadmodum propositiones, quæ dissidere inter se videbantur, tamen conueniant. Nam dato quadrato A super basi quadrifariata in partes æquales, & altero quadrato B super basi dimidia basis quadruplatæ, itemq; applicato rectangulo C æquali quadrato B, & ductà lineolà tertià propor-

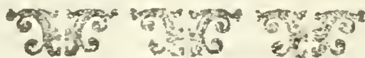
tio-



tionali idest vnius partis qualium est basis quadrati B duarum, & quadrati A quatuor, inuenies etiam basim rectanguli C esse æqualẽ tertiæ proportionali D. Itaq; idem est si dicas cum prop. 19, & 20, vt prima, idest basis quadrati A ad tertiam D, ita idem quadratum A ad quadratum B, hoc est quadruplũ est A ipsius B, seu duplicatam habet proportionem suæ basis ad basim ipsius B, hoc est bisduplam, siue quadruplam, qualis est 4 ad D; idem, inquam, est ac si cum hac 1 propos. affirmes quadratum A ad rectangulum C, inter easdem parallelas constitutũ, hoc est ad B æquale ipsi C, habet proportionem, quam basis ipsius A ad basim ipsius C, idest A est quadruplum ipsius C, vt basis ipsius A est quadrupla basis ipsius C, quæ est pariter tertia proportionalis, vt est D. Sic ergo conspirant amicè eæ propositiones.

4 *Ex prædictis etiam videas quando B è simili geometricè ipsi A transformatur in C æquale, ac geometricè dissimile eidem A, si ex C reformandum est in B, videas, inquam, necessitatem inueniendæ mediæ proportionalis inter bases, seu lineas 4, & 1, vt super determinata basi constructum habeat ad A, nõ solum similitudinem geometricam, sed etiam eandem proportionem, quam habebat in C; media enim proportionalis 2 tribuit ipsi quadrato B vt habeat se ad quadratum A, sicut basis 4 ad tertiam proportionalẽ D 1; quemadmodum eandem habebat in C basis 1 ad basim 4. Ex qua eàdem proportione 1 ad 4 demonstrantur, per 11 Quinti, æqualia B, C.*

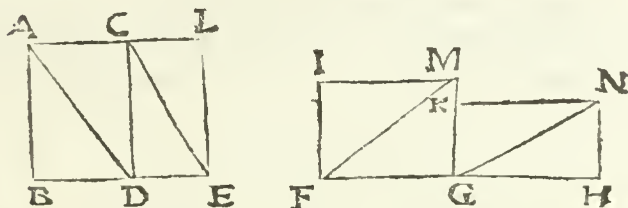
Atq; hoc est quod profitetur, & præstat propositio 25 huius, nempe dato rectilineo, verbi gratia ipsi A simile, & alteri dato C æquale B constituere. Quod fit, inuenta media 2 inter duas 4, & 1. Videbis suo in loco ad eam propos. 25. Hic tantum pro re nata indicandum incidit quasi corollarium.



§.II.

COROLLARIVM I.

Triangula, & parallelogramma eandem, vel æquales bases habentia, inter se sunt vt altitudines.



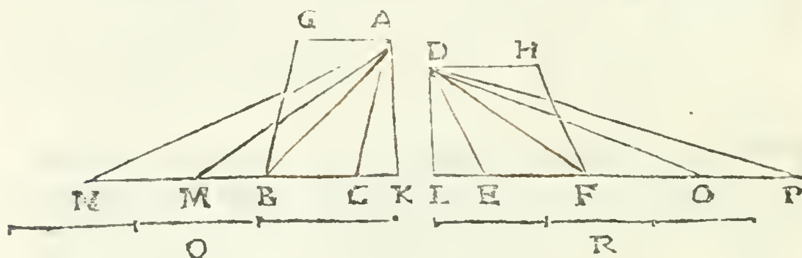
QVod Commandinus theorema ponit, & demonstratione peculiari demonstrat, nos corollarium deducimus ex demonstratis ab Euclide in hac 1 propos. Quoniã.n æqualibus existentibus altitudinibus AB, CD, probatum est eandem esse proportionem inæqualium basium BD, DE, quæ est parallelogrammorum BC, DL, vel triangulorum BAD, DCE, si eadem parallelogrammata ita disponantur, vt æquales altitudines BA, CD fiant bases æquales ceu FG, GH, & bases inæquales BD, DE cedant in altitudines, sitq; FI æqualis ipsi BD, & GK ipsi DE, patet demonstrationem factam valere pro vtraq; figura, cùm tantùm mutata sit eorundem parallelogrammorum situatio, iisdem manentibus lateribus, & permutatis altitudinibus in æquales bases, & basibus in altitudines estq; eodem modo vt BD ad DE, sic FI (ipsi DB æqualis, immo eadẽ) ad KG ipsi DE æqualem, immo eandem. &c.

Pari modo dicendum de triangulis FMG, GNH. &c. Itemque de obliquis parallelogrammis, & obtusangulis triangulis, quorum altitudines metiuntur perpendiculares. &c.

§.III.
SCHOLION III.

Corollarij præcedentis alia demonſtratio geometrica, præter Euclideam.

Commandini demonſtratio quia & ipſa (vt Euclides in demõſtratione huius pri. propoſitionis) exhibet Tyroni vſum 5 definitionis (quàm vſu, & intelligentiâ Tyronibus familiarem peruelim) quæ eſt ante lib. 5, de æquemultiplicibus, &c. & quia confirmat ea quæ docemus in 1. To. Aerarij huius ad propoſ. 45, §4, & 5, & coroll. 1, & in Ap. 3. Progym. 8, præſertim in



Schol. vltimo, propterea non videtur hic omittenda. Sint duo triangula ABC, DEF, & duo parallelogramma, CG, EH, quæ æquales baſes habent BC, EF: trianguli autem ABC, & parallelogrammi CG altitndo ſit AK, & trianguli DEF, & parallelogrammi EH altitudo DL. Dico vt AK ad DL, ita eſſe & triangulum ABC ad triangulum DEF, & parallelogrammum CG ad EH parallelogrammum. Producantur BC, EF, & ponantur baſi BC æquales quotcunq; BM, MN; & baſi EF æquales quotcunq; FO, OP, iunganturq; AM, AN, DO, DP: quot verò magnitudines ſunt in CN æquales baſi CB, tot ſumantur in linea Q æquales ipſi AK altitudini; & quot ſunt in EP æquales baſi EF, tot ſumantur in linea R æquales altitudini DL. Itaque quoniam triangula ANM, AMB, ABC ſunt in æqualibus baſibus conſtituta, & æquali altitudine; etiam inter ſe æqualia erunt, ex antec. coroll. Et eadẽ ratione triãgula DEF, DFO, DOP erunt inter ſe æqualia. Quotuplex igitur eſt linea Q ipſi AK, totuplex eſt triã-

gu-

gulū ANC trianguli ABC; & quotuplex est linea R ipsius DL, totuplex est triangulum DPE trianguli DEF: & si Q sit æqualis R, & triangulum ANC triangulo DPE æquale erit, ex præmissa; erit namq; altitudo AK, cuius tripla est Q æqualis altitudini DL, cuius ipsa R est tripla: Si vero Q sit maior, quàm R, & triangulum ANC maius erit, quàm triangulum DPE, & si minor minus; triangulorum enim æquales bases habentium quæ maiore sunt altitudine, etiam maiora sunt, alioqui sequeretur totum parti æquale esse. Cum igitur quatuor sint magnitudines, videlicet duæ altitudines AK, DL, & duo triangula ABC, DEF: & sumpta sint æquemultiplicia altitudinis quidem AK, & trianguli ABC; altitudinis vero DL, & triāguli DEF alia vtcunq; multiplicia: & ostensum sit, si linea Q superat R, & triangulum ANC superare triangulum DPE, & si æqualis, æquale, & si minor, minus: erit vt altitudo KA ad altitudinem DL, ita triangulum ABC ad triangulum DEF; sed trianguli ABC duplum est CG parallelogrammum, & trianguli DEF duplum parallelogrammum EH; partes autem eodem modo multiplicium eandem habent proportionem, erit parallelogrammum CG ad parallelogrammum EH, vt ABC triangulum ad triangulum DEF Sed ostensum est vt altitudo AK ad altitudinem DL, ita esse triangulum ABC ad triangulum DEF. Vt igitur AK ad DL, ita est parallelogrammum CG ad EH parallelogrammum. Quare triangula, & parallelogramma in æqualibus basibus constituta eandem inter se proportionem habent, quam eorum altitudines, quod demonstrare oportebat.

5.def.5. *41.pri.* *15. Quīti in 3.par. hu.*

Vide § 12 in Epilogo in fine 3 partes hu. to 2, vbi aliter tertio nos ex centro grauitatis demonstramus hoc theorema.

§. IV.

PARADOXVM.

De finito etiam minimo non solum æquali, sed etiam multipliciter maiore, quàm sit quantum aliquod extensione infinitum.

Q*Vemadmodum ex proposit. 35, 36, 37, 38, lib. 1. patuit posse parallelogrammum, vel triangulum aliquod, licèt minimum,*

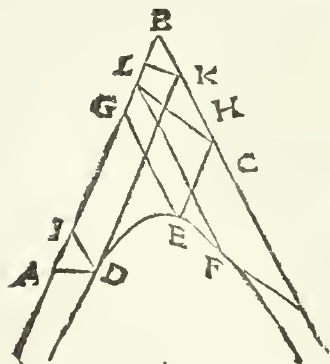
 esse

esse æqualia parallelogrammis, vel triangulis extensione infinitis intra easdem parallelas super iisdem, vel æqualibus basibus; ità ex hac patet parallelogrammum, vel triangulum, licèt minima, posse esse duplicia, triplicia, vel in alia proportione maiora parallelogrammis, vel triangulis extensione infinitis intrà easdem parallelas super basibus duplo, triplo, vel in alia proportione minoribus. Circà quæ paradoxa non pluribus immoror, quia facilè cognoscuntur ab animo etiam leuiter aduertenti verba propositionis.

§. V.

COROLLARIVM II.

De triangulis inter hyperbolen, & asymptoton inter se æqualibus.



IN reposita hic figura quoniam, iuxtà indicata ad 35 propos. lib. 1, § 2, & 11, & demonstrata in analecto 10 ad nostra Apiaria, inter hyperbolen DEF, & rectas asymptotos ABC parallelogrammata AK, DB; BE, CF. &c. descripta sunt omnia inter se æqualia, nec sequuntur proport. basiũ; ergo & qualibet eorum dimidia triangula erunt etiam ipsa inter se æqualia licet super inæq. basibus. Quare Corollarij loco sit propositio : Inter hyperbolen, & asymptoton omnia triangula habentia vnum latus, vel in asymptoto, vel parallelum asymptoto, sunt inter se æqualia, *etiam basibus, vel altitudinibus inæqualibus.*

Ex quibus hic dictis, & deductis patebit ad 29. huius nouus, & pulcherrimus modus describendi hyperbolen etiam intrà asymptotos.

Co-

COROLLARIVM III.

Paradoxum antec. in § 4 licet applicare etiam parallelogrammis inter asymptotos, quorum quodlibet vel minimum erit duplū cuiuslibet trianguli extensione etiam infiniti inter hyperbolen, & asymptoton.

SCHOLION IV.

Omitto, nè nimis minuta persequi videar, indicare problema: Dato parallelogrammo, vel triangulo æquale vel maius, vel minus etiā infinitā extensione statim describere. *Quod facilè soluitur ex hac prima prop. 1, productis oppositis, ac parallelis lateribus dati parallelogrammi vel ducta per verticem parallela basi dati triāguli, ac diuisis, vel auctis pro lubita proportione basibus, super quibus intra easdē parallelas licet obliquare parallelogrammata, vel triangula in infinitum, maiora tamen, vel minora dato iuxtà proportionem basium.*

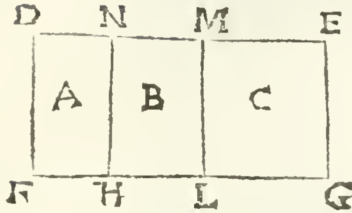
§. VI.

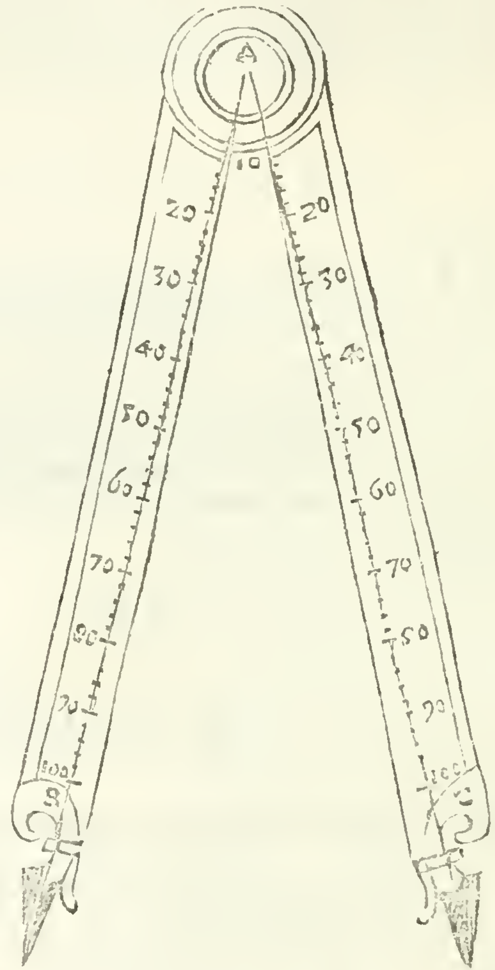
LEMMA.

Datis quotcunque rectis lineis, vel angulis, vel arcubus, quam inter se proportionem habeant illicò agnoscere in Circino proportionum.

Huius lemmatis praxis vsui futura est in sequentibus non solum ad hanc 1 propos. sed etiam ad alias huius lib. 6, veluti ad 19, 20, 23, &c. & implicitè iam indicata est in vsu circini proportionum ad 9, & 10 propos. lib. 1. Nam ea-

eadem est cum propositionibus ibi indicatis. Datis duabus rectis, scire quota sit altera alterius pars. *vel* quot alterius diuisæ partes altera obtineat. *Igitur finge quotlibet datas rectas inter se inæquales, exemplum ponamus ex appositæ figuræ tribus FH, HL, LG. Datarum ma-*





iorē LG interpone inter numeros (circini proportionum, vbi diuisa est recta in 100 partes equales, vt habes in apposita figura) in quos velis eam rectam esse diuisam, puta inter 100, & 100, diductis circini partium cruribus ad interuallum eiusdem rectę. Deinde accipe interuallū vtriusque LH, HF, & immotà diductione circini proportionum, vide inter quos numeros præcise aptentur, finge alterā cadere inter 30, & 30, alteram inter 20, & 20. Habent ergo tres datæ proportionē inter se, quam numeri 100, 30, 20; unde maiores per minores numeros, & quotientes denominabūt proportiones. Rectæ LG maxima 100 ad rectam mediam HL 30 erit proportio tripla sesquitertia $3\frac{1}{3}$. Eiusdē LG 100 ad minimā FH 20, erit in quotiente 5 proportio quintupla. Mediæ HL 30 ad FH 20 erit in quotiente $1\frac{1}{2}$ proportio sesquialtera.

Et

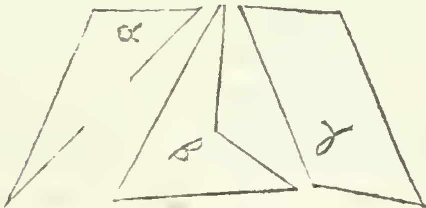
Et eodē modo aptatis quotlibet aliјs rectis (minoribus ipsà inter 100 & 100 interpositâ) inter numeros laterales circini, statim ij numeri, prodent quantitatem, & proportionem aptatæ ad quamlibet interpositam inter alios quoslibet numeros laterales. Praxis huius, & aliarũ ex hoc circino, demonstrationem vide suo loco ad 4 propos. huius lib. 6.

In altera vero facie eiusdem circini, vbi gradus 90 quadrantis notati sunt, proportionali modo erit operandum si aueas scire quam proportionē habeant inter se dati vel anguli, vel arcus quadrantis. Pro qua re vide ad 9, & 10 hu. in loco.

§. VII.

PROBLEMA I.

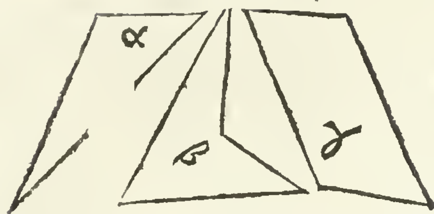
Datis quibuslibet, & quotlibet figuris rectilineis, quam inter se proportionem habeant facillimè inuenire.



Problema hoc indeterminatum, atq; vniuersalissimum est non solum de similibus, sed etiã de dissimilibus, & irregularibus figuris rectilineis. Nam similia quã habeant proportionem prodetur, aliter, quàm hic, ad 20 propos. nempe per duplicatam laterum. &c. At data duo, vel plura rectilinea irregularia, & dissimilia quam habeant proportionem cognoscere, ac quidem facillimè, & ex hac 1 propos. nondum apud alios memini me videre

Itaq; problema sic expedio. Si scire aueas quã inter se proportionē habeant rectilinea α, β, γ, verte ea in tria parallelogramma eiusdem altitudinis, siue intra easdem parallelas (in fig. antec.) DE, FG, ope propositionis 45 li. 1, vel per modos aliquos ex ијs, quos docuimus de triãgulis rectangulis, trapezijs. &c. ex partium facili transpositione ad prop. 42, 44, 45. &c. Deinde vide eorum bases FH, HL, LO quas inter

se



se proportiones habeant, iuxta antecedens lemma in praxi è circino proportionum, easdem enim habeant, per hanc 1, inter se proportiones rectilinea α, β, γ constitutis parallelogrammis A, B, C æqualia. Modus hic indiuidualis cognoscendi quamnam præcisè proportionem habeãt bases, ille est, quem innuimus, ac polliciti sumus in § 4 ad prop. 45. l. 1.

SCHOLION III.
ALITER

Data rectilinea scire quam inter se proportionem habeant.

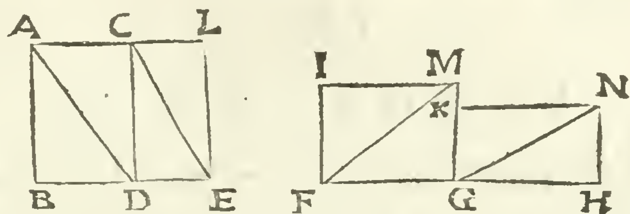
Hoc problema, quod soluimus ex propositione, ac demonstratione hac 1 Eucl. per proportiones basium, licet etiam expedire ex corollario 1, siue ex propositione, ac demonstratione Commandini per proportiones altitudinum in triangulis, & parallelogrammis. Itaq; data qualibet, & quotlibet rectilinea si vel in triangula, vel in parallelogrammata æqualia super basibus æqualibus transmutaris, acceptæ proportiones altitudinum indicabunt proportiones arearum rectilinearum. Proportiones vero altitudinum habes in promptu ex circino proportionum in lemmate antecedenti.

§. VIII.
COROLLARIVM IV.

Figurarum comparatas quantitates nosse, figuras augere, imminuere in data proportione ex 1 hac propos. Eucl.

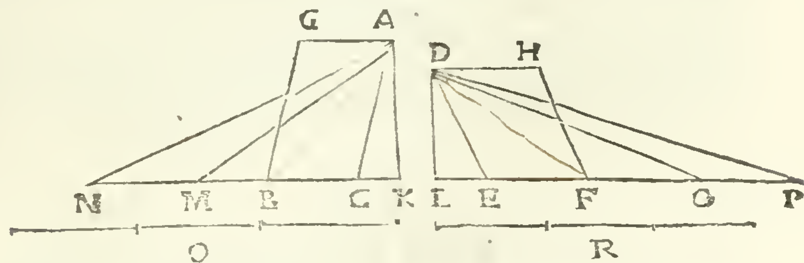
1 *TRanslatis rectilineis in æqualia triangula, vel parallelogrãmata, quæ sint vel æqualium altitudinum, vel æqualium basium*

sium, facile scies comparatas eorum rectilineorum quantitates, scilicet quanto aliud alio sit maius, vel minus, nempe in æqualibus triangulis, vel parallelogrammis. Nam (in exemplo corollarij primi) quã-



to triangulum FMG est maius triãgulo GNH? (quod GNH propter minorẽ perpẽdicularẽ GK, est minus ipso FMG, per demonstrata in antecedentibus, &c) Metire igitur, & confer ipsas perpendiculares MG, KG. Eodemq; modo quanto sit maius parallelogrammum IG ipso KH; vel quanto minus triangulum altero, vel parallelogrammum altero. Nam iuxta perpendicularium diuisionem, ac partes, &c. sic triangulorum, & parallelogrammorum areæ.

2 Si data triangula, vel parallelogrammata super æqualibus basibus velis imminuere vel augere in data proportione, verb. gra. vt alterum alteriu sit duplum, triplum, &c. subtriplum, &c diuide perpendiculares ad datam proportionem, & perpendicularis altera, ver.



g. triplo minor dabit in extremo diuisionis, ver. gr. (in apposita figura ex Commandino) inter L, & D dabit punctum, a quo triangulum super basi EF erit tripla pars ipsius ABC. Sic per idem punctum tripæ diuisionis in perpendiculari DL, ducta parallela basi EF, & iuncta duabus parallelis conficiet parallelogrammum, quod sit tertia pars ipsius CG.

Id vero quod dictum est in altera figura EH cum respectu ad CG poterit in eadem vnica figura fieri ver. gr. imminuendo, vel augendo

perpendicularem KA, vt iuxta eam augeantur, vel imminuantur triangulum ABC, & parallelogrammum CG. Eruntque præcedentes operationes in Geometriâ practicâ institutæ modo non vulgato ex antecedeentibus.

§. IX.

SCHOLION V.

De figuris rectilineis, præter triangula, & parallelogrammata augendis, minuendis in data proportione. De rectilineis proportionalibus.

E Transmutatione figurarum rectilinearum in æqualia triangula, vel parallelogrammata, & eorum constitutione, vel inter æquales altitudines, vel super æqualibus basibus, & e basium, vel altitudinum auctione, imminutione, proportione, iuxta antedicta quidem licet scire auctiones, imminutiones, proportiones figurarum, sed non in propria figura; vt autem etiam redeant in suam figuram præcisè, ac perfectè demonstratam, opus est vsibus aliquarũ posteriorum in hoc lib. 6. propositionum, atq; ideo ad eas aptius reseruanda sunt prædicta problemata, in primis ad 25. propos. huius. Vide etiam in fine nostrarum commentationum ad 10 propositionem huius indicatos amplissimos vsus, ad quos traduci potest hæc 1. prop.

§. X.

VSVS

Proposit. 1. In Geodesia pro figurarum planarum, & agrorum diuisionibus in data proportione.

IN 1 Tomo nostri huius Aerarij ad propositionem 34. li. 1. Elem. § 5, 6, 11, 13, 14. & ad propos. 38, § 3, 4, 5, 6 docuimus vsus

ea-

earum propositionum in Geodesia pro solis bipartitionibus vel simplicibus, vel multiplicatis figurarum planarum, vel agrorum quantum ferebant eæ propositiones, & suppositum in antecedentibus eius lib. pri. problema de bipartitione rectæ lineæ; hìc vbi Euclides vniuersalem habet propositionem non solum de æqualitate triangulorum, & parallelogrammorum inter easdem parallelas, ac super æqualibus basibus, sed vniuersè affirmat esse inter se triangula, & parallelogramma vt sunt eorum bases etiam diuisæ, & nos etiam vniuersalia proponemus problemata pro non sola bipartitione, sed pro quacunque partitione figurarum aliquarum inter easdem parallelas; quæ tamen partitio supponit partitionem lineæ demostratam ad lubitam proportionem, de qua in prop 9, & 10 huius lib. 6 Ac ea propositio vim habet à sequenti proxima, ac secũda propositione huius. Ad condimentum, & ornamentum huius primæ, vt libentius Tyrones reliquas huius libri aggrediantur, erit pretium operæ vti hac facili, & paulo post docenda lineæ lubità diuisione, iuxtà morem anticipationis in praxibus, & problematibus.

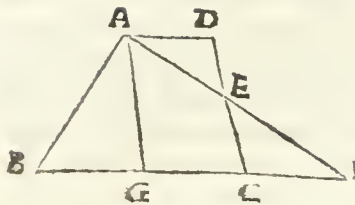
Vt verò faciliora pro Tyronibus nostra sint problemata, ea includemus intra aliquas determinationes, extra quas vagari licebit provectioribus per plures, & difficiliores ambages, iuxta exempla apud Machometem Bagdedinum, Commandinum, Clauium in lib. 6. Geom. Practicæ.

§. XI.

PROBLEMA II.

A Trapezio duorum laterum parallelorum ex angulo imperatã partem ad datam proportionem facillimè auferre, modò diuisio cadat intra alterutrum laterum parallelorum.

S*It duorum laterum AD, BC parallelorũ trapezium AC diuidendum ex angulo, v. gr. A ita, vt prima pars diuisionis sit, v. gr. vna tertia totius trapezij. Bifartetur DC in E, & ex A per E du-*

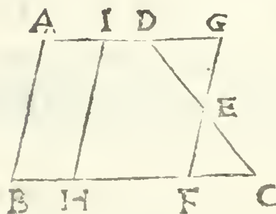


ducatur recta occurrens in F lateri producto BC. Deinde totius BF accipiatur tertia pars in G puncto intra latus BC, iuxta determinationem à nobis propositam. Iunctà AG, dico AGB esse tertiam partem trapezij BD. Est enim triangulum ABF æquale trapezio BD per ea quæ à nobis demõstrata sunt in § 11 ad prop. 41. Eucl. in 1 To. nostri huius Ærarij. Est autem eiusdem trianguli ABF tertia pars triangulum ABG, per hanc 1 huius 6. li. Ergo idem ABG est etiam tertia pars trapezij BD. Quod erat faciendum, & demonstrandum.

§. XII.

PROBLEMA III.

A Trapezio ex punctis in alterutro duorum laterum parallelorum imperatam partem auferre ad datam proportionem per lineam parallelam alteri duorum laterum non parallelorum, modo cadat diuisio intra latus alterutrum parallelum.



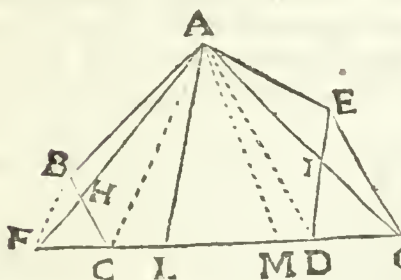
TRapezij AC pars, verbi gr. tertia sit accipienda per lineam parallelam lateri, v. g. AB non parallelo alteri lateri DC ex puncto aliquo I in latere AD parallelo alteri lateri BC, iuxta conditiones propositas. Alterutrum laterũ non parallelorum DC bifarietur in E, & per E agatur lateri AB parallela FE occurrẽs in G lateri AD producto. Accepta deinde tertia par-

parte lateris BF in H, & ductà HI parallelà lateri AB, erit parallelogrammum BI tertia pars trapezij AC accepta per parallelam, &c. ex punctis, &c. iuxta proposita. Est enim parallelogrãmum AF æquale trapezio AC, per demonstrata a nobis in § 12 ad propos 41 libri 1 Elem. in To. 1 nostri huius Ærarij. Est verò parallelogrammum BI (super BH acceptà tertià ipsius BF) tertia pars totius parallelogrammi BG, per hanc 1 propos lib. 6. Elem. Ergo idem BI est etiam tertia pars trapezij AC, accepta iuxta conditiones propositas, &c.

§. XIII.

PROBLEMA IV.

A dato Pentagono etiam irregulari imperatam partem ad datam proportionem auferre per lineam ex angulo deductam, modo diuisio cadat intra basim oppositam angulo &c.

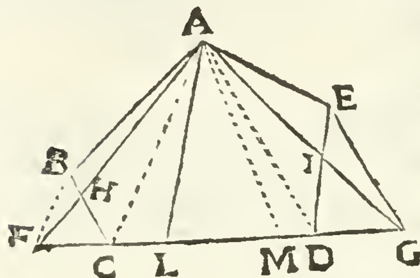


Datum sit Pentagonum etiam irregulare ABCDE, à quo auferenda sit tertia, vel quælibet in alia proportione pars per lineam ab angulo, puta A, deductam in basim CD. Ab A ad C, & D ducantur duæ rectæ, quibus parallelæ agantur ex B, & E rectæ occurrentes producto lateri CD in F, & G. Iungantur AF AG. Accipiatur ipsius FG tertia pars in L, iunctàq; AL, dico spatium pentagonicum sub rectis AB, BC, CL, LA esse tertiam partem totius pentagoni ABCDE. Nam, per demonstrata à nobis in § 8 ad Prop. 38. lib. 1 Elem. in To. 1 nostri huius Ærarij, triangulũ AFG est æquale pentagono ABCDE, & per 37. 1. FHC, BHA sunt inter se æqualia (ablato communi BHF) & AHC cõmune, ergo triangulũ AFL est æquale pentagonico

spa-

spatio ABCL; at AFL est tertia pars ipsius AFG, per hãc primã prop. huius lib. 6, ergo & ABCL est tertia pars totius pentagoni AB CDE.

COROLLARIVM V.



QVin immo, diuisà FG in tres partes in punctis L, & M vtrisq. cadentibus inter latus CD pentagoni ABCDE, & iunctà AM, est diuisum in tres partes equales pẽtagonum ABCDE, quemadmodum & triangulum AFG. &c.

§.XIV.

COROLLARIVM VI.

Eàdem operà impensà in constructionibus, & demonstrationibus praecedentium problematum habes diuisionem trianguli, & parallelogrammi ad datam proportionem ex vsu huius 1 propos Eucl. ac sine determinatione. Nam diuisio est libera in lateribus, & basibus siue ab angulo trianguli, siue a punctis in altero laterum oppositorum in parallèlogrammo.

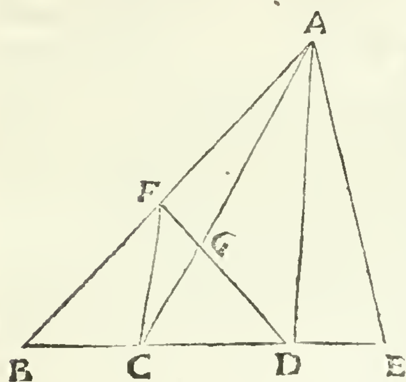
Cæterum vt in triangulis, non solum ab angulo, sed & à puncto vel in latere, vel intra triangulum, dato habeas non solum imperatam partem, sed & totũ triangulum diuisum in æquales partes datæ proportionis, accipe sequẽtia ab Orontio in lib. 3. de rer. Math. hact. desid.



§. XV.

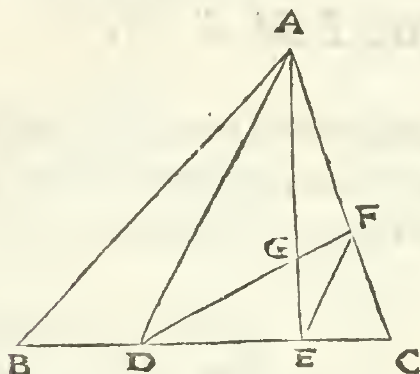
PROBLEMA V.

A dato cuiusuis lateris oblati trianguli puncto, rectam ducere lineam, quæ ordinatam partem ab ipso triangulo discindat.



SIt datum triangulum ABE, & in aliquo ipsius trianguli latere vtpote BE, designatum punctum D. Sitq; propositum tertiam, v.g. partem ab eodem abscindere triangulo, sub recta videlicet, quæ per D punctum fuerit delineata. Secetur itaq; ab ipso latere BE pars tertia BC Et connexis AD, & AC lineis rectis, per C recta ducatur ipsi AD parallela, per 31 primi elementorum, & connectatur demum recta DF, quæ secet AC rectam in puncto G. Aio itaque rectam DF abscindere tertiam partem ab ipso triangulo dato ABE, vtpote triangulum DBF. Triangulum enim ADF, & DCA in eadem basi, atq; in eisdem consi?unt parallelis: æquum est propterea triangulum ADF ipsi triãgulo DCA, per 37 ipsius primi elementorum. Subducto igitur communi triangulo AGD, reliquum triangulum AFG reliquo GCD est æquale. Quod si vtrique æqualium triangulorum addatur commune trapezium FGCB, consurget triangulum DFB æquale triangulo ABC. Et quoniam ABC, & ABE triangula sub eodem sunt vertice: Se habent igitur vt bases, per primam sexti elementorum. Basis porrò BC est tertia pars ipsius BE, per ipsam constructionem, & triangulũ igitur ABC est tertia pars ipsius trianguli ABE. Et proinde triangulum

gulum DFB eiuſdem trianguli ABE pars itidem eſt tertia. quæ enim ſunt inuicem æqualia, eiuſdem ſunt æquè minora per ſeptimæ communis ſententiæ conuerſionem. Recta igitur linea DF, abſcindit tertiam partem DFB ab ipſo triãgulo dato ABE. Quod oportuit feciſſe.



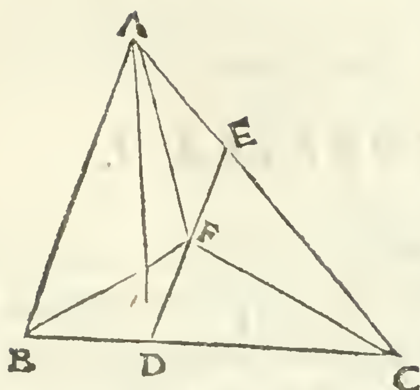
Haud alter datam quamuis aliã partẽ ordinatam ex ABC triangulo dato ſub ipſa recta DF diſcindere licebit, etiam vbi datum punctum D inter B, & E puncta fuerit deſignatũ. Vt ex ea quæ ſequitur figuræ diſpoſitione vel facilè deprehenditur: in qua punctum datum in latere BC eſt D, & CE recta eiuſdem lateris pars quarta. Deſcriptis enim veluti ſupra dictum eſt AD, DF, FE, & EA lineis rectis, manifeſtum eſt rurſum triangula AGF, & DGE fore inuicem æqualia: & triangulum conſequenter AEC triangulo DFE æquale, iuncto videlicet communi trapezio FGEC. Et cum triangulum AEC ſit quarta pars ipſius dati ABC trianguli, erit propterea triangulum DFC eiuſdem trianguli ABC pars itidem quarta,

§. XVI.

PROBLEMA VI.

Intra datum triangulum punctum inuenire, à quo in ſingulos ductæ lineæ rectæ, triangulum ipſum in tria, & inuicem æqualia diuidant triangula.

SIt oblatũ triangulum ABC, & ab vno illius latere, vtpote BC, tertia pars abſcindatur BD. Conſequenter per ipſum punctum D, ipſi AB lateri parallela ducatur DE, per 31 primi



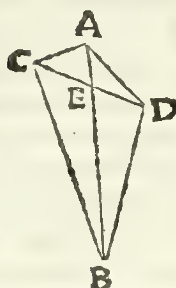
elementorum: quæ bifariam diuidatur in puncto, F, per decimam eiusdem primi elementorum. Aio, itaque punctum F esse illud, quod quærebatur. Connectantur enim AD, AF, FC lineæ rectę: erunt igitur ABD, AFB triangula in eadem basi AB, atque in eisdem parallelis AB, & EB: & proinde inuicē æqualia, per 37 primi elementorum. Triangulum porrò ABD se habet ad totum triangulum datum ABC, vt BD basis ad basim BC, per primam sexti eorundem elementorum. Atqui BD basis est tertia pars ipsius BC, per ipsam cōstructionem: & triangulum igitur ABD, atq; ipsum pendenter AFB triangulum tertia itidem pars est eiusdem trianguli dati, AFC, BFC reliqua duo tertia eiusdem ABC trianguli comprehendunt: quæ cum sint inuicem ęqualia, quodlibet eorundem triãgulorum vnum tertium efficit ipsius dati trianguli ABC. Quod autē AFC, & BFC triangula sint ad inuicem æqualia, fit manifestum. Triangulum namq; DFC, triangulo CFE, per primam sexti elementorum est in primis æquale: se habent enim ad inuicem, vt bases DE, & FE, quæ, per ipsam constructionem, sunt æquales. Triangulum insuper AEF triangulo FBD itidem coæquatur, per 37 primi eorundem elementorum: sunt enim in eisdem basibus inuicem æqualibus DF, & FE, atq; in eisdem parallelis AB, & ED consistentia: Totum propterea AFC triangulum toti triangulo BFC coæquatur. Diuisum est itaque triangulum datum ABC in tria triangula inuicem æqualia, sub tribus rectis lineis a puncto F in singulos prodeuntibus angulos. Quod faciendum receperamus.



§. XVII.

THEOREMA I.

Si duo triangula æqualia habeant vnum latus commune, & in diuersas partes vergant. Recta oppositos angulos connectens a latere illo communi bifariam secatur.



Sint ęqualia duo triangula ABC, ABD habentia latus AB cõmune, & in diuersas partes vergentia. Dico rectam CD oppositos angulos C, D iungētē secari in E bifariam a latere cõmuni AB. a Quoniã enim est tam triangulum ACE ad triangulum ADE, quam triangulum BCE ad triangulum BDE, vt CE ad ED, b erit triangulum ACE ad triangulum ADE vt triangulum BCE ad triangulum BDE. c Igitur erunt quoque duo triangula simul ACE, hoc est totum triangulum ABC, ad duo triangula simul ABE, BDE, idest ad totum triangulum ABD, vel ACE ad ADE, hoc est, vt CE ad ED. Cum ergo triangula ABC, ABD ponantur æqualia; erunt quoq; rectæ CE, ED æquales, ac proinde CD in E secta est bifariam, quod erat ostendendum. *Clau. Geom. pract. li. 6. prop. 6.*

a 1 *sexti*

b 11 *quīti 3. par. huius.*

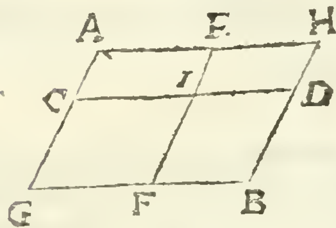
c 12 *quīti 3. par. hu.*

§. XVIII.

THEOREMA II.

In parallelogrammo duę rectę lateribus parallelogrammi parallelæ, ac mutuo se secantes diui-

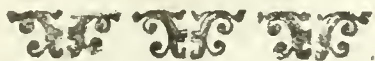
diuidunt parallelogrammum in quatuor parallelogrammata proportionalia, etiam permutata.



PAullo auctius dabimus hoc theorema quã aliqui alij. In parallelogrammo AB duæ rectæ CD, EF parallelæ lateribus AG, GB, seseque in I secantes ductæ sint. Dico parallelogrammata ita inter se habere, vt quemadmodum CE ad ED, sic GI ad IB; ac præterea esse vt FC ad CE, ita FD ad DE. Quoniam enim ex hac 1 prop lib 6, vt CI ad ID, sic CE ad ED; & rursus vt CI ad ID, sic CF ad FD; ergo, per 11 quinti erunt vt CE ad ED, sic GI ad IB. Pari ratione, quoniam vt FI ad IE, sic FD ad DE, & FC ad CE; ergo vt FD ad DE, sic FC ad CE. Quare etiam sunt in eadem proportione permutata ea parallelogrammata, idest non solum sunt antecedẽtes ad consequẽtes in eadem proportione, CE antecedens ad suum consequẽs ED; & CF antecedens ad suum consequens FD; sed etiam permutando, non tam ex vi propos. 16 quinti, quàm ex vi sola huius 1 propos. lib. 6, & 11 quinti, sunt in eadem proportione antecedens GI ad antecedẽs IA & consequens FD ad consequens DE, quia in eadem proportione sunt cum ijsdem FI, IE. Igitur in parallelogrammo, &c. quod erat demonstrandum.

SCHOLION V.

VIde & ad condimentum, & ornatum huius pri. propos. apud nos in Apiar. 3, Prog. 10 propos. 10. & coroll.



§. XIX.

SCHOLION VI.

De triangulis, & parallelogrammis incommensurabilibus.

QVoniam triangula, & parallelogrammata inter easdem parallelas habent inter se proportionem basium, hinc amplifica propositionem Euclidis etiam ad miraculum incommensurabilium in Geometria, & agnosce si bases fuerint incommensurabiles, triangula, & parallelogrammata super iis basibus etiam esse inter se incommensurabilia iuxta schol antiquum græcum ad finem lib. 10.

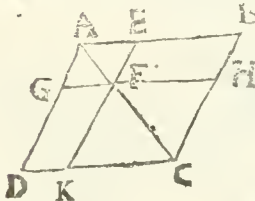
Sed hac de re vide plura apud nos ad propos. 20 huius §.9. nu. 2.

§. XX.

THEOREMA III.

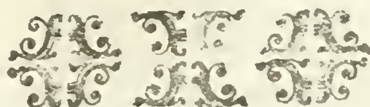
In parallelogrammis alterutrum complementum est medium proportionale inter parallelogrammata circa diametrum.

PRo hoc theoremate quod etiam aliter demonstrabimus ad 24 huius, apponatur hic eius 24 proposit. figura. In qua dico in parallelogrammo DB alterutrum complementum DF, vel FB esse medium proportionale inter parallelogrammata GE, KH circa diametrum AC. Quoniã enim, per præcedens theorema 2 sunt inter se parallelogrãmata vt GE ad KH, ita GK ad KH, & per 43, li. 1. comple-



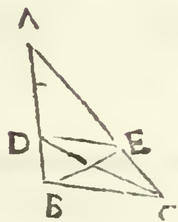
plementa DF, FB sunt æqualia, ergo vt GE ad EH, ita EH ad HK, vel vt EG ad GK, ita GK ad KH.

Ex hoc theoremate Problema, quo facile constituitur inter duo rectilinea medium proportionale, vide ad citatam 24 huius apud nos.



Propos. II. Theor. II.

Si vni laterum trianguli parallela recta ducta fuerit, proportionaliter secabit trianguli latera. Et si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, recta sectiones coniungens, reliquo lateri parallela erit.



LAteri BC trianguli ABC ducta sit parallela DE. Dico esse, vt BD ad DA, ita CE ad EA. Ductis enim BE, CD,[a] erit triangulum BDE æquale triangulo CDE; habent enim eandem basim DE, & sunt in iisdē parallelis DE, BC. Aliud autem triangulum est ADE.[b] Æqualia autem ad idem eandem habēt proportionem: erit ergo vt BDE triangulum ad ADE, ita CDE triangulum ad idem ADE triangulum.[c] Sed vt BDE ad ADE, ita est BD ad DA. cum enim in eadem sint altitudine, quam perpendicularis ex E in AB ducta ostendit, inter se erunt vt bases. Ob eandē causam, vt est triangulum CDE ad ADE; ita est CE ad EA:[d] vt ergo BD ad DA; ita est CE ad EA. Sint iam trianguli ABC latera AB, AC proportionaliter secta, sitq; vt BD ad DA, ita CE ad EA. Ducta ergo DE, dico illam ipsi BC paralle-

a prop. 37 1.
b prop. 7. 5
c prop. 1. 6
d prop. 11. 5.

lelam esse, ijsdem enim constructis, cum sit vt BD ad DA, ita CE ad EA;[e] atqui vt BD ad DA, ita est triangulum BDE ad triangulum ADE. Et vt CE ad EA, ita triangulum CDE ad idem ADE;[f] vt ergo triangulum BDE ad triangulum ADE, sic triangulum CDE ad triangulum ADE; vtrumque ergo triangulorum BDE, CDE ad triangulum ADE[g] eãdem habet proportionem; æqualia ergo sunt, suntque in eadem basi DE.[h] At triangula æqualia eandem habentia basim in ijsdem sunt parallelis, ergo DE parallela est ipsi BC. Si ergo vni lateri, &c. Quod oportuit demonstrare.

e prop.1.6

f prop.11.5.

g prop.9.5

h prop.40 1,

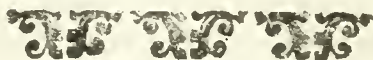
§. I.

SCHOLION I.

Veritas Euclidianæ 2 propos. etiam ex curuis lineis circulorum, parallelis, & non parallelis, proportionaliter secantibus latera triangulorum. &c.

IN triangulo rectilineo sectio fit proportionalis duû laterum non solum à recta, sed etiam a curuis, & circularibus lineis siue parallelis, siue non parallelis.

Vide apud nos in Apiar. 1, Prælib.2, Prop.2, corollar.4, & 5. habes cum figuris exempla, quæ nos deducimus, siue diducimus ex occasione geometricæ Araneæ.



§ II.

§. II.

SCHOLION II.

Indicati vsus prop. 2. pro inuentionibus linearum proportionaliam tertiæ, & quartæ, atq; etiam plurium in eàdem proportione.

IPsemet Euclides in propos. 11, & 12 vtitur hac 2 propos. ad inueniendas proportionales lineas tertiam, & 4. Ac nos etiam hac eàdem vtemur inferius ad plures lineas in eadem proportione continuandas: Quare si quis velit, potest hanc secundam condire vsibus earum propositionum, ac inuentionum, vt & nos Euclidi, & Euclides ipse sibi sit condimento. Ac paradoxum est (vt dicemus & ad 4, & ad 8 propos) doceri tacitè ab Euclide inuentiones linearū proportionalium (saltem tertiæ, & quartæ ex hac 2 propos.) antequam eas expressius doceat in propos. 11, 12, 13. Veruntamen modum illum plures continuandi lineas in eadem proportione satius duxi apponi suo loco, idest 12 propositioni. Vnde, si quis velit, potest eum huc transferre condimenti loco; ideo hìc saltem tantum indicaui.

§. III.

VSVS, & praxis

Propos. 2 Eucl. in dimensionibus longitudinum inaccessarum.

OMnes Geometræ passim vtuntur 4 propos. huius pro dimensionibus inaccessis longitudinum, latitudinum, altitudinum, profunditatum. &c. Nos hìc nouo modo ad eas dimen-

mensiones vtemur hac secunda propos. ac quidem facillimè sic. Inaccessum sit A, propter aliquam vallem, exempli gr. in interiacentem inter AB, AC, sitq; area BDEC in eminentiore colle. Fige hastā perpendicularem in B, & recede ita in D, vt linea visualis ab oculo in F iungat tria puncta F, G, A. Deinde a D recede per angulum lubitum vsq; ad E lubitam distantiam. Rursus ab oculo in H linea visualis iūgat H, L hastam alterā (perpendicularem in C) & A. Lateri AE (siue AD) parallelam BM educ ex B.

Signabis visibiles BD, EC lineas, & ipsam BM. Quoniam in triangulo DAE lateri AE ducta est parallela BM, erunt, per hanc 2 propos. Euclid. secta proportionaliter latera DA, DE in punctis B, & M, ergo vt DM ad DE mensurabiles, ac notæ, ita DB item nota ad BA ignotam distantiam notificatam per hanc 2 propos. Eucl.

Modus hic est desumptus a nostro Apiar. 2 Progy. 2 propos. 8 Vbi plura vide in coroll. 1 ex eà, & in Schol. ad eam. Vide ad hunc vsum etiam corollar. 2 § 3 ad propos. 9. inferius.

SCHOLION III.

In accessas profunditates, & altitudines metiri e 2 propos. huius.

IN citato Apiar. vide applicationem, & vsum huius 2 prop. Eucl. pro altitud. & profund. &c. in coroll. 2 citat. prop. 8.

§ 4.

§. IV.

SCHOLION IV.

Applicatio, & vſus indicatus eiuſdem 2 propoſ. Eucl. ad dimenſiones vmbrarum globi lunaris, & globi terreſtris.

VIde in cit. 2 Apiar. Coroll. 3. ex cit. propoſit. 8. ibi habes figuram, applicationem, demonſtrationem, & notationes pro exacta ex operatione Aſtronomica ex vſu 2 huius propoſ. Eucl.

Quæ quia ſupponit diametros ſolis, lunæ, terræ & eorum globorum diſtantias notas (quas res paulo inferius videbis apud nos in vſibus 4 prop. huius Eucl.) ideo nunc hic ſat eſto ſaltem indicare Tyronibus geometricis quàm altè etiam ad aſtronomica nos proueat hæc 2 prop. Eucl. Vide ſuo loco ad 4 prop vnde tibi demonſtretur id quod hic indicatur. Accipe hìc interim in ſequentibus Theorema apud noſtrum Villalpandum in to. 3 in Ezechielem, quod ſolutionem habet ab vſu 2 huius elementariæ propoſitionis, & cuius inſcriptio longior eſt, quam demonſtratio.

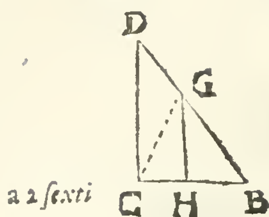
§. V.

THEOREMA I.

Si in triangulo rectangulo ex quolibet acutorũ angulorum interuallo lateris adiacentis arcus circuli deſcribatur ſecans baſim, & ex puncto ſectionis demittatur perpendicularis in latus prædictum, idem latus erit media proportionalis inter baſim trianguli, & ſegmentum lateris contentam inter perpendicularem, & angulum acutum.

F Sit

PROPOSITIO II.



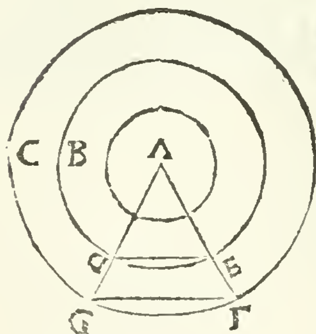
SIt triangulum rectangulum BCD, & centro B, interuallo BC descriptus sit arcus CG secans basim BD in G, ex quo demissa sit perpendicularis GH. Dico latus BC mediã esse proportionalem inter BD, BH. Cum enim GH sit parallela ipsi DC, [a] erit vt BD ad BG, hoc est ad BC, ita BC ad BH. Quod erat demonstrandum.

a 2 *sexti*

§. VI,

THEOREMA II.

In circulis concentricis rectæ lineæ à communi centro ductæ, quæ secant peripherias, proportionaliter à peripherijs secantur.



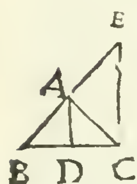
SInt concentrici BDE, CGF, &c. à communi centro A ductæ sint AF, AG secantes in punctis D, E, F, G: dico ipsas in ijsdem pũctis proportionaliter secari.

Iunctis enim DE, FG. Quoniam in triangulis ADE, AFG latera AD, AE, AF, AG ab eodem centro ad eandem circunferentiam sunt æqualia, per def. 15, erunt ea triangula isoscelia, & per 5.1. anguli ad bases erunt inter se equales. Est autem angulus ad A communis, & per corollarium primum 32 pr. tres anguli cuiuslibet trianguli simul sumpti æquales sunt tribus cuiusq; trianguli simul sumptis, ablato ergo communi A, remanebunt duo reliqui D, & E simul sumpti æquales duobus F, & G simul sumptis, per axiom. 2. ergo & dimidia erunt inter se æqualia, per axiom. 7, nempe angulus ADE ipsi AGF externus interno &c. ergo per 28. pr. rectæ DE, FG sunt parallelæ; ac proinde in triangulo AFG latera AF, AG secantur in D, & E (etiam a peripherijs) proportionaliter, iuxta hanc 2 hu. Quod erat demonstrandum. *Ap.* 1 *Pral.* 2.

Pto-

Propoſ. III. Theor. III.

Si trianguli angulus biſecetur, rectaq́; angulum ſecans ſecet & baſim, habebunt baſis partes eandem proportionem, quam reliqua trianguli latera. Et ſi baſis partes eandem habeant proportionem, quam reliqua trianguli latera, quæ à vertice ad baſim ducitur recta linea trianguli angulum biſecabit.



ESto triangulum ABC, & angulus BAC
biſecetur rectà AD. Dico eſſe vt BD
ad DC, ita BA ad AC. Ducatur CE per
C parallela DA, cui BA producta in E occur-
rat. Et quia in parallelas AD, EC recta AC
incidit, [a] erunt anguli ACE, CAD æquales, a propoſ. 29.1.
ſed CAD, BAD ponuntur æquales; [b] erunt ergo & BAD,
ACE æquales. Rurſus cum in parallelas AD, EC incidat b ax.1.
BE, [c] erit angulus externus BAD æqualis interno AEC; c propoſ. 29.1.
oſtenſus eſt autem & ACE ipſi BAD æqualis: [d] erit ergo d ax.1.
& ACE æqualis ipſi AEC; [e] vnde & latera AE, AC æqua- e prop.6.1.
lia erunt. Et quia trianguli BCE lateri EC ducta eſt pa-
rallela AD, [f] erit vt BD ad DC, ita BA ad AE; eſt autem f prop. 2.6.
AE ipſi AC æqualis: [g] eſt ergo vt BD ad DC, ita BA ad
AC. Sed eſto iam vt BD ad DC, ita BA ad AC, iunctaq́; g prop.7.5.
ſit AD. Dico angulum BAC biſecari rectà AD: iiſdem
enim constructis, cum ſit vt BD ad DC, ita BA ad AC:
[h] & vt BD, ad DC, ita BA ad AE (eſt enim lateri EC triã- h prop.2.6.
guli BCE ducta parallela AD) erit vt BA ad AC, ita BA
ad AE; [i] æqualis ergo eſt AC ipſi AE. [k] Quare & angulus i prop. 9.5.
AEC angulo ACE æqualis erit. [l] ſed AEC externo BAD K prop.6.1.
eſt æqualis; [m] & ACE alterno CAD; erit ergo & BAD æ-
qualis ipſi CAD: ergo BAC rectà AD biſecatur. Si ergo l prop. 9.1.
trianguli angulus, &c. Quod oportuit demonſtrare. m prop. 29.1.

§. I.

VSVS propos. 3, & Praxis —

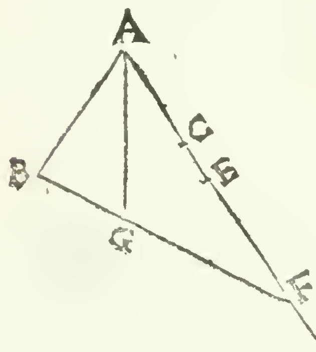
— Insueta diuidendi datum angulum in duos æquales.

1 VSus erit conuersæ, seu secundæ partis propositionis huius tertiæ in demonstrationibus Geometricis, si quando sit opus probare angulum aliquem in triãgulo esse diuisum in duas partes æquales. Si enim basis diuisæ partes ita inter se habeãt, vt inter se reliqua trianguli duo latera, erit angulus æqualiter bifariatus.

2 Præterea habes hic ad praxim modum in duo æqualia diuidendi angulum, diuersum à modo prop. 9 lib. 1. Iunctâ enim basi sub angulo dato, & cognitâ proportione (per instrumentum proportionum, vt docuimus) laterum, & secundum eam diuisâ base, à diuisione linea recta ad angulum educta cum bisecabit in æqualia.

Angulũ diuidere in duo æqualia aliter quã per 9. lib. 1.

3 Etiam sine inuestigatione proportionis, quam inter se habeant lineæ angulum conficientes, operabere in modum sequentem. Esto datus angulus rectilineus sub duabus BAC. alterutra AC producatur indefinitè ad F, atq; in ea sume proportionem alterius BA lubitam, puta duplam, acceptum interuallum AB ex A geminando in E, & ad F.

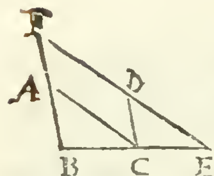


Iunge EF, & per aliquem modum è doctis ad propos. 9 lib 1 (præsertim § 3 ex vsu circini proportionum, vt & videbis inferius ad 9 propos. huius) ex B extremo lateris minoris accipe, ac seca in G partem BG tertiam totius BF, vt sit GF dupla ipsius GB quemadmodum AF duplum latus est ipsius AB; educta ex G recta ad angulum A, illum diuidet in duos æquales, per hanc 3.

Pro-

Propof. IV. Theor. IV.

Aequiangulorum triangulorum latera circa æquales angulos proportionalia ſunt; Et latera æqualibus angulis ſubtenſa, homologa, ſiue eiuſdem rationis.



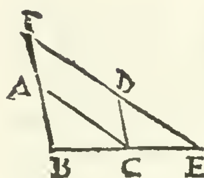
SInt triangula ABC, DCE æquiãgula æquales habentia angulos ABC, DCE, & ACB, DEC, & BAC, CDE. Dico latera circa æquales angulos eſſe proportionalia; & latera æqualibus angulis ſubtenſa, homologa. Componantur enim BC, CE in directum. Et cum anguli ABC, ACB duobus rectis minores ſint, ſit autẽ angulus DEC angulo ACB æqualis, erunt & ABC, DEC duobus rectis minores,[a] concurrent ergo BA, BD productæ. Concurrant in F; cumque anguli DCE, ABC æquales ſint,[b] erũt rectæ BF, CD parallelæ. Rurſus cum anguli ACB, DEC æquales ſint,[c] erunt & AC, FE parallelæ, ideoque FACD parallelogrammum eſt; [d] eritque FA æqualis ipſi CD, & AC ipſi FD; & cum ad latus FE trianguli FBE ducta ſit parallela AC,[e] erit vt BA ad AF; ita BC ad CE; eſt autem AF æqualis ipſi CD; vt[f] ergo BA ad CD, ita BC ad CE; &[g] permutando, vt AB ad BC; ita DC ad CE. Rurſus cum CD, BF parallelæ ſint,[h] erit vt BC ad CE ita FD ad DE. Eſt autem DF æqualis AC[i]. Vt ergo BC ad CE, ita AC ad ED,[k] ergo permutando, vt BC ad CA, ita CE ad ED. Cum ergo demonſtratum ſit eſſe vt AB ad BC, ita DC ad CE, vt verò BC ad CA, ita CE ad ED; erit ex[l] æquali vt BA ad AC, ita CD ad DE. Æquiangulorum ergo, &c. Quod oportuit demonſtrare.

a *def.* 11. 1.
b *propoſ.* 28. 1.
c *propoſ.* 28. 1.
d *propoſ.* 30. 1.
e *prop.* 2. 6.
f *prop.* 7. 5.
g *propoſ.* 16. 5.
h *prop.* 2. 6.
i *prop.* 7. 5.
k *propoſ.* 16. 5.
l *propoſ.* 22. 5.

§. I.

COROLLARIVM I.

In triangulo parallela vni laterum aufert triangulum simile.



LInea recta, quæ parallela ducitur vni laterum in triangulo, aufert triangulum toti triangulo simile. *Quod aliqui demonstrant in additâ noua figurâ iam demonstratum est, & patet in Eucli l. figurâ. Nam propter parallelas DC, FB cum sint æquales duo anguli CDE, FFD, & duo ECD, EBF externi internis, ac propterea æquiangula triangula BFF, CDE, ac propterea ex hac 4 habeant circa æquales angulos latera proportionalia, ergo, per definit. 1. huius, sunt similia, quorum minus ECD abstulit parallela CD. &c.*

§ II.

COROLLARIVM II.

Omnia triangula æquilatera, & isoscelia rectangula sunt similia, --

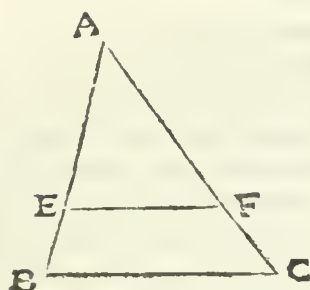
-- HOc est, iuxta defin. 1 huius lib. 6 *æquiangula sunt, & circa æquales angulos habent latera proportionalia, & latera æqualibus angulis obtensa habent homologa. Nam per demonstrata in lib. 1. æquilaterorum singuli anguli sunt duæ tertiæ vnius recti, & omnium isoscelium rectangulorum singuli anguli ad bases sunt semirecti, & ad vertices recti; ergo ex hac 4 propositione habent latera proportionalia &c. & homologa &c. & sunt similia.*

§. 3.

§.III.

COROLLARIVM III.

Dato triangulo minus, vel maius ſimile ſtatim conſtituere.

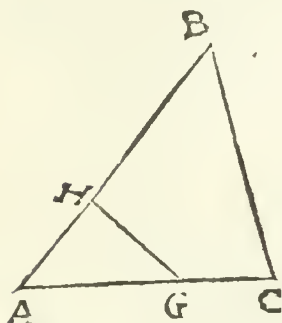


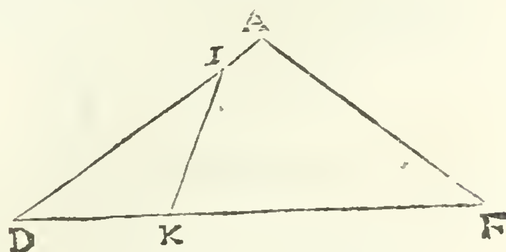
COnſtitues æquiangulum minus triangulũ maiori, nẽpe, vt dictũ eſt, per parallelam ductam vni laterũ maioris trianguli. Cõſtitues maius, productis lateribus minoris triãguli AE, AF, & iuncta BC parallela ipſi EF baſi minoris &c.

§. IV.

SCHOLION, & Paradoxum.

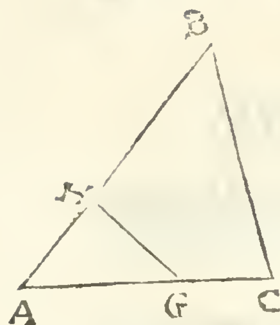
Etiam per non parallelam vni laterum trianguli auferre triangulum ſimile, &c.

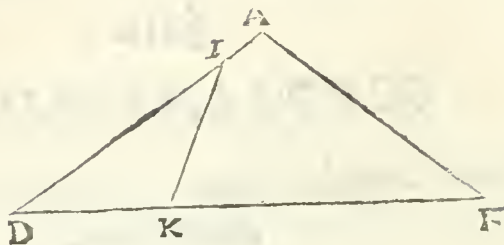




SCilicet ſi ab vno laterum ducatur recta faciens angulum in partiali triangulo æqualem vtrilibet angulo totalis trianguli poſito extra triangulum partiale, auferet ea recta triangulum partiale ſimile totali. In acutangulo enim ABC, & in obtuſangulo

gulo





gulo DAF rectæ GH, KI facietes altera angulum acutum AGH æqualem acuto ABC, altera angulum DKI æqualem obtuso DAF, auferunt triangula AGH æquiangulum ipsi ABC, & DKI æquiangulum ipsi DAF. nec sunt parallelæ HG basi BC, nec KI basi AF. Sunt verò anguli communes ad A, & æquales per constructionem AGH, ABC, ergo & reliqui AHG, ACB æquales. Sic ad D communes, & DKI æquales per constructionem ipsi DAF, ergo æquales & reliqui DIK, DAF.

Ergo similia sunt triangula AHG, ABC, item similia DIK, DAF, nec tamen facta sunt per ductum lineæ parallelæ vlli laterum sectiones triangulorum in positis hic fig. Vocantur subcontrariè positæ in conicis. Vide etiam inferius § 22 ad hanc 4 propos.

SCHOLION.

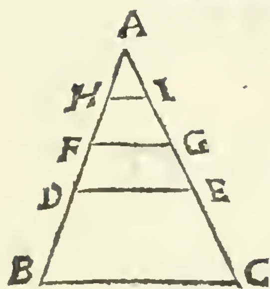
Etiam extra triangulum ducta parallela aufert, aut facit triangula similia. Inferius videbis exemplum in dimensione altitudinum per specula, vt ibi adnotauimus.

§.V.

COROLLARIVM IV.

Triangula in infinitum diuisibilia.

Exemplum esto in æquilatero, seu potius in isosceles, cuius duorũ æqualium laterum alterutrum sit maius base, ceu in ABC, cuius vel AB, vel AC maius est tertio, seu base BC. Cui parallelæ



lelæ DE, FG, HI abstulerint minora, ac minora triangula similia ipsi ABC, per corollarium primum antec. Inter verticem A, & parallelam HI aliæ ducentur infinitæ numero parallelæ (præsertim in abstractione geometrica purè, ac solidè philosophando) quarum singulæ auferent semper minora triangula similia; eaque ratione numquam finietur diuisio trianguli.

Nam si dicas opponendo, futurũ vt vna tandem earum parallelarum sit ita extrema, vt non relinquat quidquam superficiei triangularis diuisibilis inter eam parallelam, & inter verticem A, atq; adeo deueniri tandem ad extremum vnum, ac minimum triangulum indiuisibile.

Hoc, inquam, si dicas, ergo cũ in triangulo eo postremo, ac minimo intermediet nihil diuisibile inter basim, & reliqua duo latera constituentia verticem, siue angulum A, habebit basim, verbi gratia HI, coincidentem, & cõgruentem cum duobus lateribus, velut HA, AI; ergo, contra 20 propos. lib. 1, erit triangulum, cuius duo latera non sint reliquo longiora. Quod absurdum ne incidas, fateare necesse est numquam perueniri ad triangulum minimum indiuisibile, sed semper in infinitum fieri progressum ad minora triangula similia, quæ eo ipso, quod sunt triãgula, includunt, iuxta definitionem figuræ, quantitatem tribus lineis terminatam, ac diuisibilem. &c.

§. VI.

SCHOLION, & Corollarium V.

Etiam lineæ in infinitum diuisibiles.

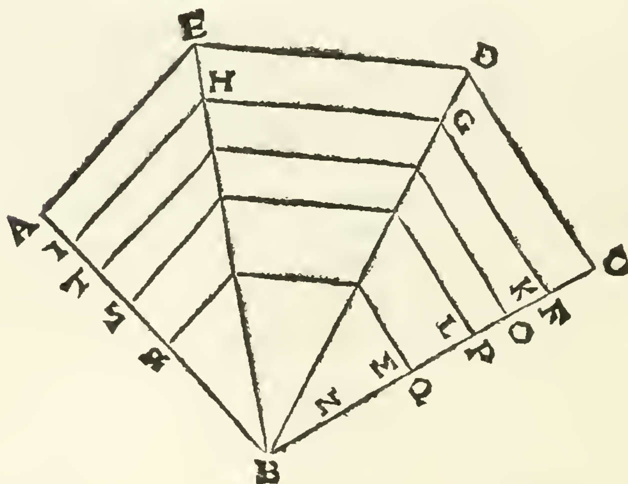
Consequitur huiusce Scholij corollariũ è proximè antecedenti corollario. Dum enim diuiditur per parallelas triangulum in infinita numero similia, etiam lineæ laterales trianguli diuisi diuiduntur in infinitum, velut AB, AC in diuisionibus D & E, F & G, H & I &c.

Vide & pro hac diuisibilitate quantitatis in infinitum §. 22 *ad* 10 *pro. hu. & inde alia exempla in fine eius* § 22 *citata.*

§.VII.

COROLLARIVM VI.

In omni rectilineo per parallelas fit ablatio, & constitutio similis rectilinei.



COrollarium primũ antecedens euadit ex particulari de triangulis vniuersale in hoc Corollario, dum saltem indicamus hic modum, quo auferas, vel constituas rectilineo, velut quinquangulo ABCDE simile minus IBFGH, vel minori maius, ducendo è duobus lateribus ABC angulum B conficientibus parallelas IHGF reliquis lateribus AEDC. &c. Ac demonstratio hic patet ex eodem anteced. coroll. 1. scilicet iunctis ex communi B rectis ad angulos, ac diuiso pentagono in tria triangula BAE, BED, BDC, in quibus auferunt similia minora triangula parallelæ basibus ipsæ IH,

IH, HG, GF; vel constituunt maiora similia rectæ maiores AE, ED, DC parallelæ minoribus IHGF. &c. Vide plura circa hoc corollariū apud nos inferius ad propos. 20, ad quam propriè spectant ea, quæ hic indicantur.

§. VIII.

SCHOLION I.

Circini proportionum demonstratio ex hac 4 propositione Euclid.

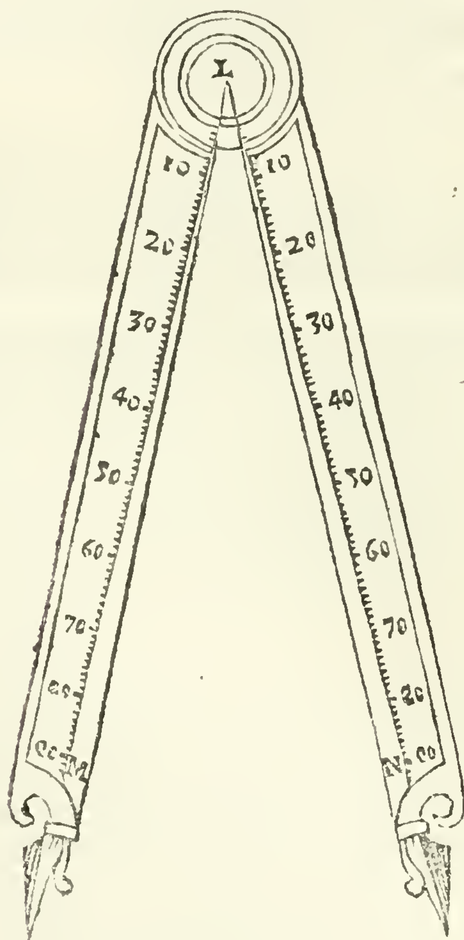
VIde in Apiar. 12, in Applicat. 17. ad propos. 4. lib 6. Elem. Demonstratio hic indicāda in exemplo diuisionis rectæ lineæ in 100 in partes æquales valebit etiam in diuisione per inæquales, scilicet per arcus quadrantis translato in rectas 90.

Itaq; quæcunque lineæ siue interualla interponantur inter diuisa circini latera, & inter similes numeros, erunt lineæ inter se parallelæ, ac minor maiori quasi basi trianguli æquidistabit, & quam habēt proportionem inter se diuisiones laterum, eandem habebunt & bases inter se. Fiunt enim triangula æquiangula, &c Verb. gr accepta longitudine datæ lineæ, & ad eius quantitatem diducto circino proportionum, ita vt lineæ datæ interuallū sit inter 100, & 100, quodcunq; aliud interuallum accipiatur inter similes numeros, ver. grat. inter 25, & 25, est linea parallela lineæ inter 100, & 100, per 2 propos. huius sexti; sunt enim latera 100, & 100 proportionaliter secta in 25, & 25; ergo æquiangula sunt triangula, ac similia minus, & maius in circino proportionū, per corol. 4 huius propos sexti. Vt ergo latus diuisum in 25 partes ad interuallum, siue lineam inter 25, & 25, sic latus 100 ad interuallum inter 100, & 100, & permutando vt 25 ad 100, sic linea inter 25, & 25 ad lineam inter 100, & 100. Est ergo linea inter 25, & 25 pars quarta lineæ inter 100, & 100, vt 25 est pars quarta ipsius 100.

§. IX.

SCHOLION II.

Theoriæ, atq; cautiones circa demonstrationem ex hac 4 prop. ac vsum circini proportionum pro eà facie, in quam chordæ 90 graduum quadrantis translatæ sunt.



ALiqui vel solas praxes (quæ sine demõstrationibus tutæ non sunt) circini proportionum docent, vel confundũt demonstrationem pro vsu tam rectarum, quam arcuum circularium; quæ in re magni momenti errata possunt accidere in Astronomicis, Gnomonicis, Geometricis, & in aliarum scientiarũ Mathematicarum operationibus. Itaque nos distinguamus, ac —

1 Dum in ea circini facie, in quam trãslatæ sunt chordæ graduum quadrãtis infertur geometricè ab hac 4 prop. LM vt (exẽpli

pli gratia) 30 ad 90, sic chorda inter 30, & 30 ad chordam inter 90, & 90, cautè intelligenda est illatio. Non enim eodem modo, vt in rectis, (quæ in alterà circini facie diuisæ sunt in 100 partes æquales) procedit & in chordis 90 graduum. Nec vt numeri chordarum, ita & ipsæ Chordæ inter se sunt. Neque enim vt 30 est tertia pars numeri 90, ita chorda inter 30, 30 est tertia pars chordæ inter 90, 90. Nã chorda subtendens arcum quadrantis graduum 90 diuisa est non per æqualia, sed proportionaliter ab alijs chordis, vt docuimus initio Apiar. 12, vbi chordas graduum traduximus in circinum proportionũ. Vide ibi. Itaq; dũ dicitur vt 30 ad 90, intellige: vt chorda subtendens arcum graduum 30 se habet ad chordam subtendentẽ arcum graduum 90, ita interuallum inter 30 ad inter 90; vt sit quodammodo proportionalitas non arithmetica numerorum, sed geometrica linearum.

2 *Quoniam verò chordæ inter eosdem numeros possunt subtendere vno eodemq; sui interuallo arcus varios, nẽpe maiorum, vel minorum circulorum magis, vel minus curuatos, si quis exempli gratia, velit accipere tertiam partem arcus subtensi à chorda inter 30, & 30, & accipiat interuallum inter 10, & 10, atq; inferat: vt 10 sunt tertia pars numeri 30, sic chorda inter 10, & 10 subtendit tertiam partem arcus inter 30, & 30, falli potest. Nam si arcus inter 30, & 30 sit pars peripheriæ circuli valde ampli, chorda inter 10 subtendere potest plũs tertia parte arcus; sin autẽ sit arcus circuli minusculi chorda inter 10 potest deficere & subtendere minus, quàm tertiam partem arcus inter 30, & 30. Potest enim chorda inter 30 esse diameter semicirculi, per cuius curuatiorem peripheriam triplicata chorda inter 10 non expleat ambitum semicirculi. Non enim vt in facie circini, in qua recta linea diuisa est in 100 partes, & rectę inter interualla numerorũ sunt determinatæ longitudinis, sic & curuæ circulares sunt; quæ pro varietate semidiametrorum variant curuitatem, & quantitatem vnà eademq; chorda subtensam. Igitur vt certa sit illatio demonstrationis confugiendum est ad aliquid certi etiam in circularibus lineis. Quid autem illud est? nempe id, quod modo indicaui, certa, & determinata semidiameter eius arcus, cui chorda subtenditur.*

3 *Quare ante omnia dati arcus semidiameter interponenda est inter numeros 60, & 60, ac tunc reliqua omnia interualla circini sic diducti erunt arcus eiusdem circuli, qui describitur à semidiametro inter 60, & habebunt ab ea semidiametro vnã eandem, ac certam curuaturam. Ac tunc erit demonstratiua, & certa illatio: vt 10 est chorda subtendens arcum, qui est tertia pars arcus subtensi à chorda 30 in cruribus circini, quorum arcuum semidiameter est chorda 60;*

sic

sic interuallum inter 10, & . 0 est chorda subtendens arcum, qui est tertia pars arcus subtensi ab interuallo inter 30, & 30, quorum arcuum semidiameter est interuallum inter 60, & 60.

4 *Ac sanè iucundum est animo concipere, atq; intueri theoricè quemadmodū singula (quæ varietate, ac numero infinitæ esse possunt) circini aperturæ singulas explicent series plurium arcuum eiusdem quadrantis à semidiametro inter 60 pendentium, siue signandorum, vel signatorum; quemadmodum in lateribus circini sua series est chordarum subtendentium arcus variorum graduum quadrantis vnius, cuius semidiameter est chorda à centro I ad 60.*

Igitur iuxta hìc antedictas theorias instituenda est, atq; intelligenda demonstratio ex hac 4 propos. Eucl. in chordis arcuum aliter, quàm in altera circini facie, vbi est recta linea in 100 partes diuisa.

§. X.

Paradoxum, & vsus 4 propos. & corollarij apud nos 1 ex ea, pro inuentione linearum tertiæ, & quartæ proportionalium in circino proportionum.

P*aradoxum erit (vt diximus in Scholio 2 ad proposit. 2. huius) si ostendamus ab Euclide doceri linearum proportionaliū inuentiones ex hac 4 propos. & corollario eius (quemadmodum & inferius ex Octaua, & eius Corollario) antequam eas doceat in propositionibus 11, 12, 13. Sit igitur —*

— *PROBLEMA I.*

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem inuenire in circino proportionum.

I*N facie circini, vbi est diuisio lineæ in 100 partes æquales, fiat praxis in modum sequentem :* Linea prior duarū, quibus tertia propor-

portionalis quæritur, sumatur à centro in latere circini, verbi gratia, vsque ad 50, secundæ lineæ longitudo interponatur iuter 50,& 50. Rursus longitudo, siue idem interuallum secundę sumatur a centro in latere circini, perueniatq; verbi gratia vsq; ad 54 ½. Ab eo termino sumptum interuallum, nempe inter 54 ½, & 54 ½, erit tertia proportionalis penè 59. Vt enim prima à centro ad 50 se habet ad secundam inter 50, & 50, ita èadem secunda è centro ad 54 ½ se habet ad interuallum inter 54 ½,& 54 ½, ex demonstratis per quartam huius lib. 6. Eucl.

§. XI.

PROBLEMA II.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem inuenire in circino proportionum.

PRimæ lineæ longitudinem in eodem exemplo pone à centro ad 50 in latere circini. Secundæ interuallum inter 50,& 50. Tertiæ longitudinem sume a centro in latere circini verb.gr. vsq; ad 60. Interuallum inter 60, & 60 erit quarta proportionalis, nempè 65 in latere numerata. &c.

SCHOLION III.

Dę inuentione mediæ proportionalis in circinō proportionum.

VIde eam apud nos in Apiar. 12. in applicat. 34, in num. 3. & in numero 4 sequenti. Vide ibidem abusum circini proportionum apud aliquos non solum pro inuentione mediæ proportionalis, sed etiam pro alijs aliquibus operationibus, quæ facilius, ac breuius fiunt sine vsu eius circini. Propterea nos

hic

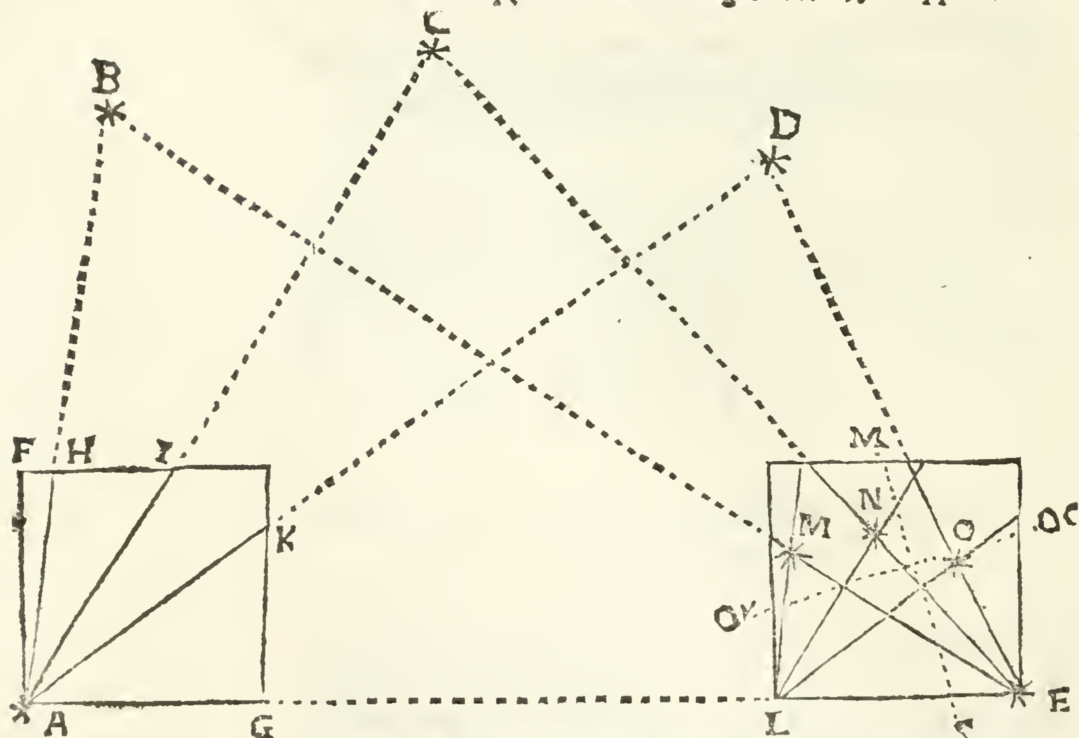
hic tantum indicamus, & hic omittimus id, quod præstitum habes in cit. Ap. 12.

§. XII.

PROBLEMA III.

Vsus 4 Propos. ad Chorographiam, id est pro descriptione peculiaris regionis, & inuentione veri situs locorum, & inter ea veræ distantię.

O*Missis varijs modis, quos præ cæteris Gemmafrisius tradit in libello de locorum descriptionibus, vnicum hic ego facillimum (cuius demonstratio pendet ex hac 4 propos. Eucl.) Tyronibus appono. Sint datæ regionis loca, siue oppida, velut*



quinq; A, B, C, D, E. Vnius, velut A, locum editiorem, seu turrim ascende, vnde reliqua quattuor oppida B, C, D, E facilè prospicias.

Ac-

Accipe tabulam edolatã, ac læuatam æquabiliter ipsam FG, eamq; horizonti secundum planam superficiem statue parallelam, iuxta modos, quos tradidimus in priore huius Ærarij tomo ad prop. 12, præsertim § 7. Fac latus vnum AG congruat cum linea visuali spectante ex A in certum aliquem locum editiorem oppidi alterius velut in E turrim, vel tectum, quo te mox tranducturus es. In tabellæ angulo A sit regula cum pinnulis fixè gyratilis. Iuxtà quam prospice in tria loca B, C, D, & lineas signato AH, AI, AK. Ex oppido A transfer te cum tabula FG in oppidi E locum à linea visuali antea notatum, tabulàq; horizonti parallelos collocatà, sit G in E, & latus EL congruat cum visuali ex E in A prospectante.

Regulam, quæ erat in angulo L, transfer in E, circa quod punctũ gyret, atq; ex E regulam dirige, ac secundum eam prospice rursus in loca B, C, D, ac nota in tabula linearum intersectiones M, N, O. Deniq; iuxta modos à nobis traditos in Apiar. 8, & 9, & alibi, in tabula duc lineam meridianam, atq; illi ad rectos alteram, vt habeas puncta mundanæ sphæræ cardinalia Merid. Septentr. Or. Occid. Quibus ritè peractis, habes in tabula descriptam regionem prorsus similem veræ, ac prototypæ, cum vero situ, verisq; distantijs oppidorum inter se. Suntq; vt oppida A, B, C, D, E sic in tabula inter se L, M, N, O, E.

Ac licebit scire distantias etiam inaccessas vel oppidorum inter se, vel ab illis ad te, modò vnam, puta AE, per quam te transtulisti, noris aliunde, ac si non aliunde, saltem per aliquem plurium modorum, quos tradidimus in Apiar. 2, & hìc inferius habebis ad hanc 4 propos. Eucl. Puta AE esse 8 stadiorum, siue vnius milliarij, vt scias quantum distet oppidum A à B, accipe interuallum rectæ LE, idq; interpone inter 8, & 8 in circino proportionum (vbi recta diuisa est in 100 partes æquales) diductisq; ad interuallum LE, ac perstantibus circini proportionum cruribus, accipe interuallum LM, ac vide quos inter numeros circini proportionum aptetur. Illi enim indicabunt quæsitam distantiam. Verbi gr. si inter 6, & 6, erit recta LM sex æqualium partium, qualium est 8 ipsa LE, hoc est, distabit oppidum B ab oppido A 6 stadijs, quorum 8 continet distantia AE. Taliq; ratione de reliquis distantijs oppidorum extra tabellam, cognoscendis in tabellà.

Demonstratio patet ex hac 4 propos. Eucl. Collocata enim est cũ suis lineis tabella parallelos ex AG in LE, ipsiq; AHB parallela est LM, ipsi AIC parallela LN, ipsi AKD parallela LO, & propter angulos communes ad E, & internos æquales externis, sunt triãgula

æquiangula ABE, LME, & ACE, LNE; & ADE, LOE. Vt ergo maiorum triangulorum bases, & latera inter se extra tabellam, sic minorũ inter se in tabella. &c. Indico quæ etiam in sequentibus ad hanc 4 propos. sæpius, & pluribus videbis. Interim habes hic à nobis modum facillimum, ac demonstratiuũ problematis, cuius sunt vsus plurimi tum pace, tum bello, in Geographiâ, Agricultura. &c.

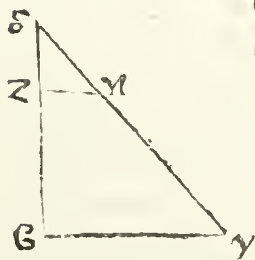
§. XIII.

Vsus prop. 4, & corollar. ex eâ in operationibus Geometriæ practicæ.

IN praxibus Geometriæ practicæ, atq; etiam in aliquibus Astronomicis vt plurimum fiũt æquiangula triangula, & similia per positionem alicuius bastæ, siue lateris organici paralleli obiecto, quod metiri volumus. &c. Exempla ad Euclidem ex Euclide dabimus, eaq; simplicissima sine operosis vllis instrumentis. Igitur Euclides in suis opticis sequentes habet propositiones.

PROBLEMA IV.

1 Datæ longitudinis quantitatem cognoscere.

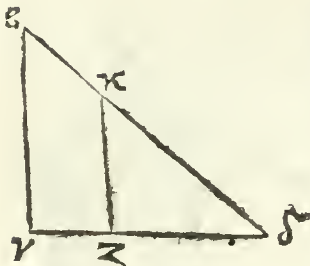


SIt βγ longitudo, cuius quantitas cognoscenda sit, ponaturq; oculus in δ à quo procedant radij δβ, δγ & à puncto ζ ducatur ζκ, quæ parallela sit ipsi βγ. Est igitur vt ζκ ad κδ, ita βγ ad γδ (per 29 primi, & 2, & 4 sexti Element.) sed ratio ipsius ζκ ad κδ cognoscitur, ergo etiam ratio ipsius βγ ad γδ cognoscitur. Sed ipsius γδ quantitas cognoscitur: Quare ipsius etiam βγ longitudinis quantitas cognoscetur.

§. XIV.

PROBLEMA V.

2 Datam altitudinem (*ex eius vmbra*) cognoſcere quanta ſit.



SIt altitudo $\beta\gamma$, cuius quantitatem cognoſcere oporteat, & per punctum β cadat ſolis radius $\beta\delta$, igitur vmbra erit $\gamma\delta$. Sume igitur magnitudinem aliquam cognitam, cuiuſmodi eſto $\kappa\zeta$, eamque ita aptato ſub angulum δ, vt ſit parallela ipſi $\beta\gamma$, Eſt itaque vt $\delta\gamma$ ad $\gamma\beta$, ita $\delta\zeta$ ad $\zeta\kappa$. Eſt autem cognita ratio ipſius $\delta\zeta$ ad $\zeta\kappa$, cognita ergo etiam erit ratio $\gamma\delta$ ad $\gamma\beta$. Sed $\delta\gamma$ vmbra cognita eſt; cognoſcetur ergo ipſa $\gamma\beta$ altitudo.

§. XV.

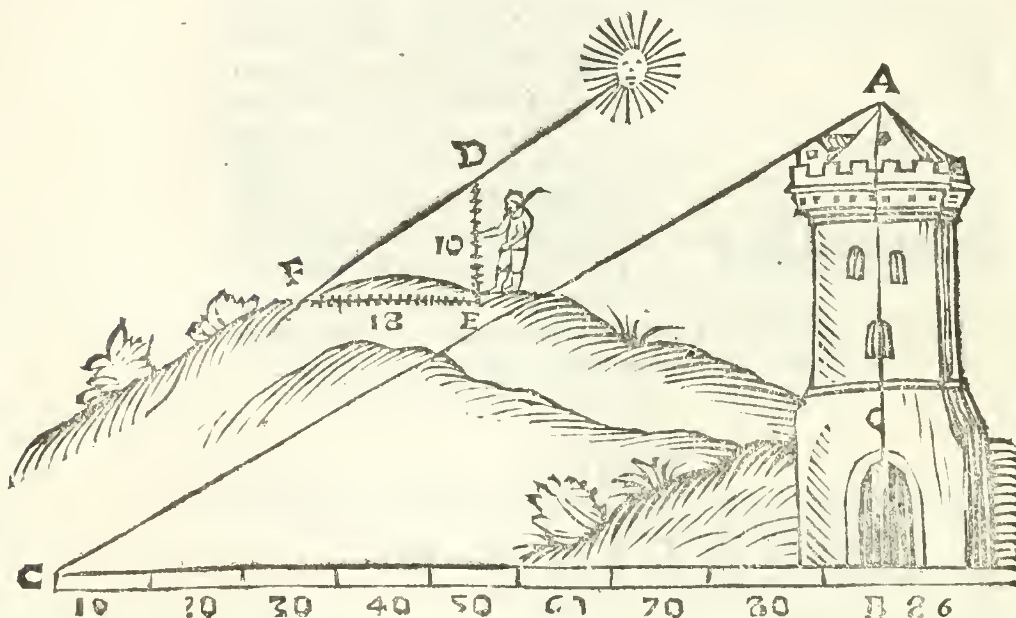
SCHOLION IV.

Ampliata Euclidis praxis, & ad militaria traducta. Vegetius, & alij veteres Authores explicati. &c.

ALtitudines, quas Euclides ex vmbris metitur, metiri licet, ac aſſolet, ſi oculum ſtatuas in δ, & radius viſualis procurrat per parallelam $\kappa\zeta$, $\beta\gamma$ vertices κ, β, eadem enim eſt ratio. Vide præterea nos in Apiar. 1. prolog. 3. ſub finem, vbi

mœniorum altitudines ex baculi, siue decempedæ vmbrà, cum Vegetio, metimur, vt scalarum quantitas haberi possit ad mœnia conscendenda, &c. Ibi plura, quæ Tyronibus condiãt, & ornent hìc Euclidem Vegetij verba sunt à Io. de Roias citata, & illustrata lib. 4. Planisphærij, cap. 4.

Cum Sol obliquus vmbram turrium, murorumq; iaculatur in terram, tunc ignorantibus aduersarijs, vmbræ illius spatium mensuratur, itaque decempeda figitur, & vmbra illius similiter mensuratur. Quo collecto numero, nemo dubitat ex vmbra decempedæ inueniri altitudinem ciuitatis, cùm sciatur quanta altitudo quantum vmbræ mittat in longum. *Hactenus Vegetius. Addit deinde Io. Roias.*



Iam vt Vegetij verba melius intelligantur, sit muri, turrisq; altitudo AB, eius vero vmbra BC, cuius mensura nota sit pedũ 86. Sitq; solis radius AC. Decempeda autem in 10 diuisa pedes, a quo etiam nomen accepit, DE, radiusq; solis DF, erit itaq; decempedæ vmbra FE, quam dimetiens pedum inueni 18. Quoniam igitur solis radij ab eadem in planiciem proijciuntur altitudine, angulum ACB angulo DFE æqualem esse necessario continget. Angulus autem ABC angulo DEF erit similiter æqualis, vtriq; enim recti supponũtur. Quare & anguli BAC, & EDF reliqui, per 32 pri. Euclidis, æquales erũt.

Cum

Cum igitur duorum triangulorum anguli sint inuicem æquales, eorum latera necessariò eandem habere proportionem, per 4 sexti Euclidis, probatur. Vnde sicut FE decempedæ vmbra se habet ad DE decempedam, sic CB turris quoq; vmbra se ad BA habebit turris altitudinem. Multiplicabimus itaq; 86 turris vmbram per decempedæ partes, prouenient 860. Productum rursus partiemur per 18 decempedæ vmbram, excutientur pedes 47 $\frac{7}{9}$, ignota scilicet turris altitudo. quod desiderabatur.

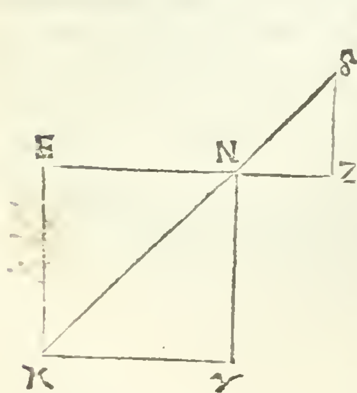
SCHOLION V.

IN aliquo diei momento facillima est operatio proximè antecedens, & sine prolixioribus operationibus ex vmbræ dimensæ quantitate nota fit etiam quantitas propositæ altitudinis. Nam vmbræ sunt æquales ipsis altitudinibus cum sol est in altitud. 45 grad. Vide nos in Apiar 1, prælib. 3. Tunc etiam fiunt à Gnomonibus æquiangula, & similia triangula cum alijs omnibus altitudinibus, &c. iuxta antecedentia.

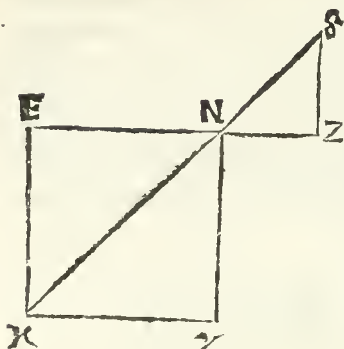
§. XVI.

PROBLEMA VI.

3 Cognoscere quanta sit profunditas quælibet.



SIt Eκ profunditas, cuius quantitatem cognoscere oporteat, ponaturq; oculus in δ, à quo procedat radius δNκ, in profundum, & a puncto δ ducatur δζ, quæ sit parallela ipsi Eκ. Cùm igitur in rectas lineas Eκ, & δζ parallelas recta linea δκ incidat, alternos angulos EκN, & Nδζ æquales inter se facit (per 29 primi Element.) Sunt vero anguli ENκ, & δNζ, qui circa verticē, inter se



se æquales (per 15. primi Element.) reliquus igitur angulus ad ζ reliquo qui ad E æqualis est (per 23 primi Element.) sunt igitur duo triangula æquiangula EκN, & Nδζ. Quare (per 4 sexti Elem.) erit vt ζN ad ζδ, sic EN ad Eκ. datur autem ratio ipsius ζN ad ζδ, dabitur ergo etiam ratio ipsius NE ad Eκ. datur verò quãtitas ipsius NE, ergo etiam dabitur quantitas ipsius E profunditatis.

§. XVII.

COROLLARIVM VII.

Quod est propugnatorium abstractionis, & philosophationis Geometricæ.

PRædicta ex Opticis Euclidis dum docent operationes, ac altitudines, longitudines, profunditates metiri, & spectant operationes etiam organicas, profectò problemata sunt tamen in græco Euclidis codice semper inscriptionẽ habent ΘΕΩΡΗΜΑ, *& altitudinem, longitudinem, &c. non metiri, sed cognoscere,* γνῶναι, *quia scilicet contemplationem abstractam ab operationibus physicis, dum philosophatur Geometra scientificus, spectat, & intendit; quidquid sit de effectu physico operationis organicæ, ad quem non se abijcit Theoricus, ac verè Philosophus. Hæc nota, & appone ad ea, quæ habes à nobis in vlt. cap. prolegom. to. 1. huius Aerarij, & ad 5 propos. lib. 1. Eucl.*

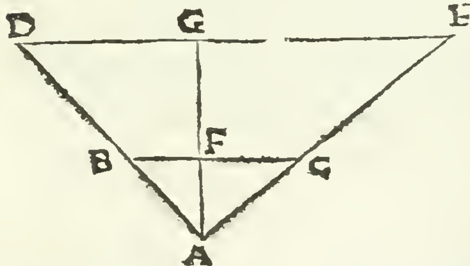
Idem Euclid. problema de vstione à sphærico speculo in centro, inscribit: θεώρημα, *vt appareat spectari veritatem theoricam, & abstractam geometricæ demõstrationis, non experimentum physicæ operationis, &c.*

§. XVIII.

PROBLEMA VII.

Latitudines obiectas dimetiri.

EVclides in Opticis altitudines, profunditates, lõgitudines per latera parallela, & æquiangula triangula, dimensus omisit latitudinum dimensionem. Quæ tamen facile ex hac 4 propos. & ab exemplis opticis Euclidis deduci poteſt. Exemplum accipe ab Aguillonio Optic. lib. 4. consectario 4 post propos. 24, quod ille addidit exemplis Euclidianis.



Eſto propoſita latitudo DE, aſpicientis verò oculus A, e cuius regione ſignum quoddam in propoſita latitudine notetur G. in hoc ſignum regula dirigatur AF, cui alia quædam regula adiungatur BC ipſi DE parallela, eeque loci firmetur, vnde ſuſceptos oculi radios AB, & AC in D, & E tranſmittat: ſit verò AF modulorum 10, BC autem modulorum 20, at AG per acceſſam terræ ſuperficiem reperta ſit modulorum 30. erit ergo per regulam proportionum latitudo propoſita modulorum 60. Quoniam enim BC ipſi DE conſtituta eſt parallela, erunt anguli ABC, & ADE, item ACB, & AED æquales. eſt vero angulus DAE vtrique triangulo BAC, & DAE communis; æquiangula ſunt igitur hæc ipſa triangula. ergo, per 4 ſexti Euclidis, vt AB ad AD, ita BC ad DE, ſed vt AB ad AD, ita quoq; eſt AF ad AG, per 2 ſexti Euclidis, Itaq; vt AF ad AG, ita eſt BC ad DE: & alternatim vt AF modulorum 10 ad BC modulorum 20, ita AG modulorũ 30 ad DE modulorum 60. quod erat demonſtrandum.

§.XIX.

SCHOLION VI.

Vindicatio Aguillonij,& confirmatio proximè ab eo præcedentis demonſtrationis indicata Tyronibus.

EN ſpecimen, in quo Tyrones hallucinari queant, & dubitando hærere, propter quod (& fortaſſe alia) cautè legendum quis Aguillonem cenſeat; non quaſi errantem, ſed more veterum doctiorum Geometricorum philoſophorum geometricè ratiocinãtem, tacitis aliquarum argumentationum modis, & ſolum ijs vſurpantiũ, qui non videantur eſſe in citatis elementarijs propoſitionibus, à quibus tamen dependent.

Ergo, per 4 ſexti Eucl. vt AB ad AD, ita BC ad DE *Scilicet, vt dictum eſt in antecedentibus à nobis in demonſtratione circini proportionum, ac vſuum ab eo §.8, & 9 ad hanc 4. Eucl. ex qua vt AB ad BC, ita AD ad DE, & permutando vt AB ad AD ita BC ad DE.*

Sed vt AB ad AC, ita quoq; eſt AF ad AG, per 2 ſexti Eucl. *Verè cautè legendæ demonſtrationes Geometricæ, in quibus vnius literulæ à typographo error redundare poſſit apud incautos cenſores in ipſum demonſtrationis Authorem. Itaq; typographi errorem hìc corrige, qui poſuit C pro D; ſitq; vt AB ad AD, &c. Per 2, vt AB ad BD, ita AF ad FG, ergo componendo contrariè (vide Schol. Clauij ad defin. 14, & ad propoſ. 18, lib. 5) vt AB ad AD, ita AF ad AG.*

Itaq; vt AF ad AG, ita eſt BC ad DE, *ſcilicet per 11 Quinti. Hìc ſiſtere poterat demonſtrationem Aguillonius; ſed maluit etiam, permutando, ordinem magnitudinum ſic inſtituere, atq; concludere: vt AF ad BC, ſic AG ad DE. Igitur geometricus doctor cautè legendus, ſed ex parte potius Lectoris, quam Authoris; ne ſcilicet qui parum geometricè inſtructus nõ ſtatim prouidet quę latẽt in doctis geometricis demonſtrationibus, ſuã hallucinationẽ alienæ impingat doctrinæ.*

Hæc appone ijs, quæ pro eodem Aguillonio à nobis habes in to. 1 huius Aerarij ad prop. 21, § 7.

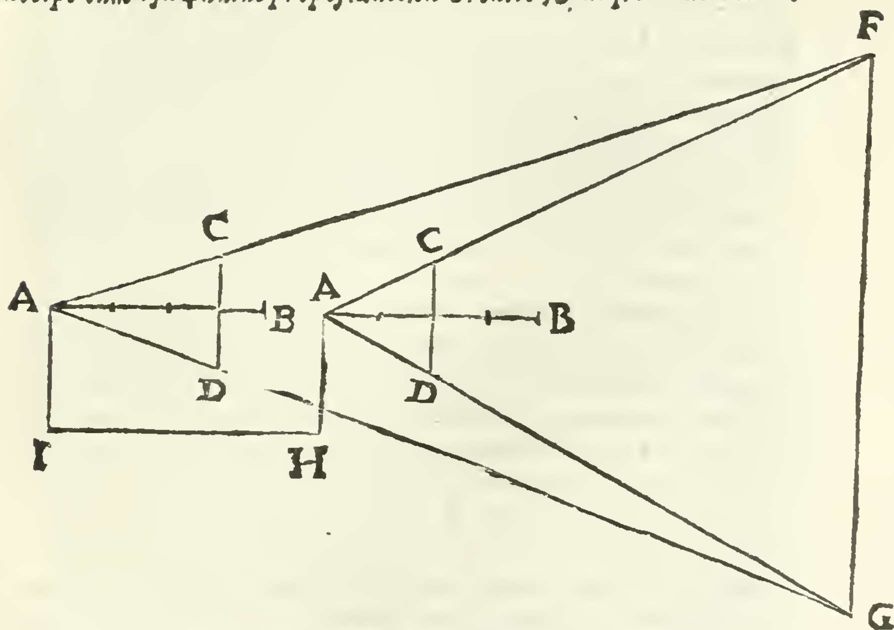
§.20.

§. XX.

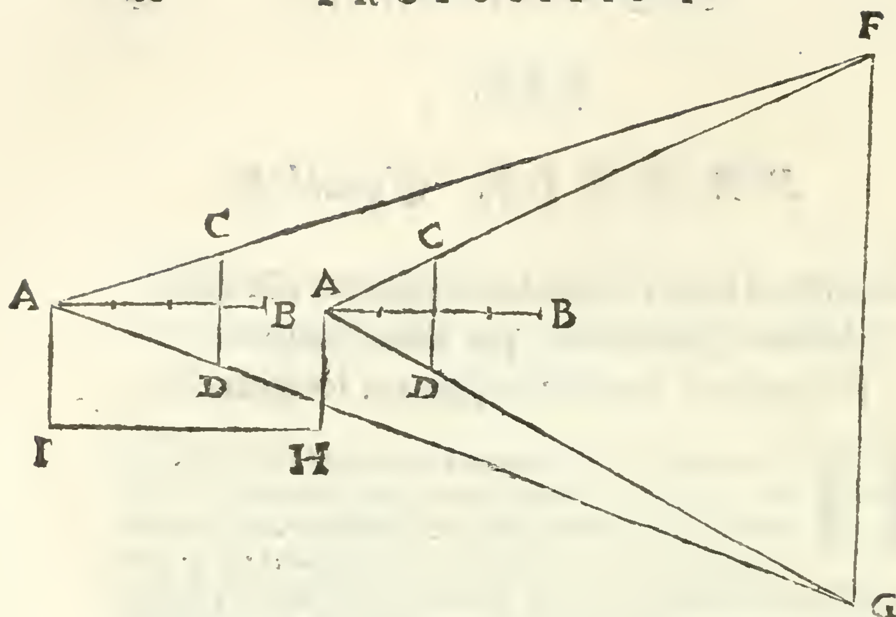
PRAXIS, & probl. 8.

De latitudinum etiam inacceſſarum, & altitudinum dimenſione per duas ſtationes, & per partem tantum cognitam longitudinis.

HVius propoſitionis luculentum ſpecimen habes in Ap. noſtro 2. Progym. 3. Propoſ. 1. & in ſcholijs ad eam, & in corollarijs ex ea Vide ibi plura. Paradoxum videtur dimetiri latitudines, aut altitudines, ſine acceſſu ad eas, & ſine dimenſione totius longitudinis (vt factum eſt circa AG in proximè antecedenti problemate) per quam ad eas acceditur. Tamen exemplum accipe cum vſu 4 huius propoſ. Eucl. ex Orontio, & atq; ex e us verbis.



Sit da ta inaceeſſibilis linea FG in tranſuerſum plani terreſtris c ollocata: hanc ſi per datum volueris metiri baculum, ita facito Moueto



baculum minorem CD super quā libuerit maioris baculi distinctionem, verb grat. super secundam ab A termino versus B, posito deinde oculo ad A,& depresso maiore baculo versus FG mensurandam lineam rectam, conuertas minoris baculi extrema ad ipsius metiendæ lineæ terminos, idest dextrum D ad dextrum G,& sinistrum C ad læuum F Accedas postmodum, vel tandiu retrocedas, donec per C, & D eiusdem baculi minoris extrema visualibus radijs ACF, & ADG vtrumq; metiendæ lineæ terminum simul comprehendas. Quo facto locum stationis pedum tuorum H notula signabis. Rursum eundem baculum minorem CD moueto in proximam distantiam baculi maioris, sed versus A, si cogaris ad metiendam lineam accedere;aut versus B,si ab eadem linea retrocedere velis,vt in succedenti descriptione figurarum, vbi inter A, & E tres sunt baculi partes. Et rursum oculo ad A posito, accede, vel retrocede quatenus præfatos terminos F, & G lineæ datæ per eadem extrema C, & D minoris baculi vnico pariter aspectu comprehendere possis. Quod dum feceris, huiusce stationis secundæ locum assignato I, verbi gratia,notula. Quantum igitur erit inter primam stationem,& secundam, idest inter HI notulas,tantam esse concludas positam lineam FG. Metire ergo HI, & habebitur ipsius FG longitudo. Hæc Orontius.

Vide apud nos in cit. Apiar. praxim, quam Orontius particularem docuit, factam vniuersalem. Vide ibidem eiusdem praxis demonstratio-

tionem, quam Orontius non affert, quā nos tamen Tyronum captui explicauimus, & confiruauimus. Hìc interim ad rem vides dimensionem fieri per minorum triangulorum latera CD parallela maioris trianguli basi FG, & per minora triangula æquiangula maiori.

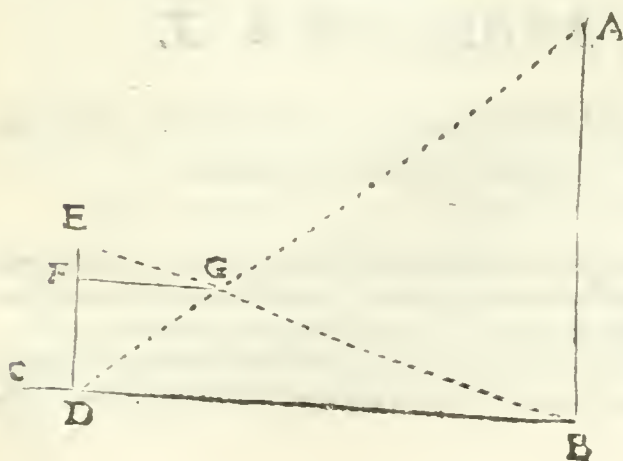
Si latitudinem FG horizonti parallelam, fingas eſſe perpendicularem, operatio èadem per duas stationes notam dabit perpendicularem altitudinem. Vide in citato Apiario.

§. XXI.

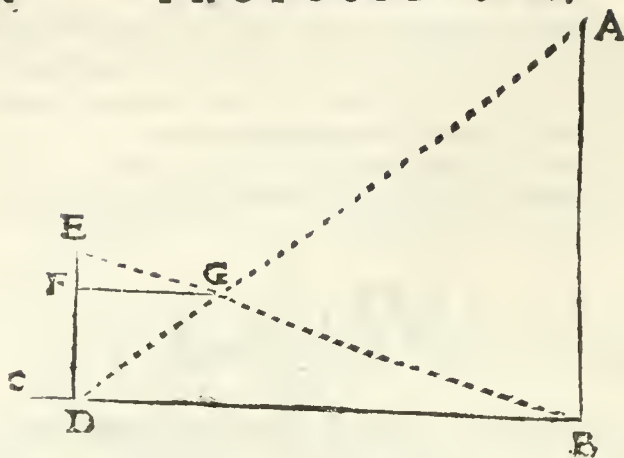
PARADOXVM, & Problema 9.

Inaccessas altitudines, & latitudines per inaccessas longitudines, & per vnicam mensoris stationem facillimè dimetiri.

HVius Geometrici paradoxi exemplum habes apud nos in Ap 2. in extrema propositione, vbi dimensiones per specula docemus. Si quando accidat propositam altitudinem, ver. gr. turris, esse in scopulo, & mensorem in littore, siue turrim in rupe inacceſſa, inter quam, & mensore m intersint vallis decliuia, & mensor vix tantillum planæ areæ habeat in colle, vnde turrim prospectat, nec illi liceat stationem mutare, accipe hìc quid agat immotus, vt innaccessum per inaccessum metiatur. Cuius quidem paradoxi à nobis propositi (etiam sine speculis) & facillimè soluendi nondum vidi apud alios exemplum.



Altitudo sit AB, areola CD. Constituat Geometra bacillos DE, FG ita decussatos ad angulos rectos in F, vt FG sit parallelus horizonti, DE perpendicu-



laris, ac parallelus altitudini AB. Oculus mẽsoris primò in E spectet per verticem G in B. Tunc vt EF ad FG, ita ED ad DB longitudinem, siue intercapedinem inaccessam, propter æquiangula EFG, EDB, &c. Secundo ponat oculum mensor in D, vel in alio puncto inter, D & G in rectà directà per artẽ ita, vt per G spectet verticem A. Agnosce, Tyro, duo triangula FDG, DBA, & angulos rectos ad B, & ad F, & cadente rectà visuali in parallelas FG, DB, anguli alterni FGD, GDB. sunt æquales, ergo & tertij FDG, DAB. Ergo vt GF ad FD, ita DB nuper cognita, ad BA. Igitur mensor in eàdem statione agnoscit primo inaccessam DB, deinde ex ea inaccessam secundam BA. Quod erat propositum, nec ab alijs, quos hactenus vidi, vsurpatum, & iucundum in Geometricà Philosophia paradoxum.

§.XXII.

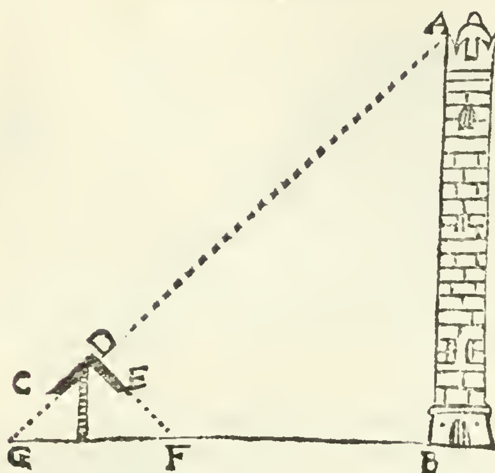
PROBLEMA X.

Altitudines turrium, &c. per normam subcõtrariè positam dimetiri.

E *Plurimis, præsertim apud nos in Apiarijs, aliqua selecta, & non passim vsitata proponam Tyronibus, cætera videant in Apiarijs. Nos igitur in Ap. 2. Prog. 3 Prop. 2, &c.*

Propositæ altitudinis AB verticẽ A spectato secũdum alterum normæ latus CD, & ex D secundum DE nota signum in F, Dico vt GD

ad



ad DF, sic esse GB ad BA altitudinem propositam, & ignotam. Nam æquiangula sunt triangula GDF, GBA, propter angulos D, & B rectos, G est cōmunis, &c. *Vide cit. Apiar.*

SCHOLION.

Quid sit normam subcontrariè ponere, & locutionis eius eoniea interpretationem habes in cit: Ap ibidem, & ex ea subcontrariatione metimur etiam latitudines, siue distantias inaccessas.

§. XXIII.

PROBLEMA XI.

Plana sub montibus latentia, & latentes montium perpendiculares altitudines per normam metiri.

Omitto alios modos, vnum atq; alterum appono ex Ap. 2 Prog. 2. Propos. 4, & 5.

B C D A G E F H

OPERATIO,

Protensà chordà ad A, & B, applica normæ latus alterũ ſecundum chordæ longitudinem ſic, vt cum ea vnam rectã conſtituat, tum oculo ad B appoſito deſpice in ſubiectum planum, & nota ſignum C, ex quo ad ipſam BD ſit, aut fiat planum CD parallelum plano EG. Tum mere latus BC. Quàm enim rationem habebit BC ad reliqua duo CD, DB, eamdem habebit chorda BH ad HF, & ad FB. Idem operare circa dorſum BG, vt totam HG, vel EG notam habeas.

DEMONSTRATIO.

QVoniam in triangulis HFB, & BDC anguli F, & D ſunt recti propter perpendiculares BF, & BD ad plana parallela EG, DC, & in triangulo minore DBC reliqui duo anguli DCB, CBD æquales ſunt vni recto; eſt autem & angulus normalis CBH rectus, ſi auferatur communis DBC, remanebunt æquales inter ſe HBD angulus trianguli maioris, & DCB angulus minoris. Ergo & reliqui duo DBC, & BHF erunt æquales. Quare ſunt æquiangula triangula HFB, BDC, &c. *Ex quibus conſtat demonſtratio operationis poſitæ in antecedenti problemate.*

§. XXIV.

PROBLEMA XII.

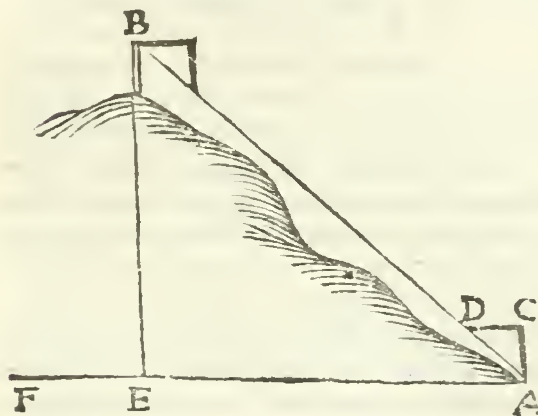
Montes aliter metiri per vnicam normæ applicationem.

Ope:

Operatio, ac Demonstratio.

ACcipe modum etiam hunc nō inuenuſtum, & facillimū, ex vnica normæ applicatione ad chordam, vt ſimul & diſtantiam plani horizontalis, & altitudinem perpendicularem montis conſequare, poſita cognitione, ſeu dimenſione chordæ. Vide in Ap.2, Prog.2, propoſ.3.

Ad protēſā chordam AB applicatà normà ACD vel ad partes A, vel ad partes B, quam proportionē habet DA ad DC, eandem habet BA ad AE, & quam eadem DA ad AC habet & AB ad BE. Demōſtratio patet; nā normæ latus AC perpendiculariter erectū ſupponitur, eſtq; parallelum ipſi perpendiculari BE, item CD parallelum ipſi AE; ergo cadens BA in parallelas CA, BE, CD, AE facit angulos alternos CAD, DBE, CDA, DAE æquales in duobus triāgulis ADC, ABE; reliqui verò duo ad CD, & ad E ſunt recti, &c. Quare in æquiangulis duobus triangulis erunt latera circa æquales angulos proportionalia. Idem operabere circa dorſum BF, vt totam AF aſſequare.

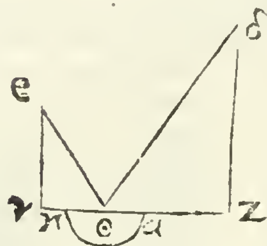


SCHOLION.

Pro praxibus antecedentibus.

VT chorda ſit ita protenſa inter extrema, vt conficiat rectā, & quam poſſit minimè curuam, habes remedium in citat. Ap.2, progym.2 propoſ.3, ſcilicet crebris palis ſuffulcire, ac intendere in rectam partes chordæ intermedias, &c. Illuc viſe.

§ XXV.
PROBLEMA XIII.
Cognoſcere quanta ſit altitudo alio modo, quã per Solem, ſcilicet per ſpeculum. &c.



SIt γε altitudo, cuius quantitatem veſtigare operæ pretium ſit, & ponatur ſpeculum κα, oculus autem ſit δ, à quo procedat radius δθ, & à puncto θ reflectatur verſus pũctum ε (quod eſt altitudinis extremum) ſecundum lineam θε, & à δ oculo demittatur perpendicularis δζ æquales igitur ſunt anguli εθγ, & δθζ. id enim oſtenſum eſt in primo theoremate Catoptricorum; angulus etiam, qui ad γ, æqualis eſt angulo qui ad ζ, ſunt .n. ambo recti. Reliquus igitur, qui ad ε, reliquo qui ad δ æqualis eſt (per 32. p. primi Element.) Quare triangulus εγθ ſimilis eſt triangulo δθζ (per 4. ſexti Element.) Eſt ergo vt θγ ad γε, ita θζ ad ζδ. Sed ratio ipſius θζ ad ζδ data, & cognita eſt, igitur ratio etiam ipſius γθ ad γε innoteſcet. Nota autem eſt quantitas ipſius γθ, ergo nota etiam erit quantitas ipſius altitudinis γε.

SCHOLION.

NOn ſolum cum parallela obiecto ducitur intra triangulum, vt hactenus vidiſti in anteced. problematibus, ſed etiam cum extra triãgulum, valet vſus corollarij 1 antepoſiti ex 4 huius. Exemplũ habes hic ab Opticis Euclidis, vbi per ſpeculum metitur altitudines per duo triangula extra ſe poſita, & habentia duo latera perpendicularia, ideſt parallela oppoſita.

SCHOLION.
Confirmatio, hypotheſis catoptricæ apud Euclidem pro dimenſione per ſpecula, ex hac 4 propoſ.

Reuiſe § 8 ad propoſ. 15. to. 1 huius Aerarij.

Vſus

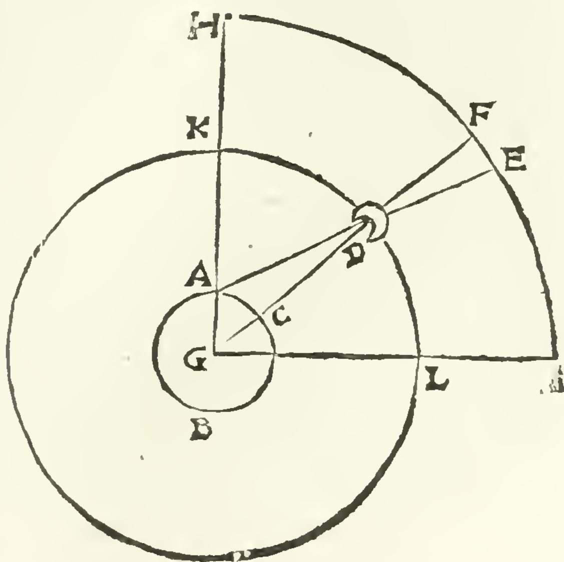
Vſus 4 Prop. pro præcipuis, & admirandis problematibus, & theorematibus Aſtronomicis.

§. XXVI.
PROBLEMA XIV.

Lunæ à terris diſtantiam agnoſcere per conſtructionẽ organicã trianguli geometrici ęquianguli triangulo parallactico Aſtronomico.

A Terrenis ad celeſtes dimenſiones aſcendamus. Hæc propoſ. 4 Euclid. fundamentum eſſe poteſt omnium Aſtronomicarum dimenſionum, quibus Aſtronomi globorum cæleſtium vel quantitates, vel diſtantias dimetiuntur. Vnicum pro cæteris omnibus exemplum afferamus circa Lunæ a terris diſtantiam, Qua pro re vide nos in noſtris Apiarijs in nono præſertim, Prog. 3, prop. 9. & prog. 6. propoſ. 4. num. 2. Vbi docemus triangulis parallacticis, & alijs, quæ fiunt per inſtrumenta in aſtronomicis aliquibus operationibus, æquiangula triangula geometrice conſtituere à notis duobus angulis, & vno latere, vel a notis duobus lateribus, & angulo ſub ijs. &c.

Igitur in appoſita figura oculus A in terre ſuperficie Lunam in D ſuſpicit per quadrantem, vel aliud inſtrumentũ aſtronomicum, per quod altitudines cæleſtium luminarium venari licet. Si à cẽtro terræ G fingas



K

radium visualem protendi ad eandem Lunam D, en tibi triangulum conficitur AGD. Pro cuius angulorũ cognitione sic operare. E tabulis calculatoriæ Astronomiæ notus fit verus Lunæ locus sub firmamento, & vera eius altitudo in F, quo radius visualis à centro G iret. Itaq; quantitas anguli AGF, siue AGD, nota fit ex gradibus inter HF.

H

K

F

E

D

A

C

G

L

B

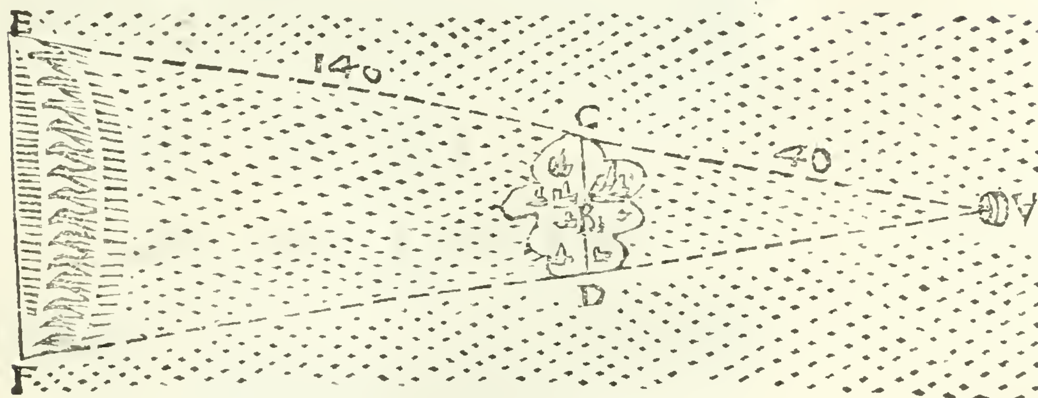
At vero altitudo apparens in E, quæ accidit oculo in A spectanti Lunam per quadrantis pinnulas; dat pro complemento arcum EH, quæ est quantitas anguli externi HAE, quà cognità cognoscitur etiã quantitas anguli deinceps interni GAD; nam ea est complementum duorum rectorum, qui fiunt ad A. Latus vero AG, terræ semidiameter, cognitum est apud alios, & apud nos in Apiar. 2. & inferius ad proposit. 8, & 13 vbi terræ diametrum, ac dimensionem docemus. Igitur trianguli AGD notis angulis AGD, DAG, fiant per modos a nobis traditos ad propos. 23. lib. 1. Euclid. æquales duo ad datam lineam, & tertio etiam D æqualis erit tertius angulus in designato geometricè triangulo Ac duo triangula astronomicum AGD, & geometricum, in pagella (vel organicè constructum in tabella per instrumentum, de quo nos ad propos. 23. Eucl. lib. 1) erunt æquiangula. Quoties igitur (finge figuram esse ritè designatum) latus AG continebitur in AD, totidem erunt semidiametri terræ in distantia Lunæ à terra. Plura vide apud nos in cit. Apiar.

§. XXVII.

PROBLEMA XV.

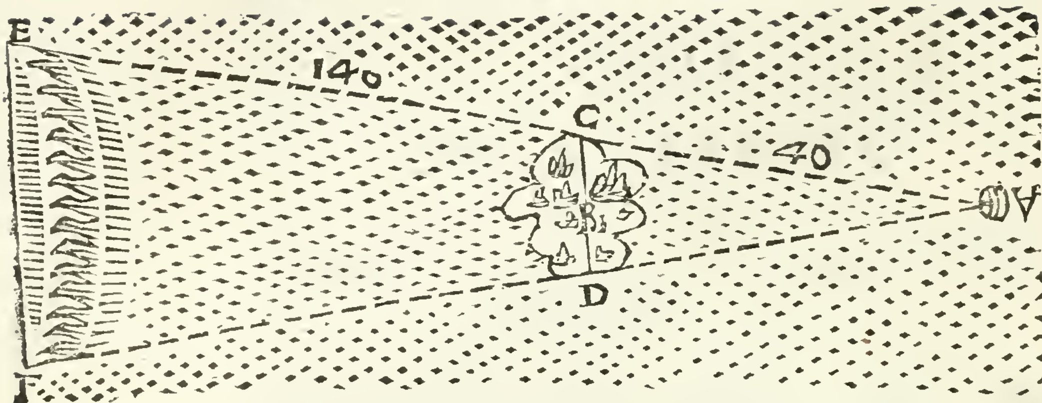
Solaris diametri magnitudinem semigeometricè coniectari.

Cleomedes in suis metheoris coniecturam geometricè physicam affert, qua Tyro non præcisè quidem (præcisiora inferius dabimus ad hanc 4 propos. Eucl.) sed tamen aptè possit philosophari geometricè ad concipiendam animo solaris diametri amplitudinem. In Oceani vasta, & tranquilla vndarum planitie esto



oculus A, cui procul, ac sub finibus horizontis obijciatur insula B. Accidit aliquando, Sole post insulam oriente, apparere extra insulæ latera extrema C, D solaris globi radios aa E, & F, & in oculum A incidere. Geometricè, iuxta 4 hanc propos. & eius corollarium sic philosophare, o Tyro: Radij siue visuales ab A, siue solares ab E, F constituunt duo triangula, quorum basis minor est insulæ B diameter CD, maior solaris diameter EF, atq; inter se parallelæ. Puta distantiam ab A ad B esse maximi horizontis circiter milliaria 40, insulæ verò diametrũ finge protendi circiter 20 milliarijs. Quantum distantiæ fingis ab oculo ad solem? Si fingis minimum triplam ipsius AC, erit 120 millia-

 rio-



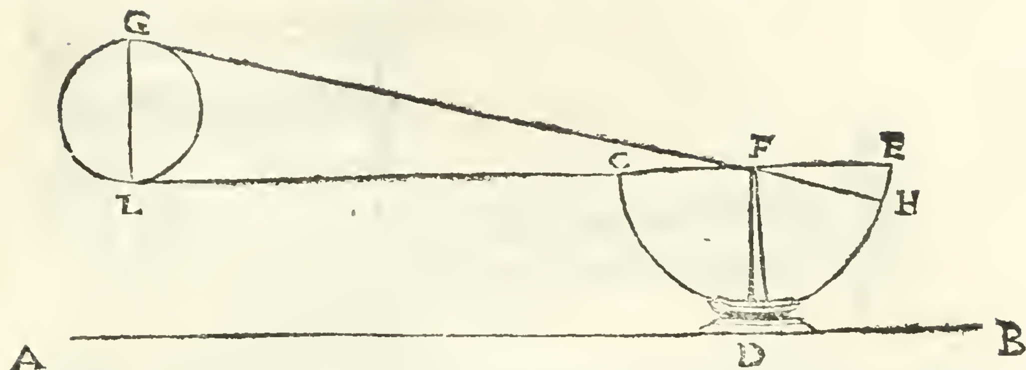
riorum. Igitur vt AC 40 ad CD 30, ita AE 120 ad EF, quæ, iuxta regulas proportionum, erit milliariorum 90. At verò cùm distantia ab oculo ad Solem quodammodo infinities maior sit, quàm AE, vides, productâ AE longissime, necesse esse amplissimam basim solaris diametri. Sic nos docet philosophari hæc 4. prop. Eucl. in verè metheoris, ac sublimibus. Sed mox ad præcisiora.

§. XXVIII.

PROBLEMA XVI.

Solis magnitudinem per scaphia è 4 prop. Eucl. facillime cognoscere.

V*Ide nos in Apiar. 8. Prog. 3. propos. 8. vbi plura, quorum hic tantum aliqua. Vas hemisphæricum concauum, quod scaphium appellant, CDE collocetur in aperto plano, vbi primos orientis Solis radios excipere possit. Sitq; horizonti parallelum latus CE. Cum primum sol (puta à mari) oritur, vmbrà e styli, siue semidiametri vertice F proijcitur in latus ED, ac statim emerserit totus globus solaris GL, notetur vmbræ terminus in H. Quasi esset (nihil refert ad sensum, vt demonstrauimus in initio Apiary 9 nostri Gnomonici) F in terræ cētro, & orbis CDE esset cōcentricus orbi*



orbi cæli solaris, est latus DE parallelum cœlo vbi sol suam habet diametrum. Itaq; duo æquiangula sunt triangula, propter æquales angulos ad verticem F, & angulos æquales ad bases parallelas EH, GL, in quas cadunt rectæ GH, LE. Ergo vt FH ad HE, ita FL distantia Solis a terris ad eiusdem solis diametrum GL. Quoties igitur pars ipsius alterutrius vel GF, vel FE est ipsa EH, erit & toties GL in LF. At quanta est LF? Mox docebo in seq. probl. vnde etiam in numeris Solis distantiam, & diametrum docebimus, eadem terentes vestigia prop huius 4. Eucl.

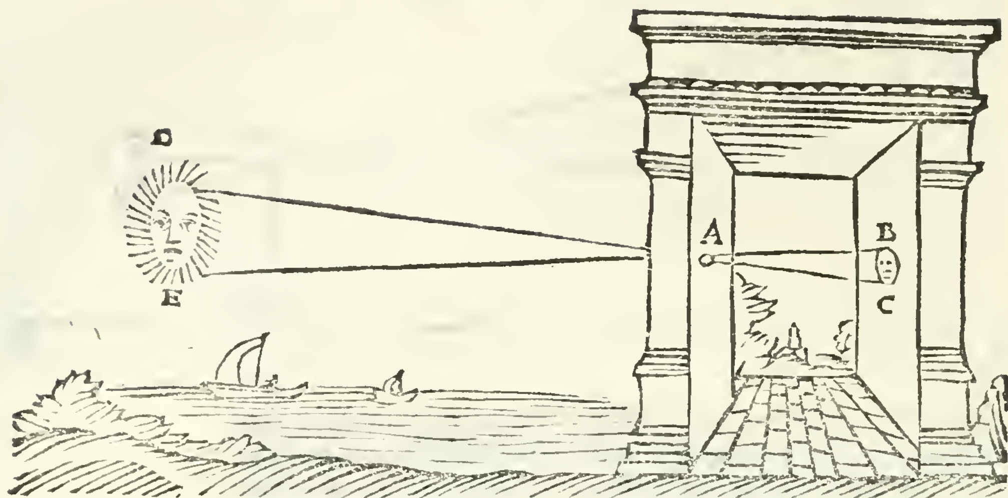
§. XXIX.

PROBLEMA XVII.

Solis a terra distantiam metiri è radijs per fenestræ foramen traiectis ope prop. 4. Eucl.

QVemadmodum solis diameter accepta per Scaphia in antecedenti propositione, supponit cognitam Solis a terrà distantiã, ità distantia hìc accipienda supponit Solis notam diametrum. Ergone circulo ludemus? Minimè verò. Nam solis diameter, quam in hac propositione supponimus, ea præcisius accepta supponitur per alios modos extra scaphia, quos vide in Apiar nostro 8 Astronomico Prog. 3. proposit. 11. In eodem Progym. propositio 10 est quam hìc paucis expediemus. Vide plura ibi.

Ra-



Radiosus conus ABC accipiatur (vt Apollonius in conicis) pro triangulo, cui ad verticem, vbi foramen A, alterum triangulum ADE (habens pro base solarem diametrum) æquiangulum est eodem modo, quo nuper in scaphio; si tamen planum CB parallelum constituatur solari disco DE, iuxta modum, quem tradimus in Schol. 5 ad 10 prop. cit. prog. 2. Ap. 8. Igitur vt BC, ad CA, ita ED ad DA. At BC, CA quantitates sciri facilè possunt, & ED Solis diameter per modos propos. 1. cit. Apiar nota est, ergo & distantia DA nota fiet.

Affirmatur in Apiar. 8 proposit. 10 tempore Aequinoctij verni, dum Sol est in mediocri a terris distantia, aliquando compertum esse basim, siue diametrū BC centies, & quater ferè contineri in CA, siue BA; ergo & Solis diameter DE continebitur centies, & quater in EA, vel DA. At Solis diameter, iuxta recentiores Astronomos, continet vndecim semidiametros terræ, ergo media, siue mediocris distantia Solis à terra, DA, vel EA erit 1144 semidiametri terræ, quæ ad stadia redacta dat 44 844 228 quadraginta quatuor milliones, octingenta quadraginta quatuor millia ducenta vicena octona stadiorum. Vide plura, & præcisiora in cit. prop. 10 Apiar. 8. & hic in seq. Schol.



§. XXX.

SCHOLIA

De cautionibus, & firmamentis præcedentium dimensionum per Scaphia, & radios è fenestræ foramine.

1 *IN Apiar. 2 nostro Prog. 3. prop. 7 inuenimus per modũ ibi nostrum terræ diametrum 78399 stadiorũ, quæ dimidiata dabit terræ semidiametrum pro mensuris diametri solaris, & solaris a terra distantiæ.*

2 *Eodem modo licebit, & summam, & minimam distantiam solis a terra, cum in alterutro solstitio est vel apogæus, vel perigæus, dimetiri.*

3 *Circa vsum scaphij, quem dedimus, vide plura in cit Apiar. 8 tum ex Macrobio, tum à nobis spectantia ad cautiones, vt recta fiat operatio.*

4 *Pariter ibidem modum per fenestræ foramen cognoscendi Solis à terrà distantiam. &c. in Scholijs ad 10 propos. ad exactionem redegimus, qualem laudatissimæ Veterum dioptræ habuerunt; immo & exactius, quàm Antiqui, eam ibi operationem peregimus; scilicet ob maius radiosum nostrum triangulum intra conclaue, Ibi vide.*

§. XXXI.

COROLLARIVM VIII.

De rerum extra positarum quantitate metiẽda e simulacris intra obscurum cubiculum per foramen fonestræ traiectis. &c.

IN citat. Apiar. 8. vide corollarium propos. 10, citatæ, vbi per similia triãgula ostendimus modum, quo quis possit intra obscurum cubiculum positu scire magnitudinem hominum per extra positas vias, vel plateas prætereuntium, dum illi claro aere, vel solis lumine perfusi projiciunt per fenestræ angustum foramen sui simulacra. Vide ibi figuram, in qua, velut ad verticem styli in scaphijs, ad foramen fenestræ copulantur duo triangula similia, & quã habet rationem distantia a foramine ad obiecta extra posita eandem habet distantia ab eodem foramine ad tabellam intra cubiculum, quà tabellà excipiuntur simulacra. Vide ibi.

§.XXXII.

SCHOLION VII.

Astronomica plura alia problemata e 4 propos. Euclid.

VMbras terræ, ac Lunæ, Lunarium montium (si qui sint) altitudines, & alia plura per æquiangula, & similia triangula facillimè metimur in nostris Apiarijs. Vide modos, & figuras in Apiar. 2, Prog. 2, in corollar. 3, & Schol. 1. ad propos. 8. Apiar. 8. Prog. 3 propos. 11, corol. 1, 2, & Schol. 1. in eod. Ap. 8. Prog. 6. prop. 4. & corollar. & prop. 9. &c. E quibus locis licet tibi Euclidem ditare. Nos hìc finem facimus infiniti vsus huius prop. 4. & corollariorum ex ea apud nos. Alij alia, si habent, & meiora.

§.XXXIII.
SHOLION, & Corollarium

In quibus è 4 prop. &c. indicatur theorice pręcipuorum mensoriorum instrumentorum Geometricorum, & Astronomicorum.

Quæ

Quadrata, Quadrantes, Anuli, siue Armillæ, Astrolabia, Dioptræ, Radij, & alia instrumenta, quibus vel Geometræ, vel Astronomi vtūtur in admirandis suis operationibus ad vniuersi demensiones, vim habent, ac demonstrationem ab hac 4 prop. Eucl. Omnia enim per parallelas siue rectas, siue circulares, & per æquiangulas, & proportionales figuras operantur. Cæteris omissis, radium famosissimum, & antiquissimum Geometricum (cuius vestigium habes in dimensione in antecedentib in §. 20. traditâ ex Orontio ad latitudines, &c.) & Astronomicum (de quo copiosè, ac doctè Gemmafrisius librum perscripsit) inspice, atq; in eo videbis organicè exhibitam 4. propos. huius Eucl. Ex quâ habes modum circa ea omnia instrumenta geometricè philosophandi, èademq; vel corrigendi, ve amplificandi, vel noua inueniendi, ac denique, vt decet Philosophum sciendi quid, & de quo agas cum ijs instrumentis vtèris, vt è scientiæ potius, quam operationum merito ijs adnumereris qui —

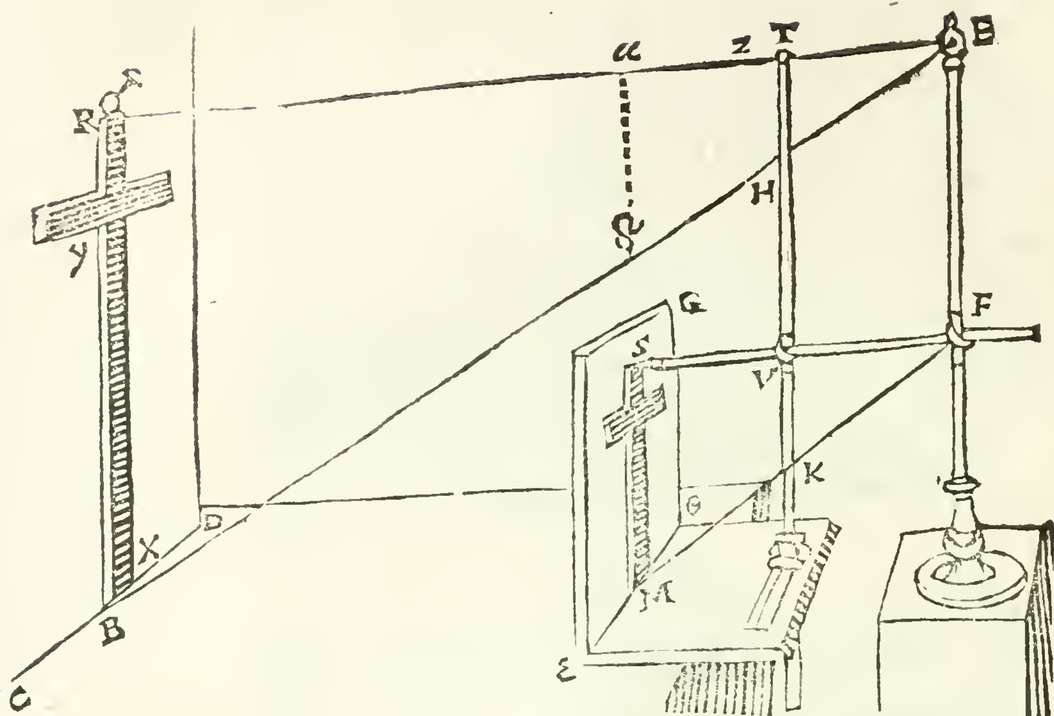
— Admouere oculis distantia sydera nostris,
Aetheraq; ingenio supposuere suo. *Ouid.*

§. XXXIV.

PROBLEMA XVIII.

Scientificam picturam e Philosophia Optica exercere ope prop. 4, & corollarij apud nos primi ex eà.

IN Apiar. 5 nostro, in parte 2 Progymnatis 2, à cap. 3 vsque ad 10, habes a nobis constructiones, vsus, demonstrationes instrumenti nostri scenographici, quo pictura scientifica exercetur, & obiecta procul posita designantur in tabella obiectis parallela per æquiangula, & similia vel triangula, vel polygona. Omissis operosioribus, & perfectioribus figuris in citato 5 Ap. hic aspice hāc vnā, in qua apparet similē prototypo imaginē in minori tabella designare nihil aliud esse, quàm conum, siue pyramidem visualem, v. g. EBRT intercidi parallellæ basi à tabella pictoria, quæ v. g in FMSV auferat pyramidem minorem EBRT æquiangulam, & similem maiori,



iuxta coroilarium apud nos ex propos. 4. Euclid. Quod vero imaginariè fieret per sectionem in αδ parallelam ipsi RB, fit in inferiori tabella ε G dum oculus in E libere spectat singulas partes crucis maioris. Demonstrationes, & plura huc spectantia ad praxim, & theoricen mirifici huius vsus ex 4 hac prop. Eucl. vide in cit. Ap. 3. Hic tantùm tam diuitis fluenti Euclidianum fontem indico. Vide id nostrum scenographicum instrumentum perfectum in cap. 6. cit. Apiar. prog. 2.

§. XXXV.

SCHOLION VIII.

Visionis intra oculum arcana prodita ex 4 prop.

Hoc

Hoc arcanum habes apud nos in Apiar.6 Prog.3. cap.2. Hic tantùm innuo, vt videas hanc Eucl. prop. 4. non solum cœlũ, & terras, sed etiã ipsos animaliũ oculos penetrare, atq; in ijs perfectã visionem exercere. Quæ fit per similia triangula, quorum alterum maius basim habet extrinsecus in obiecto, alterum minus intra oculum basim habet in retina sub qua basi repræsentantur imaginatiuæ, atq; æstimatiuæ virtuti obiectum, & eius partes in proportionibus perfectissimis minorum ad maiora, velut in naturæ arcana quadam pictura. Habetq; retina vim mouendi, ac fingendi se in omnia genera basium, quæ sint parallelæ, & figuris persimiles figurationibus obiectorum externorum.

Ac quamuis non vna fiat decussatio radiorum, siue specierum repræsentabilium ab obiectis, & variè per oculi humores refringantur, vnde videri possit non fieri perfectam angulorum opticorum ad verticem æqualitatem, nec esse omnimodam triangulorum intra oculum similitudinem, tamen id miro naturæ consilio efficitur, vt obiectorum vera mensura, & quantitas repræsentetur, quæ verà minor appareret (propter geometricas rationes in eo cap.2 citato) nisi corrigeretur per eas refractionum dilatationes. &c. vt expressius hæc omnia habes in rationibus, demonstr tionibus, & figuris in cap. cit. Ap.6. Satis hic nunc esto tantùm indicare vnde ornamenta possis adducere ad hanc propos.4. Euclid. spectantia. Tu illa in nostris Apiarijs visito, & hic exponito.

§. XXXVI.

SCHOLION IX.

Fallacia sunt optica experimenta in oculo cadaueraceo, (hoc est animalis mortui) etiam conglaciato, vel in oculo viuo, sed morboso, idest male affecto ab aliqua corporis ægritudine.

Vide nos in Ap.6. Progym.3, præsertim cap.3.

Qua etiam ex causà nostra problemata Astronomica in Apiar.8 nos vt plurimum soluimus, non tam ex opticis instrumentis, in quibus oculi arcana interiora immiscent

suas fallacias, quàm è sciotericis, qualia veterum prudentiorum, atque Antistitum Astronomorum scaphia, dioptræ radios solares admittentes, cælestium luminarium eclypses, vel aspectus inter se geometricis figuris expressi, ac demonstrati. &c.

Iuuat hîc postremo loco addere theoremata aliqua selecta, quæ demonstrantur ex hac 4 propos, præsertim à Villalpando nostro.

§. XXXVII.

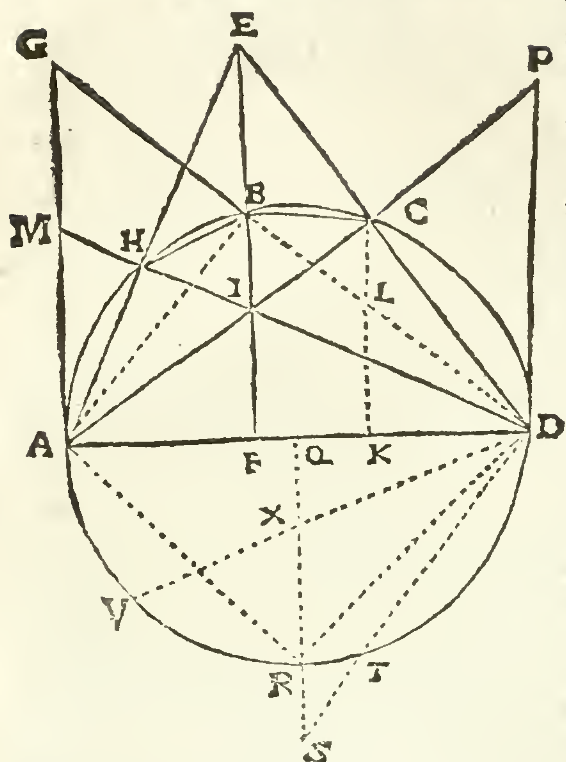
THEOREMA I.

Recta in semicirculo a quolibet puncto diametri ad ipsam diametrum perpendiculari, & ab vno terminorum eiusdem diametri ductis pluribus lineis, quæ secent circumferentiam, & perpendicularem, siue intra, siue extra semicirculum: illa linea quæ transit per intersectionem perpēdicularis cum circumferentia, est media proportionalis inter illam cuiusuis alterius lineæ partem, quæ continetur inter terminum diametri, & circumferentiam, & illam quæ intercipitur inter eundem terminum, & perpendicularem.

HVius theorematis nobis plurimus erit vsus in sequentibus ad hunc librum sextum.

A quouis puncto F, diametri AD, semicirculi ABCD, erigatur perpendicularis FB, & a termino D ducantur plures lineę, vna ad punctū B qualis est DB, reliquæ vtcunq; quales sunt DH, DE secantes circumferentiam in H, C, & perpendicularem in E. Dico rectam BD esse mediā proportionalem tum inter rectas HD, DI, tum inter rectas ED, DC. Iungatur AB, & nectantur HB, BC.

Quo-



Quoniã igitur duo anguli DHB, DAB, sunt in eodem segmẽto DTAB, ipsi erunt inter se æquales (vide Schol. 2 post hoc theorema) sed eidem angulo DAB æqualis est angulus DBF, eo quod in triangulo rectangulo ABD in semicirculo angulus ABD est b rectus, & in triãgulo BFD, propter erectã in cõstructione perpendicularem FB, angulus BFD est rectus, & angulus BDA vtrique triangulo est communis, ergo reliquus DBF est reliquo DAB æqualis. b (per 5 6 ad 32 pri. in 1. to. Aerarij.)

Igitur & anguli DHB, DBI, in triangulis DBH, DBI æquales erunt. Habent autem eadem triangula prætereà angulum communem ad pũctum D, & consequenter reliquum reliquo æqualem. Ergo triangula dicta sunt æquiangula, habentique latera c proportionalia, nempe HD ad DB, vt DB, ad DI. Non aliter si ex puncto C demittatur perpendicularis CK secans BD n L, ostendẽtur triangula DBC, DCL, esse æquiangula, & insuper d esse æquiangula triangulo DBE, atq; iccirco esse eandem proportionem ED ad DB, quæ DB ad DC. c 4 pri. hu. d 2 sexti

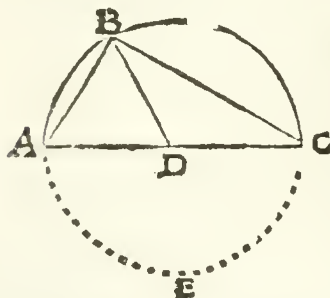
Quod si perpendicularis educta fuisset ex altero terminorum diametri, verb. gr. ex A, qualis est AG tangens circumferentiam in A, adhuc recta AD, quæ ex reliquo termino D ducitur ad punctum contactus, media est proportionalis inter segmenta GD, DB, quæ in recta, ver. gr. DG intercipiuntur inter circumferentiam, & perpendicularem, interq; terminum D. Siquidem vt prius triangula ABD, DAG sunt æquiangula, & similia. &c.

SCHO-

SCHOLIA.

1 Vtitur Villalpandus modo demonstrandi, quo apud Clauium prop. 19 in Schol. post 33 huius lib. 6 vtitur Iohannes Baptista Benedictus. Nos hic omisimus alium modum Villalpandi, qui eget 16, 17, 18, propos. huius, & aliquid pro Tyronibus apposuimus, sine necessitate 8 propos. huius lib. 6. quam citat Villalpandus.

2 Idem probat angulos DHB, DAB æquales ex 27 proposit libri 3, quia insistunt eidem arcui DB. Nos quia propositio 27 eget alijs antecedentibus aliquibus eiusdem libri tertij propositionibus, ne pro vna pluribus abuti videremur supposit. è li. 3 probauimus angulos DHB, DAB æquales ex 21 tertij, quæ corollarium quoddam est antecedentis 20, & ipsa 20 sine necessitate antecedentium in lib. 3 deducitur ex 32 prop. li. 1 & ex § 6 nostro ad eam in To 1 huius Aerarij. Ac licet potuissemus, propter vsus multiplices earum, vtramque 20, & 21 è lib. 3 illuc transferre, quemadmodū transtulimus ipsius 31 partē de angulo recto in semicirculo, quæ omnes ex 32 l. 1 deducuntur, & probantur; tamen ne videremur affectare copiam, & transpositiones sine extremâ necessitate, satius duximus ex prima occasione (quæ hic nunc sese offert) hic necessaria, eas 21, & 20 tamquam lemmata explicare ex antecedentibus in 1 libro Elem.



Itaq; in figura hic repositâ è § 6 ad 32 1 facile patet angulum ACB ad peripheriam esse dimidium anguli ADB ad centrum super communi arcu AB. Nā propter æquales semidametros DB, DC, triangulum BDC est isosceles, & habet angulos C, CBD æquales, angulus verò ADB externus cum, ex 32 1 prsit æqualis internis DBC, BCD, detracto dimidio DBC, remanet dimidium, idest angulus BCD dimidius anguli ADB.

Quoniam verò in eodem segmento BCEA ad quodcumq; punctum arcus BCEA ducantur ab A, B duæ angulum facientes, ille angulus est dimidius vnius, eiusdemq; anguli ADB ad centrum B, patet omnes eos angulos esse inter se æquales. Quare hic habes, mi Tyro, indicatas, & demōstratas ex 32 pri. & primis principijs, propositiones 20, & 21

& 21 tertij, sine vlla ignorantia protelata per suppositionem vsq; ad lib. 3, quem nos huic 6 posponimus in nostra methodo, propter rationes, quas habes in præfatione ad Lectorem ante hunc 2 Tomum.

§. XXXVIII.

SCHOLION X.

Demonstratio praxis (in § 3 ad 12 primi) demittendi perpendicularem.

Sint applicatæ BC,BG, & descripti arcus CI,GH centro B secantes applicatas in I, H. Dico rectam IH protractam vsq; ad E, perpendicularem esse ad diametrum DB. Ex puncto enim I intelligatur in diametrum demissa perpendicularis, secans circumferentiam, ducaturq; recta BK quæ per proximè hìc antecedens theorema in § 37, erit media proportionalis tã inter rectas IB, BG, quàm inter rectas CB, BH, sumendo BH pro ea, quæ intercipitur inter punctum B, & inter perpendicularem IE, hoc est, vt BI ad KB, vel CB ad KB, ita erit KB ad BG, & ad BH, ac proinde IE, perpendicularis abscindet ex CB rectam HB æqualem ipsi BG: Sed etiã recta IH abscindit ex eadem CB, rectam HB ipsi BG æqualem: ergo recta IH coincidet cum recta IE: & idcirco ad diametrum DB perpẽdicularis existet.

Eodem modo si ex puncto H fuisset ducta ad diametrum perpendicularis HE, quæ protracta secet circumferentiam in K, & BG protractam in I, iunctaq; fuisset BK, ea esset media proportionalis tam inter BH, BC, quàm inter BG, BI, hoc est, vt BH ad BK vel BG ad BK, ita foret eadem BK ad BC, & ad BI, ac proinde BC, BI æquales existerent, vel, quod idem est, perpendicularis EH transiret per I, in quo rectam BG secat arcus BI. Quod erat demonstrandũ. *Ait Vill.*

Scho-

SCHOLIA.

1 *Antecedentis theorematis posteriorem partem hic nostra figura aptauimus, priorem verò partem, qua vtitur Villalpandus, & qua nos non egemus, omisimus.*

2 Vis est in constructione, qua per arcus CI, GH æquales fiunt CB, BI, & HB, BG. Itaq; KB habet eandem proportionẽ ad maiores æquales CB, BI, vel ad minores HB, BG; ac proinde ipsa IHE abscindit æquales minores ab æqualibus maioribus, vel æqualibus minoribus apponit æquales maiores, ad quas KB habet eandem rationem.

§. XXXIX.

THEOREMA II.

Si in semicirculo ex vno terminorum diametri ducatur tangens, & ex altero termino linea secans tangentem, & circumferentiam, atq; a puncto intersectionis circumferentiæ in diametrum demittatur perpendicularis, tota secans, diameter, segmentum secantis intra semicirculum, nec non segmentum diametri inter secantem, & perpendicularẽ, erunt quatuor lineæ continuæ proportionales.

Semicirculum ABCD tangat recta AG in A; recta verò DG eandem tangentem secet in G, & circumferentiam in B, & ex B demissa sit in diametrum perpendicularis BF. Dico secantem GD, diametrum DA, segmentum secantis DB, nec non DF segmentum diametri inter secantem, & perpendicularem, esse continuè proportionales. Nam AD, est [a] media proportionalis inter GD, BD. hoc est, vt GD ad AD, ita est AD ad BD: sed vt GD, ad

a per theor. antec. § 37.

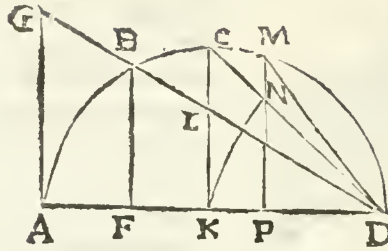
ad AD, ita eſt BD ad DF; propterea quod triangula ADG, FDB ſint ſimilia propter parallelas AG, FB: ergo etiam vt AD ad BD, ita erit BD ad DF; ac proinde quatuor rectę GD, AD, BD, FD erũt continuè proportionales.

Quod erat demonſtrandum.

§. XXXX.

THEOREMA III.

Si in ſemicirculo recta quæpiam ab alterutro termino diametri ad circumferentiam applicata, ſecet perpendicularem quampiam ſuper diametrum eductam; ſitq; ſegmentum eius interceptum inter terminum diametri, & dictam perpendicularem æquale ſegmẽto diametri inter eundem terminum, & perpendicularem, quæ in ipſam diametrum cadit a puncto applicatæ in circumferentia; eàdem applicata eiuſdemq; ſegmentum inter terminum diametri, & priorem perpendicularem, erunt duæ mediæ proportionales inter diametrum, & illud eius ſegmentũ, quod continetur inter eundem terminum diametri, eandẽq; illam priorem perpendicularem.

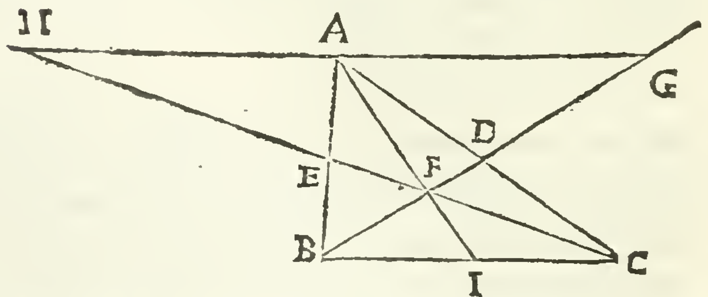


APplicata DC in semicirculo ABCD secet, v. g. perpendicularem PM in N, sitque segmentum eius DN æquale segmēto DK cōtento inter eundem terminum D, interq; perpendicularem CK, quæ ex C cadit in diametrum DA; dico rectas DC, DK medias esse proportionales inter diametrum DA, & segmentū eius DP interceptum inter eundem terminum D, & inter priorem perpendicularem PM. Nam per theor. § 37 ad hanc 4 prop. Eucl. erit vt DA ad DC, ita DC ad DK, hoc est, ad DN, & DN ad DP habet eandem rationē; propterea quod triangula DCK, DPN sint similia, habeantque latera proportionalia. Quod erat demonstrandum.

§. XXXXI.

THEOREMA IV.

In omni triangulo tres rectæ ab angulis productæ, ac bifariantes opposita latera secant se in communi puncto.



SIt triangulum ABC, in quo ab angulis B, & C, ducantur duæ rectæ BD, CE bifariantes latera opposita AC, AB in D, & E. &

E, & secantes se in F. Ducatur recta AI per F. Dico etiam ipsam diuidere latus BC bifariam in I.

Ducatur HAG parallela ipsi BC, & producantur BD, CE donec ipsi HAG occurrant in H, G. Triangula BEC, HEA sunt æquiangula propter angulos ad verticem E, & propter alternos EHA, ECB, & HAB, EBC æquales; ergo vt EB ad BC, sic EA ad AH, & permutãdo vt BE ad EA, ita BC ad AH; sed BE, EA sunt æqualia, ergo etiã BC, HA; Pariter triangula BDC, ADG sunt æquiangula, & (vt in antecedentibus) sicut DC est æqualis ipsi DA, sic BC ipsi AG. Cùm ergo HA, & AG æqualia sint eidem BC, erunt etiã inter se æqualia.

Rursus triangula, AHF, IFC sunt & ipsa æquiangula iuxta præmonstrata de æquiangulis antecedentibus; ergo vt HA ad AF, ita CI ad IF. Item triangula AFG, BFI sunt æquiangula, & vt GA ad AF, ita BI ad IF; ergo ex æquali, vt HA ad AG, ita CI ad IB; sed HA, & AG sunt demonstrata æqualia, ergo etiam IC, & IB erunt æqualia Quod erat demonstrandum. Ergo rectæ ab angulis quæ bifariant bases secant se in communi puncto.

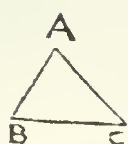
COROLLARIVM IX.

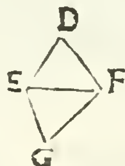
Ad vsus infinitos in Stereometria, & Machinaria.

Fiat antecedens ex theoremate problema, seu porisma, & inuenisti in puncto communi F centrum grauitatis, iuxta Archimedem in propos. 14. primi æquiponderantium. Cui quasi lemma est theorema nostrum antecedens Id porro punctum inuentum, præter vsus alios in Machinaria, est vsui ad inueniendas quantitates, proportiones, & plurima alia circa numerum ingentem solidorum geometricorum, quæ fingi possunt ex rotatione trianguli varijs modis conceptà, iuxta nouam doctrinam nostri Guldini de vsu, & fructu geometrici cẽtri grauitatis in geometricis figuris. Exempla aliqua indicauimus in huius Aerarij vtroq; tomo, & regulam vniuersalem attulimus. Relege. Hic tantũ indico lucrum ex antecedenti theoremate.

Propos. V. Theor. V.

Si duo triangula latera proportionalia habuerint, æquiangula erunt, habebuntque angulos, quibus homologa latera subtenduntur, æquales.





HAbeant triangula ABC, DEF latera proportionalia, nempe, vt AB ad BC; ita DE ad EF. Et vt BC ad CA; ita EF ad FD: atque vt BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triangula ABC, DEF æquiangula esse, æqualesque habere angulos, quibus homologa latera subtenduntur, vnde æquales erunt anguli ABC, DEF; & BCA, EFD; & BAC, EDF. [a] Constituantur enim ad puncta E,F rectæ EF anguli FEG, EFG æquales angulis ABC, BCA; erunt ergo & reliqui BAC, EGF æquales: triangula ergo ABC, EGF sunt æquiangula: [b] habent igitur latera circa æquales angulos proportionalia eruntque latera æqualibus angulis subtensa, homologa. Ergo vt AB ad BC, ita EG ad EF: Sed vt AB ad BC, ita ponitur DE ad EF: [c] vt igitur DE ad EF, ita GE ad EF. Vtraque ergo DE, GE ad EF eandem habet proportionem; [d] æquales igitur sunt DE, GE. Eadem de causa DF, GF æquales erunt. Cum igitur DE, EG æquales sint, communis EF, erunt duæ DE, EF duabus GE, EF æquales, & basis DF basi GF æqualis; [e] erit ergo angulus DEF angulo GEF æqualis, & triangulum DEF triãgulo GEF æquale, & reliqui anguli reliquis, quibus æqualia latera subtenduntur: anguli ergo DFE, G-

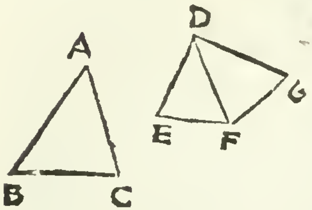
a propos. 33.1.
b prop.4. 6.
c propos. 11.5.
d prop.9. 5.
e prop.8. 1.

IE

FE ſunt æquales, item EDF, EGF: & cum angulus FED æqualis ſit angulo GEF, & GEF ipſi ABC, [f] erit & ABC ipſi FED æqualis. Eadẽ de cauſa erit angulo ACB æqualis angulus DFE, & angulus ad A angulo ad D. Triangula ergo ABC, DEF æquiangula ſunt. Si ergo duo triangula, &c. Quod oportuit demonſtrare. f *ax.1.*

Propoſ. VI. Theor. VI.

Si duo triãgula vnum angulum vni æqualem, & circa æquales angulos latera proportionalia habuerint, æquiangula erunt, habebuntq́ angulos, quos homologa latera ſubtendunt, æquales.



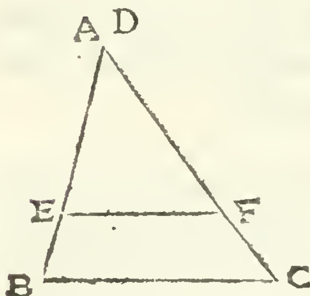
Sint duo triangula ABC, DEF angulos BAC, EDF habẽtia ęquales, & circa ipſos latera proportinalia, vt BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triangula ABC, DEF eſſe æquiãgula, adeoque angulum ABC angulo DEF, & ACD ipſi DFE, æqualem habere. [a] Conſtituatur enim ad puncta D, F rectæ DF alterutri angulorum BAC, EDF æqualis FDG, angulo verò ACB æqualis DFG: erit igitur & reliquus ad B reliquo ad G æqualis. [b] Triangula ergo ABC, DGF ſunt æquiangula. Eſt ergo vt BA ad AC, ita GD ad DF; ponitur autem vt BA ad AC, ita ED ad DF; ergo vt ED ad DF, ita eſt GD ad DF; [c] æqualis ergo eſt ED ipſi GD, communis DF. Duæ ergo ED, DF duabus GD, DF ſunt æquales, & angulus EDF angulo GDF æqualis; [d] erit ergo & baſis EF baſi GF æqualis, & triangulum DEF triãgulo GDF: quare reliqui anguli reliquis ęquales

a *propoſ. 23.1.* b *prop.8. 1.* c *prop.9. 5.* d *prop.8.*

les erunt, alter alteri, quibus æqualia latera subtendun-tur. Angulus ergo DFG æqualis est angulo DFE; & qui ad G illi, qui ad E. Sed DFG æqualis est ACB angulo, e
cax. 1. ergo & ACB ipsi DFE æqualis erit; ponitur autem & BAC ipsi EDF æqualis, reliquus ergo ad B æqualis erit reliquo ad E. Triangula ergo ABC, DEF æquiangula sunt. Si ergo duo triangula, &c. Quod oportuit demonstrare.

§. I.

SCHOLION I.



SVnt qui hoc th.6. etiam aliter demonstrent. Nam imposito latere DE lateri AB, cadet DF in AC, quoniam angulus ad punctum D angulo ad A est æqualis. Vel igitur DE est æquale ipsi AB, vel inæquale. & si quidē æquale, erit & DF æquale AC, ergo & basis EF basi BC, & reliqui anguli reliquis angulis æquales. Si vero DE sit inæquale ipsi AB, sit vtrumuis ipsorum maius, verbi causa AB: tunc vt BA ad AC, sic ED ad DF. ergo permutando vt BA ad AE, sic CA ad AF: & diuidendo vt BE ad EA, sic CF ad FA. quare latus EF parallelum est lateri BC, & idcirco angulus AEF angulo ABC, & angulus AFE angulo ACB est æqualis, quod ostensum oportuit. *Hæc ad hanc 6 Commandinus.*

SCHOLION II.

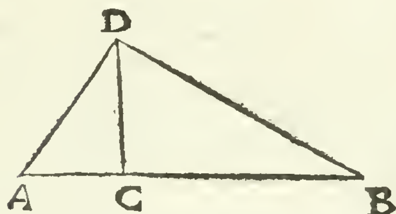
COnfer inter se 4 propos. lib. 1. Eucl. & 6 hic propositionem, atq; earum similitudines agnosce, dum id, quod in li. 1 demonstratur de lateribus æqualibus, hic de proportionalibus, &c.

Theo-

§. II.

THEOREMA.

Si tres lineæ rectæ continuè proportionales ad idem punctum conueniant, & media ad reliquas sit perpendicularis: rectæ quæ illarum couiungunt terminos, continebunt angulum rectum.



TRes rectæ CB, CD, CA, cõtinuè proportionales conueniant in puncto C, ita vt CD quæ est media, ad reliquas sit perpendicularis. Dico ductas AD, DB continere angulum rectum in D. Nam rectæ in primis AC, CB constituent vnam rectam lineam. Deinde quoniam circa æquales angulos, nempè rectos DCB, DCA latera DC, CB proportionalia sunt lateribus DC, CA, a erunt triangula DCB, DCA æquiangula, æqualesq; habebunt angulos CBD, CDA, sub quibus subtenduntur latera homologa CD, CA; atqui angulus CBD cum angulo CDB æquiualet recto DCB, propterea quod omnes tres anguli trianguli DCB æquales sint duobus rectis: ergo & angulus ADC constituet cum angulo CDB rectum ADB. Quod erat demonstrandum. *Villalp. cap. 2. prop. 5.*

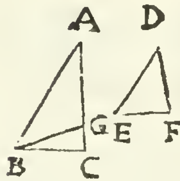
a *6 sexti Eucl.*



Pro-

Propos. VII. Theor. VII.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circa alios angulos latera proportionalia habuerint, reliquorum vero vtrunque aut minorem, aut non minorem recto, æquiangula erunt triangula, & angulos, circa quos latera sunt proportionalia, æquales habebunt.



SInt duo triangula ABC, DEF habentia angulos BAC, EDF æquales, circa alios vero angulos ABC, DEF latera proportionalia. Vt AB ad BC, ita DE ad EF reliquorum verò angulorum, qui ad C, & F, primũ vtrũque minorẽ recto. Dico ABC, DEF triangula esse æquiangula, angulumque ABC angulo DEF, & qui est ad C, illi qui est ad F, æqualem. Quod si anguli ABC, DEF inæquales sint, erit vnus maior. Sit maior ABC; & [a] constituatur ad punctum B rectæ AB angulus ABG æqualis angulo DEF. Et cum anguli A, D æquales sint, item ABG, DEF, [b] erunt & reliqui AGB, DFE æquales. Triangula ergo ABG, DEF æquiangula sunt. Est ergo vt AB ad BG, ita DE ad EF, sed vt DE ad EF, ita ponitur AB ad BC: ergo vt AB ad BC, ita est AB ad BG. [d] Cum ergo AB ad vtrãque BC, BG eandem habeat proportionem, erunt BC, BG æquales, [e] ergo & anguli BGC, BCG æquales erunt. At BGC minor recto ponitur, erit ergo & BGC recto minor: quare angulus AGB ei deinceps maior erit recto: ostensus est autem æqualis angulo F; erit igitur & angulus F maior recto; at minor ponitur, quod est absurdum: anguli ergo ABC, DEF

a *propos.* 23.1.
b *propos.* 32.1.
c *prop.* 4.1.
d *prop.* 9.5.
e *prop.* 5.1.
f *propos.* 13.1.

DEF non sunt inæquales: æquales ergo. g sunt verò & anguli A, D æquales: ergo & qui ad C,& F æquales erunt. Quare triangula ABC, DEF æquiangula erunt. Sit rursus vterq; angulus ad C,& F nō minor recto. Dico & sic triangula ABC,DEF æquiangula esse; ijsdem enim constructis, ostendemus rectas BC, BG esse æquales, vt prius: h erunt igitur & anguli C, BGC æquales. Cum ergo C recto non sit minor, nec BGC recto minor erit. Sunt ergo trianguli BGC duo anguli non minores duobus rectis, i quod fieri non potest; non ergo anguli ABC, DEF inæquales sunt: æquales ergo. Sunt vero & anguli ad A,& D æquales; erūt k igitur & reliqui ad C,& F æquales. Quare triangula ABC,DEF sunt æquiangula. Si ergo duo triangula,&c. Quod oportuit demonstrare.

g propos. 32. 1.

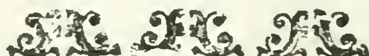
h prop. 5. 1.

i prop. 17 1.

k propos. 32. 1.

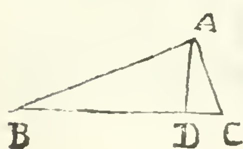
SCHOLION.

Habes in Apiar. 3, Progym. 10 lem. 1, & 2, & coroll. 2, vnde augeas has propositiones Euclidis 5, 6, 7, asserendo, & probando etiam de parallelogrammis similia eorum, quæ demonstrat Euclides de triangulis.



Propos. VIII. Theor. VIII.

In rectangulo triangulo si ab angulo recto ad basim perpendicularis ducatur, quæ ad perpendicularem sunt triangula & toti, & inter se similia sunt.



ESto triangulum rectangulum ABC rectum habens BAC, ducaturq; ab A ad BC perpendicularis AD. Dico triangula ABD, ADC,

& toti ABC, & inter ſe eſſe ſimilia. Cum enim angulus B-
AC æqualis ſit angulo ADB; rectus enim eſt vterque: &
a colligitur ex 32.1. angulus ad B cõmunis vtriq; triangulo ABC, ABD; [a] erit
& reliquus ACB reliquo BAD æqualis: æquiangula ergo
b prop.4.6. ſunt triangula ABC, ABD. [b] Eſt ergo vt BC rectum trian-
guli ABC ſubtendens ad BA rectum trianguli ABD ſub-
tendentem, ita ipſa AB angulum C trianguli ABC ſub-
tendens ad BD ſubtendentem angulum BAD triãguli A-
BD. Et ita AC ad AD ſubtendentem angulum B commu-
nem vtriuſque trianguli. Triangula ergo ABC, ABD æ-
quiangula ſunt, habentque latera circa æquales angulos
c def.1.6. proportionalia, [c] ſimilia ergo ſunt triangula ABC, ABD.
Eodem modo oſtendemus triangulum ADC triangulo A-
BC ſimile eſſe. Vtrumque ergo triangulum ABD, ADC
toti ABC ſimile eſt. Dico quod & inter ſe ſimilia ſint AB-
D, ADC triangula. Cum enim anguli BDA, ADC recti
ſint, erunt & æquales: oſtenſus eſt autem & BAD ipſi C
d colligitur ex 32.1. æqualis: [d] ergo & reliquus ad B reliquo DAC æqualis
erit. Triangula ergo ABD, ADC æquiangula ſunt. [e]
e prop.4.6. Eſt ergo vt BD ſubtendens angulum BAD trianguli A-
BD ad DA ſubtendententem angulum C trianguli ADC
æqualem angulo BAD, ita ipſa AD ſubtendens trian-
guli ABD angulum B, ad DC ſubtendentem angulum D-
AC trianguli ADC æqualem angulo B; & ita BA ad AC
ſubtendentem rectum ADC. Triangula ergo ABD, ADC
ſimilia ſunt. Si ergo in triangulo rectangulo, &c. Quod
oportuit demonſtrare.

Corollarium.

EX his manifeſtum eſt, ſi in triangulo rectãgulo ab an-
gulo recto ad baſim perpendicularis ducatur, ipſam
inter baſis partes mediam proportionalem eſſe. Et inter
baſim, & partem baſis, medium proportionale eſſe latus,
quod ad partem. *Vt inter BC, BD medium proportionale
eſt latus BA; Inter BC, CD latus CA.*

§. I.

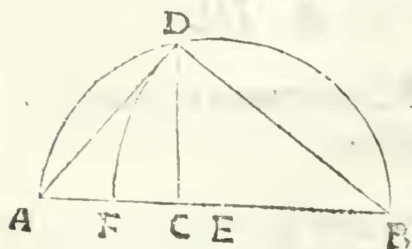
Vſus propoſ. 8, & Corollarij ex ea pro facillima inuentione tertiæ, quartæ, mediæ, ac duarum etiam mediarum linearum proportionalium.

POſſet hoc etiam collocari inter cætera paradoxa, quæ plurima (vt & ad 2, & ad 4 propoſitiones oſtendimus) nos habemus in noſtris Apiarijs. Nam Euclides in hac etiam 8 prop. tacitè prædocet (vt patet ingenio acutè, ac geometricè prouidenti) linearum proportionalium inuentiones, antequam eas doceat inferius in propoſ. 11, 12, 13. Exempla omnia de meis daturus incidi in aliqua apud Pappum lib. 3. propoſit. 6, 7, 8, in quibus quia Clauij verſio expreſſiora habet ad rē noſtrā, hic partem eius verſionis accipe applicatam ſecundæ figuræ Pappi. Ampliſſimos verò vſus linearum proportionalium in praxibus, ac theorijs artium, ac ſcientiarum indicatos videbis inferius, præſertim ad 13. prop. huius lib. 6.

§. II.

PROBLEMA I.

Datis duabus rectis lineis mediam proportionalem inuenire.



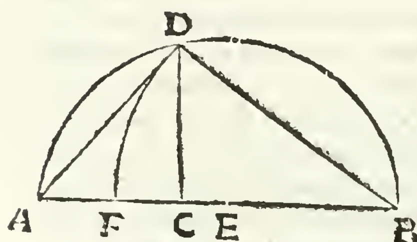
SInt datæ rectæ AB, BC eūdem terminum B habētes, inter quas inuenienda ſit media proportionalis: Bifariatā AB in E, & deſcripto circa eam ſemicirculo ADB, excitetur ex C ad AB perpendicularis CD, & ex B per D arcus deſcribatur ſecās AB in F. Dico BF me-

mediam proportionalem esse inter AB, BC. Ductis enim rectis AD, BD; erit angulus ADB in semicirculo rectus. Igitur ex coroll. prop. 8 huius lib. recta BD, hoc est, ipsi æqualis BF, media proportionalis erit inter AB, BC. Quod est propositum.

§ III.

PROBLEMA II.

Datis duabus rectis lineis tertiam minorē proportionalem inuenire.



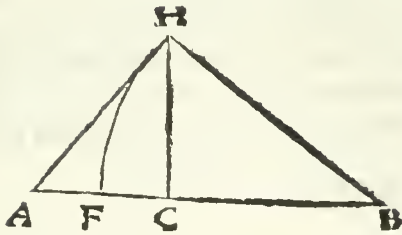
SInt in ead. fig. datæ rectæ AB, BF, eundem possidentes terminum B, quibus inuenienda sit minor tertia proportionalis. Descripto circa maiorem AB semicirculo ADB, describatur ex B per F arcus secans circumferentiā ADB in D puncto, ex quo ad AB perpendicularis demittatur DC. Dico BC tertiam minorem proportionalem esse ipsis AB, BF. Ductis enim rectis AD, BD, erit angulus ADB rectus. Igitur ex coroll. prop. 8 huius lib. erit BD, hoc est, ipsi æqualis BF media proportionalis inter AB, BC. Idest, erit AB ad BF, vt BF ad BC. Quod est propositum. *Maiorē vero extremam proportionalem accipe, vt iacet, apud Pappum.*

§. IV.

PROBLEMA III.

Datis rectis lineis FB, BC maiorem extremam inuenire.

DVcatur ad rectos angulos CH, quam circumferentia circa B centrum per F descripta secet in H, & ipsi BH iunctæ ad rectos



ctos angulos ducatur H-A. Ergo AB est tertia proportionalis ipsarum CB, BF, hoc enim ex antedemonstratis perspicuè constat. *Nam vt CB ad BH, idest ad BF, ita BF, idest BH ad BA. &c. è corollar. huius prop. 8.*

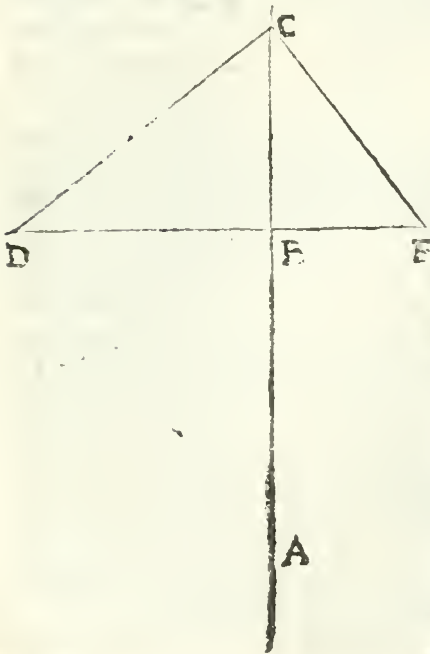
SCHOLION.

Modum tertij antecedentis problematis, qui in casibus Pappi est allegatus inuentioni tantùm maioris tertiæ proportionalis nos traducemus etiam ad inuentionem & minoris & maioris tertiæ, & quartæ proportionalium in seq. coroll.

§. V.

COROLLARIVM, seu Problema IV.

Tribus datis quartam proportionalē minorem, ac maiorē e coroll. propos. 8 adiungere.



Lubet quasi per modum corollarij ex antecedēti 3. problemate quartum hoc problema expedire geometricè, atq; etiam in seq. problematibus organicè. Sint prima AB, & tertia BC iunctæ in B, ac productæ in vnam rectam AC; hoc est in AC infinità secetur AB, BC æquales primæ, ac tertiæ, &c. Sit secunda BD perpendiculariter erecta ex

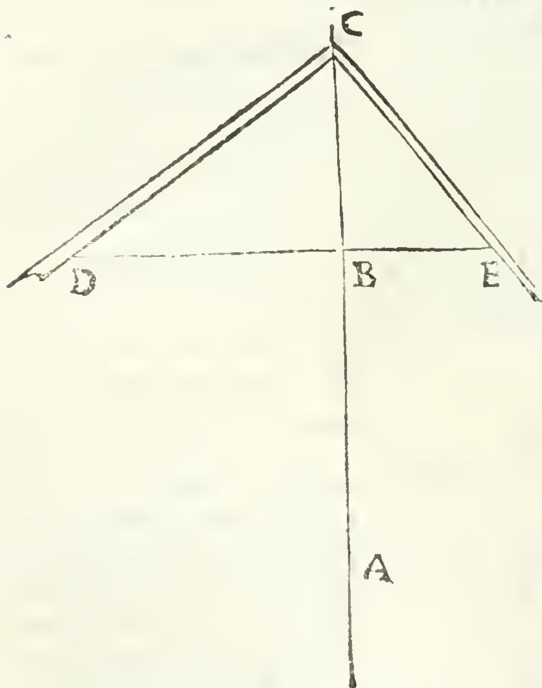
B,

B; Iuxta modos antecedentium problematum inueniatur tertia proportionalis, etiam minor, duabus DB, BC, scilicet iuncta DC, & adiuncta CE ad angulum rectum DCE; secabit enim ipsa CE ex producta DB ipsam BE quartam proportionalem. est enim ex corollar 8 propos. pendicularis CB ab angulo recto C, &c. media proportionalis inter DB, BE ergo. &c.

§.VI.

PROBLEMA V.

Tribus datis lineis quartam maiorem, vel minorem proportionalem organicè facillimè per normam inuenire, iuxta corollar. huius oct. propos. Eucl.



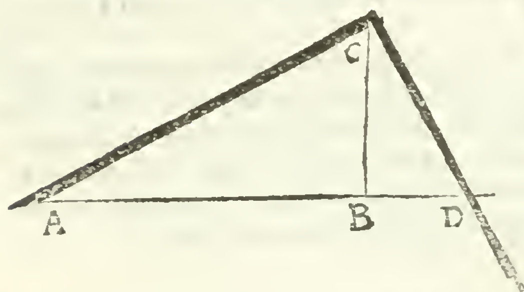
Sint prima AB, & tertia BC iunctæ in vnam rectam ad B, & secunda BD perpẽdiculariter erecta ex B. Normæ alterum latus ita aptetur ad secundæ extremum D, vt rectus normę angulus sit in extremo tertiæ C, atq; alterum latus abscindet ex producta in E quartam proportionalẽ, eritq; vt AB ad BD, sic BD ad BC, & vt BD ad BC, sic BC ad BE, ad minores terminos.

Ad maiores contra-

traria via operabere, Datis prima BE, secunda BC, tertia BD; angulus enim rectus normæ tunc ad D appositus secabit è producta CB quartam maiorem BA.

§. VII.
PROBLEMA VI.

Duabus datis tertiam proportionalem lineam inuenire organicè per normam.



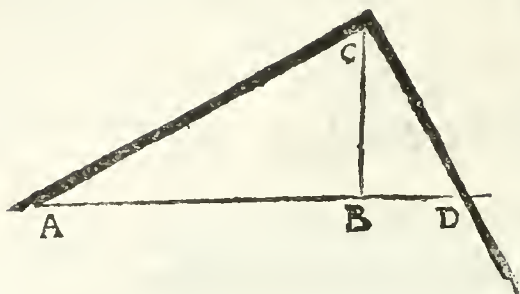
DVæ datæ AB, BC iungantur ad rectum in B. Aptata normà ita, vt angulus eius rectus sit in C extremo minoris, & alterũ latus attingat alterum extremum A, alterum latus abscindet ex producta AB, ipsam BD tertiam proportionalem minimam. Tertiam maximam abscindet ex CB producta ad partes B, si normæ rectus angulus aptetur ad A, & latus alterum ad extremum C Vel posita primà minore BC, & secundà BC ad rectum in B, erit tertia maior abscissa BA à normà. &c.

Patet demonstratio ex corollar. propos 8 huius. Nam perpendicularis CB ab angulo recto est media proportionalis inter duo segmenta AB, BD basis AD trianguli rectanguli ACD.

§. VIII.
PROBLEMA VII.

Duabus mediam proportionalem per normam interponere.

1 Iun-



IVngantur in vnam datæ rectæ AB, BD. Ex communi iunctura B erigatur perpendicularis BC infinita. Norma ita applicetur, vt & lateribus AC, CD, cõtingat extrema A, D, & angulus rectus C sit in perpẽdiculari CB. Pars perpendicularis intercepta inter angulum normæ rectum C, & inter B, erit media proportionalis inter AB, BD per cit. 8 propos. huius, & eius coroll.

Iungantur aliter duæ datæ in commune segmentum ita vt, in exemplo, prima sit maior ipsa AD, secunda sit minor AB vel BD: Ex B erectà perpendiculari, & aptato per eã normæ angulo, vt paullo ante dictum est, & lateribus AC, CD ad extrema A, D, erit alterutrum latus normæ medium proportionale, &c. in exemplo, CD inter AD, BD; & AC inter AD, AB, per coroll cit. propos. 8.

SCHOLION.

POtes ex ipsomet Euclide ipsum condire modum, quo ille vtitur inferius in inuentione mediæ proportionalis, ostendendo esse vsum corollarij huius octauæ, à quo demonstratur. &c.

§. IX.

PROBLEMA VIII.

Lineas non solum quartam, sed plures etiam in eadem proportione continuare ad maiores, & minores terminos.

Ex

EX hac 8 propos. & eius schol. licet plures lineas proportionales inter se in eadem proportione cōtinuare ad maiores, & minores terminos per eum modum, quem tradimus loco secundo ad 12 propos. Euclidis. Hic indico, vt si quis velit vti ad condimentum, & vsum huius 8 propositionis, eum huc transferat, quem nos putauimus esse satius apponere prop. 12. Pendet ille ab hac 8, & sine alijs subsequentibus, eo hic etiam licet vti demonstratiuè.

SCHOLION, in quo---

Proludium duabus medijs rectis lineis proportionalibus inueniendis inter duas datas.

SI attentè notaris modum antecedentis 6 problematis faculam habebis ad duarum mediarum inuentionem, quæ tibi clarè elucebit in paulo post sequenti 9 problemate, vt indicatum habebis in scholio post id problema.

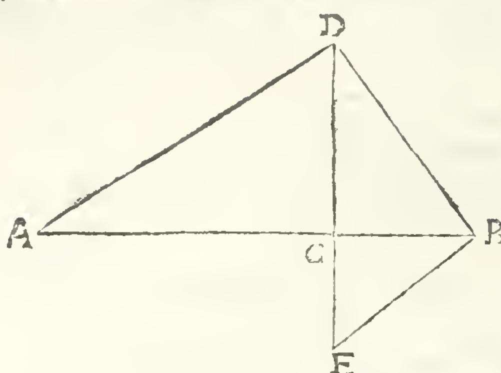
§. X.

THEOREMA I,-

--- ac præuium inuentioni duarum linearū mediarum proportionalium.

VT Tyrones maiori adhuc in luce quasi præuideant problema de inuentione duarum mediarum proportionalium, theorema hoc ex Villalpando non inuenustum præmittendum censui.

Si tres lineæ continuè proportionales sibi inuicē in terminis eodem ordine ad angulos rectos insistāt, quæ illarū terminos nectūt duę rectæ lineę se se mutuo secabunt ad angulos rectos, & in quatuor partes cōtinuè proportionales.



TRes rectæ AD, DB, BE sint continuè proportionales, & constituant angulos rectos in D, B. nectanturque AB, DE se mutuo secantes in C, erit [a] triangulum ABD simile triangulo DEB, æqualesq; habebunt angulos ABD, DEB, itéq; angulos BAD, EDB; sed angulus EDB cum angulo CDA æqualis est recto ADB: Ergo etiam anguli CAD, CDA recto æquales erunt, ergo [b] & reliquus angulus ACD in triangulo ACD rectus erit. Cùm igitur recta DC perpēdicularis sit ad AB, & vicissim AB perpendicularis ad DE, triangula ACD, DCB, BCE [c] similia erunt triangulis ADB, DBE, habebūtq; latera circa æquales angulos proportionalia, hoc est vt AC ad CD, ita erit CD ad CB, & CB ad CE. Quod erat demonstrādū.

a 6 sexti Eucl.

b 32 primi Eucl.

c 8 sexti Eucl.

§. XI.

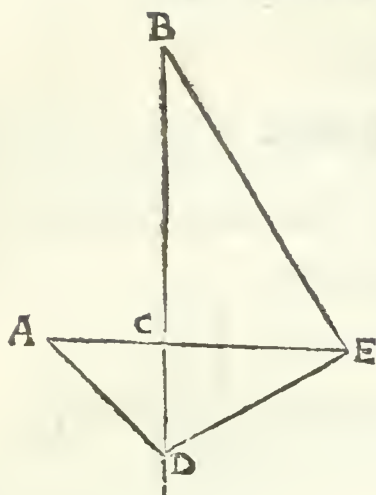
PROBLEMA IX.

Duabus datis rectis lineis duas medias proportionales in eadem proportione interponere iuxta modum Platonis, è corollar. propos. 8.

APud eos, qui persecuti sunt inuentiones veterum Philosophorum Geometrarum circa duas medias proportionales duabus datis interponendas, inuenies modū Platonis facillimum, ingeniosissimum, & Tyronum intelligentiæ accommodatissimum tam geometricè, quam organicè, vnde cum eruditione geometricà condias hanc 8 propos. & eius corollarium.

Ac geometricè quidem sic. Duæ datæ AC, BC iungantur ad angulum rectum in C, & producantur indefinitè etiam vltra D, & E. Ab extremis datarum A, & B educantur parallelæ AD, BE ita, vt iuncta DE faciat cum vtraq; angulos rectos in D, & E; erunt CA, CD,

CE,



CE, CB cõtinuè inter se proportionales. Nam in triangulis rectãgulis ADE, DEB ab angulis rectis D, & E perpendiculares DC, EC ductæ sunt ad bases, ergo, per corollar. 8 prop. vt AC ad CD, ita CD ad CE, & vt CD ad CE, ita CE ad CB. Quod erat faciendum, ac demonstrandum.

§. XII.

SCHOLION.

Ad lucem, & cautionem geometricam.

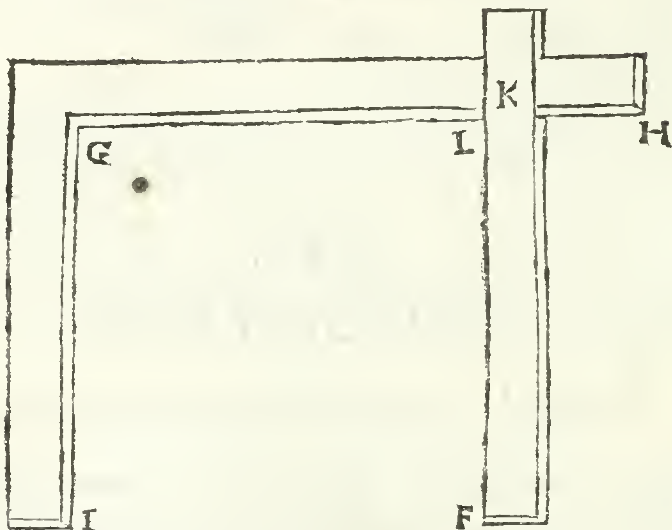
VIdes in figura proximè antecedentis problematis figuram theorematis ex Villalpando. Nam quæ Platonis est ADEBC, est Villalpandi EBDAC. &c. Confer etiam Platonicam cum figuris antecedentium probl. per normam, & prima vestigia huius problematis ibi agnosce. &c.

Quemadmodum vero aliorum veterum Geometrarum problemata de duabus medijs passa sunt difficultates non exiguas à præcisè philosophantibus in Geometricà Philosophia, pariter etiam in hoc Platonico problemate nõ tam facilis, quã videtur, est operatio geometrica, quæ angulos rectum in D, & rectum in E cum duabus AD, EB ita cõstituat, vt CA, DA in extremũ A, & EB, CB in extremum B conueniant. Quam ad rem, propter varia tentamenta linearum ducendarum, aptiorem organicam operationem fortasse arbitratus est Plato, quam mox hìc addo.

§. XIII.

PROBLEMA X.

Duabus duas medias, &c. aliter organicè ex eodem Platone.



INgenium, & facilitatem pariter iunxit idem Plato etiam in instrumento ad soluendum problema propositum aptissimo. Normæ IGH addatur latus tertium FK ita aptum, vt sine luxatione percurrere possit in partibus ad K per latus GH, ac semper permaneant parallela inter se latera IG, FK, & semper sit in L angulus rectus, quemadmodum in norma ad G. Vsus instrumenti est, vt apposito latere IG ad extremum alterutrius datarum, v.g. ad A (in figura geometrica antec. Probl. in §. 11) & angulo recto G aptato ad rectam CD, & altero latere GH normæ secanti rectam CE, regula FK (instar rectæ EB in fig geom.) moueatur donec & angulum rectum constituat in recta CE, & simul latere LF tangat præcisè extremum rectæ CB in B, motis interim, vt opus fuerit, angulo recto G sursum, vel deorsum per rectam CD, & moto latere IG semper iuxta extremum A; sic enim anguli recti G, & L secabunt in D, & E terminos duarum mediarum proportionalium. Quod erat faciendum.

Scho-

SCHOLION.

Magnifaciendæ sunt inuentiones Linearum proportionalium propter infinitas earum vtilitates in vniuersa Philosophia Mathematica, & in artibus ad humanum conuictum spectantibus, vt partim videbis in sequentibus ad hanc 8, & ad 11, 12, 13 propos.

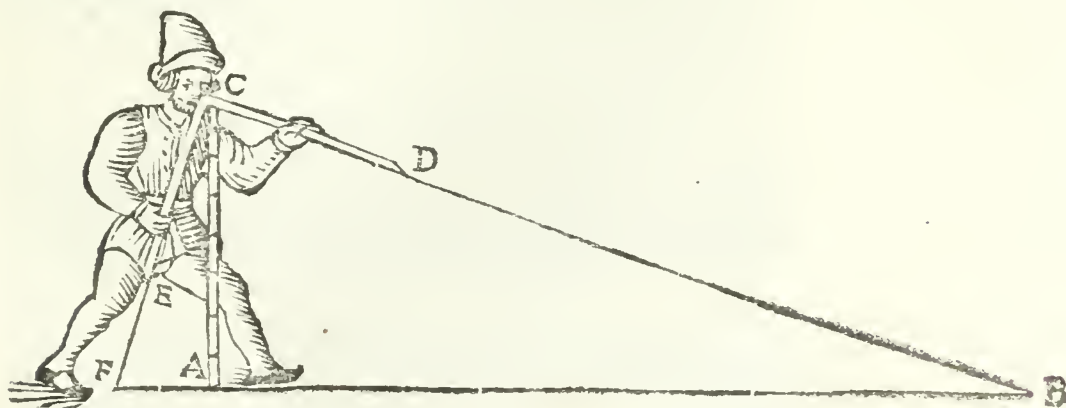
Vsus 8 propos. & Corollarij ex ea in Geometria practica.

§. XIV.

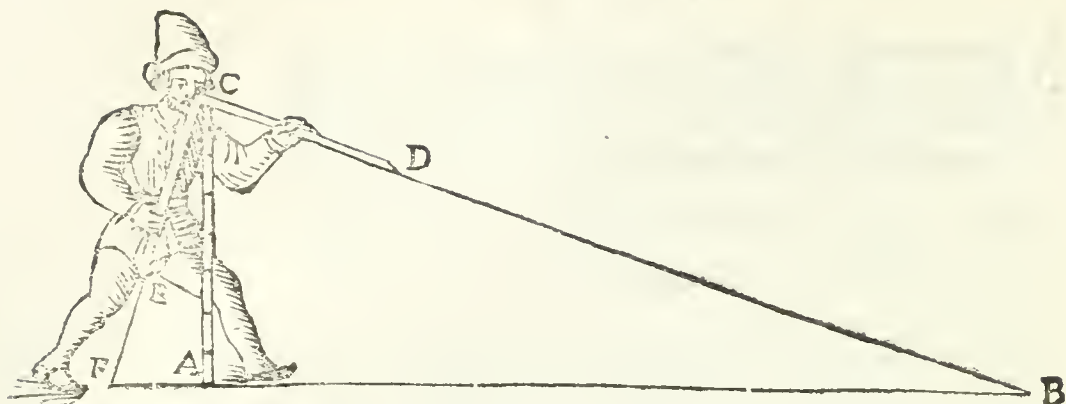
PROBLEMA XI.

Distantias (*etiam inaccessas*) netiri è corollario 8 propos.

ORontius: Placet alium metiendi subiungere modum, quo linearum in plano terrestri constitutarum agnoscetur longitudo: adminiculo videlicet gnomonis, seu rectanguli, quo solent mechanici vulgariter vti Hanc enim metiendi viam data præterire noluimus opera, quia facilis est. Detur ergo linea recta, cuius desideras habere longitudinem, sitq; AB. Erige itaq; ab alterutro datæ lineæ termino, vtpote A, baculum AC, in liberam cubitorũ, aut pedũ



sepa-



ſeparationem diſtributum. Sumpto deinde gnomone DCE, ponito interiorem ipſius gnomonis angulum ſuper extremum baculi faſtigiū C, & conuerſo alterutro gnomonis latere, vtpote CD, versus reliquum terminum B, iungito alterum oculorum puncto C, & leuato, aut deprimito gnomonē DCE, donec in longum, rectumq; CD incidens radius viſualis pertingat reliquum terminum B ipſius datæ lineæ AB. Inuariato poſt modum gnomone, vtraq; linearum AB, & CE, præpoſita videlicet linea, & reliquum gnomonis latus in rectum continuumq; perducatur, adplicatā in longum brachij CE regula quouſq; dictæ lineæ conueniant ad punctum F. Quibus abſolutis, quam rationem habebit erectus baculus AC ad partem AF, eam ſeruabit & data AB linea ad ipſius baculi quantitatem. Vt ſi baculus fuerit pedum 6, AF autem duos tantūmodo pedes compræhendat, quoniam 6. ad 2 triplam rationem obſeruant, eodem modo propoſita AB longitudo ter continebit 6 eiuſdem baculi pedes, hoc eſt 18.

Trianguli enim BCF tres anguli binis rectis ſunt æquales, per 32 primi elementorum Euclidis, ſed BCF angulus rectus eſt, igitur reliqui duo CBF, & BFC vni recto ſunt æquales: eadem quoq; ratione duo anguli ACF, & CFA trianguli ACF vni recto æquantur angulo; nam tertius CAF rectus eſt; anguli CBF, & BFC duobus angulis ACF, & CFA ſunt inuicem æquales propterea quod eidem angulo vni videlicet recto coæquantur. Ac ſi ab eiſdem æqualibus angulis idē E communis tollatur angulus, reliquus CBF reliquo ACF erit, per communem ſententiam, æqualis. Atqui angulus BAC æquus eſt angulo CAF, nā vterq; rectus, & reliquus igitur angulus ACB reliquo

CFA

CFA erit itidem æqualis. Aequiangula igitur sunt bina triangula ABC,& ACF; quare & quæ circum æquales angulos latera proportionalia, per 4 sexti elementorum eiusdem Euclidis Ergo sicut AC baculus ad lineunculam AF, ita se habet AB proposita longitudo ad erectum baculum AC; quod oportuit demonstrasse.

§. XV.

SCHOLION.

Modus dimetiendi distantias in antecedente problemate pro vitandis fallacijs aliter vsurpatus.

IN Apiar. 2, Progym 1. Propos 6 nos præcedentem modum dimetiendi distantias horizontales vsurpauimus per abiectionem normæ supra horizontem, & pro baculo perpendiculari accepimus distantiam non modicam horizontalem perpendiculariter ad distantiam dimetiendam Vide ibi luculentum exemplum. Idq; fecimus ad vitandas dubitationes, seu fallaces dimensiones, quibus obnoxia videtur altitudo baculi perpendicularis parum ab horizonte eleuati Vide scholia post 2 propos. progym. 1, & corollarium post 9 propos progym. 2 cit. Apiar.

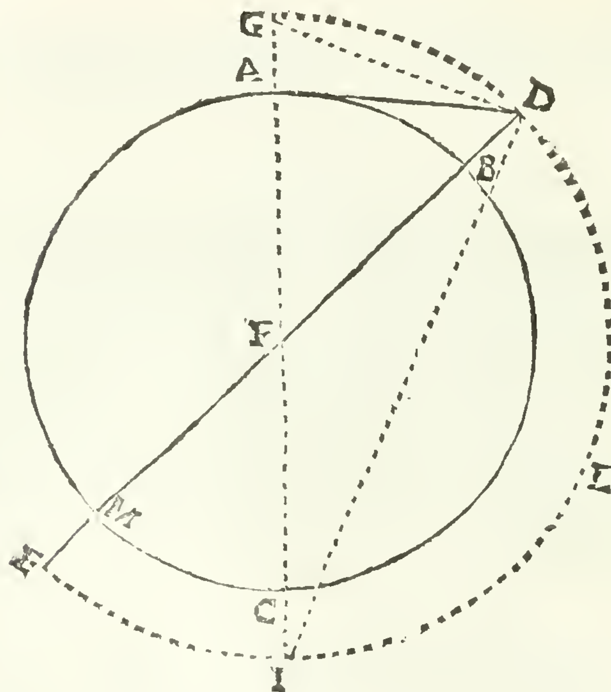
§ XVI.

PROBLEMA XII.

Totius orbis terrarum diametrum inuenire e corollar. propos 8.

MAximi momenti, præsertim apud Cosmographos, & Astronomos, est inuentio diametri terrarum orbis; est enim communis mensu-

mensura terræ semidiameter, qua metiuntur non solum orbis terreni, sed etiam cœlestium orbium, & globorum distantias, diametros, peripherias, superficies, soliditates, &c. Varios autem modos inueniẽdæ diametri terrarum orbis apud alios missos facio, ac nostrum, ni fallor, facillimum hic tantùm indico, quo vsi sumus (paullo aliter, quã hic) in Apiar. 2. Progym. 2. propos. 7, & scholijs, vbi vniuersum terræ globum trinà dimensione comprehendimus Vide etiam analecta ad citatam propositionem in additionibus ad quartam editionem iam vulgatam Apiariorum. &c.



Esto pro terrarum orbe circulus ABC, & ex A puncto horizontali protendatur linea visualis AD, in A quasi tangens, & in D occurrens altitudini perpendiculariter eleuatæ verticis vel turriti, vel montani in terris, vel mali nautici in mari. Notæq; tibi sint in communi aliqua mensura ipsæ AD, DB iuxta ea, quæ docemus in citato Apiario. Ac deinde sic ratiocinare. Vt BD ad DA, sic eadem AD ad DE. Vt cui-

euidentior appareat Tyronibus ratiocinatio, finge DE gyratam circa F ijsse in GI, tunc vides iunctis imaginarijs GD, DI in imaginario semicirculo GDLI angulum GDI rectum, a quo tangens, siue perpendicularis DA iuxta corollar. huius 8 propos. Eucl. est media proportionalis inter GA, AI, idest inter DB, BE, quæ sunt æquales, siue eædē cum GA, AI. Quare ratiocinatio geometrica recta est: vt BD ad DA, sic AD ad DE. Vnde habes in mensuris ipsarum AD, DB notam etiā diametrum DE imaginarij maioris circuli DLIE, à qua DE si notam BD bis subtrahas (idest æquales BD, ME) reliqua erit nota diameter BM, orbis terreni. Cuius deinde ope metiri etiam licebit & totum terræ ambitū, & superficiem, & soliditatem, iuxtà ea quæ apud nos habes ex Archimede in citat. Apiar.

§. XVII.

SCHOLION.

Inaccessas altitudines, & profunditates metiri è corollar. 8 propos.

M*Odum distantiarum horizontalium dimetiendarum, quē vidisti in § 14 & perfectum habes in seq § 15, nos traduximus etiam ad inaccessas altitudines, verb. grat. turrium, vel profunditatum, puta puteorum &c. dimetiendas. Hic tantum indicamus, ne huc transcribamus quę habes in corollar propositionis 8, progy. 3, Apiar. 2 cit. Quo vise, vt inde condias, ornes, applices corollarium huius octauæ propositionis Euclideæ.*

§. XVIII.

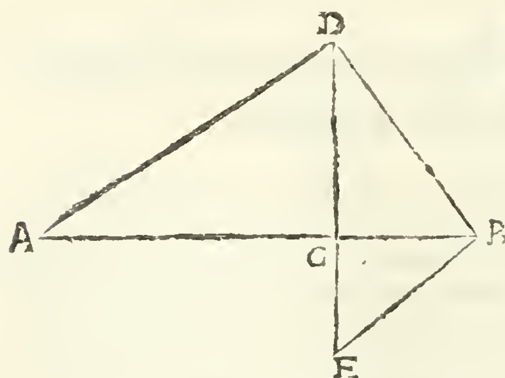
Selecta theoremata Geometrica ex octaua propos. & eius corollario demonstrata.

D*Itando Theoremati octauo huius libri sexti elementorum Geometricorum apponere libet selecta aliqua theoremata è nostro Villalpando, vt quæ quasi latent inter moles ingentes*

tes trium tomorum in Ezechielem Prophetam, vbi de antiquo Hiero-solymano Templo, hic patentiora fiant cum laude sui Auctoris.

THEOREMA II.

Si duæ lineę rectæ ſe ſe ita ad angulos rectos ſecent, vt quatuor illarum partes ſint ordine, & continuè proportionales: tres rectę, quæ eodem ordine earum terminos coniungunt, & ipſæ ſunt continuæ proportionales, in ratione partium.



Qvattuor rectę continuè proportionales CA, CD, CB, CE conſtituant angulos rectos in C ita, vt prima, & tertia, itemq; ſecũda, & quarta iaceãt in directum, hoc eſt, cõſtituant rectas AB, DE. Dico etiam iũctas AD, DB, DE, quæ nectunt earum puncta extrema, eſſe continuè proportionales in proportione AC ad CD, vel CD ad CB, vel CB ad CE. Cum enim CD media ſit proportionalis inter AC, CB, & CB media proportionalis inter DC, CE, [a] erunt anguli ADB, DBE, recti; ac proinde [b] triangula ADB, DBE, eidem triangulo DCB, & inter ſe ſimilia: habebuntq; æquales angulos ABD, DEB, itemq; angulos BAD, EDB. Quare eadem erit proportio AD ad DB, quæ DB ad BE, hoc eſt AD, DB, BE erunt continuè proportionales: & quidem in ratione CD ad CB, quæ eadem eſt cum proportione AD ad DB, vel DB ad BE, propter ſimilitudinem triangulorum ADB, DBE cum triangulo DCB, quod erat demonſtrandum.

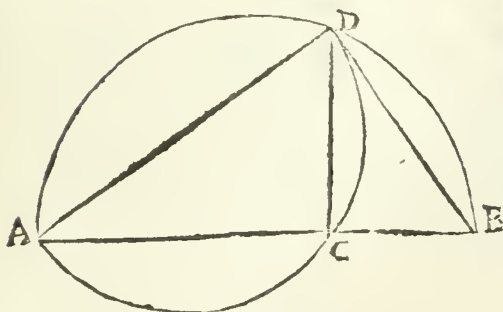
a per theor. ad 6. huius; § 2.

b per hãc 8. Eucl.

§. XIX.

THEOREMA III.

Si ſint tres lineæ continuè proportionales, & ſuper maxima deſcribatur ſemicirculus, ad quē ex termino diametri applicetur media, ab eodemque termino diametri ex diametro abſcindatur æqualis minimæ; quæ connectit terminos mediæ, & minimæ ex diametro abſciſſæ, perpendicularis erit ad diametrum, & eadem media proportionalis exiſtet inter minimam, & exceſſum maximæ ſuper minimam.



SInt tres rectæ continuè proportionales AB, BD, BC, & ſuper maximam AB deſcribatur ſemicirculus ADB, in quo applicetur media BD, & minima BC ſit pars diametri AB, ita vt AC ſit differentia inter maximam, & minimam. Dico ductam CD eſſe perpendicularem ad AB, & mediam proportionalem inter AC, CB. Nam ſi inſuper nectatur AD, erit [a] angulus ADB in ſemicirculo rectus. Et quoniam duo triangula ABD, DBC habent circa communē angulum B proportionalia latera, nempe vt AB ad BD, ita BD ad BC, ipſa [b] erunt æquiangula; ac proinde angulus BCD æqualis erit recto ADB. Cùm

a § 6 ad 31 li. 1.

b 6 hu.

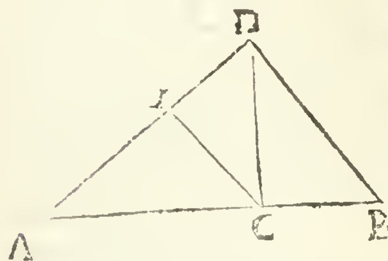
ergo in triangulo rectãgulo ADB ex recto angulo D demissa sit perperpendicularis DC, ipsa c erit media proportionalis inter segmenta AC, CB. Quod erat demonstrandum.

c coroll. 8 hu.

§. XX.

THEOREMA IV.

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto in basim cadat perpendicularis, & rursum ex angulo recto vnius triangulorum partialiũ alia perpendicularis in suam basim, constitutæ erunt quattuor lineæ continuè proportionales: nempè basis trianguli totalis, & basis partialis, nec non duo earundem basium segmenta intercepta inter perpendiculares, & angulum communem.



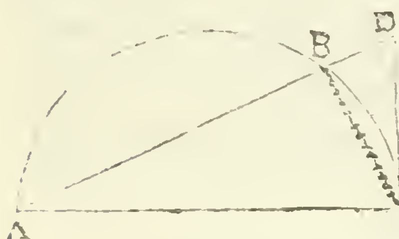
Demissa sit in triangulo rectangulo ADB perpendicularis DC, & in triangulo partiali ACD perpendicularis CI. Dico quattuor rectas, videlicet duas bases AB, AD, & duo segmenta AC, AI, a perpendicularibus DC, CI, ad communem angulum A, abscissa esse continuè proportionales. Cum enim triangula ABD, ACD, AIC, sint æquiangula, a erunt latera circa communem angulum A proportionalia, hoc est, vt BA ad AD, sic erit AD ad AC, & AC ad AI. Quod erat demonstrandum.

a coroll. 8 hu.

§. XXI.

THEOREMA V.

Diameter, & tangens sunt mediæ proportionales inter secantē, & segmenta adiacentia, siue intercepta intra, & extra peripheriam, &c.



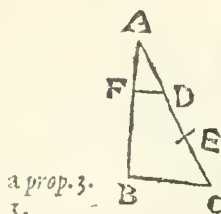
Hoc theorema pluribus expositum, & demonstratum habes in Ap. 3, progym. 10, Prop. 6, quod hic quasi corollarium apponimus è corollario huius 8 propos. Eucl. In semicirculo ABC ab altero extremo C diametri AC sit educta sit tāgēs CD, cui occurrat in D secans educta ex altero extremo A. Dico diametrum AC esse mediam proportionalem inter secantem AD, & inter segmentum AB interceptum intra peripheriam, siue adiacens ipsi AC; tangentem verò CD esse mediam proportionalem inter eandem secantem AD, & inter segmentum BD extra peripheriam, siue adiacens ipsi tangenti CD. Si enim imagineris ex C eductā rectā ad B, faciet in semicirculo angulū rectum, eritq; perpendicularis. Ergo in triangulo rectangulo ACD, per corollar. 8 prop. Eucl. vtrūlibet laterum CA, vel CD erit medium proportionale inter totam basim AD, & segmentum adiacens, &c.



Pro-

Propof. IX. Probl. I.

A data recta linea imperatam partem auferre.





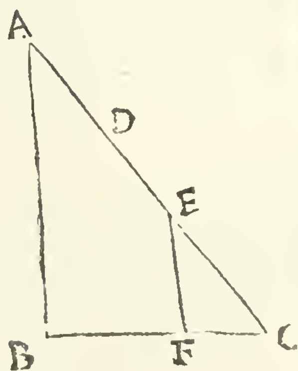
OPorteat à data recta AB imperatã partem auferre. Sit auferenda pars tertia Ducatur ab A recta AC cum AB quẽcũq; angulũ cõtinens;& accipiatur in AC quodcumq; punctum D, [a] ponanturq; ipsi AD æquales DE, EC. Ducatur CB,[b] eiq; per D parallela ducatur DF. Cum ergo lateri BC trianguli ABC parallela sit ducta DF,[c] erit vt CD ad DA, ita BF ad FA. Est autem DC ipsius DA dupla, dupla ergo est & BF ipsius FA: tripla ergo est BA ipsius AF. A data ergo recta AB imperata pars, nimirum tertia AF, ablata est. Quod oportuit facere.

a prop. 3. 1.
b propos. 31. 1.
c propos. 2. 6.

§. I.

SCHOLION I.

Aliter 9 propof. Eucl. exercere, ad demonstrare per ductam parallelam diuidendæ &c.



IN Eucl. figura (vt hic in apposita) postquam secta fuerit in tres partes æquales ipsa AC (omissa ex D parallela basi BC) agatur ex D, vel ex E parallela ipsi AB diuidendæ, sitq; in apposita hic fig. recta EF, quæ erit tertia pars ipsius AB: nam propter parallelas EF, AB interni anguli ABC, CAB sunt æquales externis EFC, CEF alter alteri, & communis est angulus ad C, ergo æquiangula triangula, & vt CE ad EF, ita CA ad AB, per 4 huius; & per-

permutando, vt CE ad CA ita EF ad AB: sed CE, per constructionem, est tertia pars ipsius CA, ergo & EF ipsius AB.

Si ex D demissa fuerit parallela ipsi AB, erit quemadmodum CD duæ tertiæ ipsius CA, ita parallela ex D duæ tertiæ ipsius AB. Secta igitur BA ad quantitatem parallelæ ex D, dabit reliquum pro tertia sui parte.

§. II.

COROLLARIVM I. & Problema.

In triangulo, ductà vni laterum parallelà, imperatam partem ex omnibus trianguli lateribus auferre.

IN triangulo CAB, ductà vni laterum parallelà, velut EF, est etiam vt AE ad EC, ita BF ad FC, per 2 huius. Atq; etiam sunt singula trianguli minoris latera tertia pars singulorum laterum homologorum maioris trianguli. Sic trianguli minoris CEF latus CE pars tertia est lateris CA trianguli maioris CAB, latus EF tertia lateris AB, latus FC tertia pars lateris BC. Quare imperata pars in eadem ratione secta est in tribus trianguli lateribus.

§. III.

COROLLARIVM II. ac Problema.

Vsus propositionis 9 Euclidis in Geometria practica pro inaccessis distantijs, altitudinibus, profunditatibus metiendis.

IN modo, quem indicauimus ad propos. 2, distantiarum, altitudinum profunditatum inaccessarum dimetiendarum § 5, atq; in figura

gurà ibi positâ, hic repositâ distantia EA quasi esset linea à qua imperata pars sit auferenda, ductâ parallelâ EM, non solum est, vel per 2 prop. vt DM ad ME, ita DB ad DA vel per 4, vt DM ad MB, ita DE ad EA; sed etiam est permutando vt DM ad DE, ita MB ad EA. Igitur per ductam parallelam distantiæ quæsitæ habetur mensura totius AE in mensura ipsius MB, quæ quasi partem imperatam sibi æqualem aufert ab EA, & notum dat numerum partium sibi æqualium componentium totam EA.

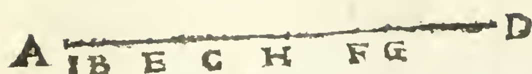
Eodem modo, ac proportionali res procedet si altitudinibus, vel profunditatibus parallelam obducas breuem. quæ dabit mensuras earum. Finge AE esse vel altitudinem, vel profunditatem, &c. ac tute applica, &c.

§. IV.

PROBLEMA III.

Ex qualibet lineola, quantumuis minima, auferre partem, vel partes imperatas, cum vsu instrumenti partium, siue apud nos circini proportionum.

SIt ex lineola AB detrahenda tertia pars. Sumatur ipsius AB tripla AE, quæ si videbitur nimis exigua, multiplicetur vt libet. In exemplo quadruplicata est vsque ad D; ita vt AD sit ipsius AB,



AB duodecupla: (quod scietur si numerus partiũ AE, nimirum 3 ducatur in numerum partium ipsius AD ipsi AE æqualium, nimirum 4.) ac proinde si AB diuisa esse intelligatur in 3 partes, tota AD continebit tales partes 36. Quo circa si in instrumento partium (vbi diuisa est recta in partes æquales) interuallum AD statuatur inter partes 36; deinde interuallum inter 35, 35 (nimirum tota AD vna parte minus) transferatur ex D ad I, erit AI tertia pars ipsius AB, hoc est pars trigesima sexta totius AD. Cum ergo AB contineat tres trigesimas sextas partes totius AD, erit AI ipsius AB pars tertia. Quod est probandum. *Clauius Geom. pract. lib. 8. propos. 24.*

§. V.

PROBLEMA IV.

Aliter 1.

A data recta imperatam partem auferre in circino proportionum.

IN circini facie vbi linea secta est in 100 partes æquales, sit exẽpli gratia ex linea aliqua datâ auferẽda, vel in ea secanda quinta pars. Interuallum, siue longitudo datæ lineæ transferatur in vltimos numeros circini 100, & 100; deinde numerando à cẽtro, accipiatur 5 pars sectæ lineæ lateralis in circino, nempè numerus 20; atq; interuallum inter 20, & 20 erit 5 pars quæsita. *Ex Apiar. 12. in applicat. 28. &c. Applica tu, mi Tyro, figuris, & vsibus in circino proportionum prædicta in hoc §.*



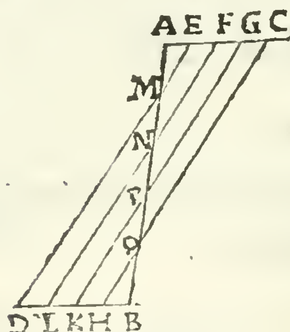
§. VI.

PROBLEMA V.

Aliter 2.

Ex Maurolyco datam rectam in partes æquales quotlibet facillimè secare, siue imperatam partem auferre.

IN geniosissimus Franciscus Maurolycus lib. 2 de lineis horarijs cap. 6 datam rectam in quotlibet imperatas æquales partes sic diuidit: Si datam quamuis lineam AB velim in quotcumq; vtpote quinq; partes æquales diuidere, tunc per eius extrema A-B ducam in diuersum duas ei perpendiculares, seu inter se æquidistantes, & indefinitas AC, BD, de quibus singulis assumam per circinum quatuor (vna scilicet minus proposito partium numero) continuas portiones hinc inde AE, EF, FG, GC, nec non DL, LK, KH, HB, & coniungam puncta diuisionum per totidem lineas, ita vt parallelogramma faciant. Sintque iam coniunctæ ED, FL, GK, CH, quæ secabunt lineam AB in totidem punctis M, N, P, Q. Sic enim ipsa AB in ipsis punctis in quinq; partes æquales, iuxta propositum, diuiditur.



Propositum problema idem est, ac si dicas: à data quintam partem auferre, scilicet quæ, quater replicata totam datam rectam in 5 partes æquales diuidat. Quasi propositio hæc 9 posset proponi iuxta Maurolyci problema.

§. VII.

PROBLEMA VI.

Aliter 3.

Ac facilius secare demonstratiuè datam in lubitas partes æquales, siue imperatam partem auferre. &c.

QVod Maurolycus exequitur per duas rectas ductas ad rectos angulos ab extremis diuidendæ, & demonstratum indicat ex 12 huius, potest facilius, & simplicius expediri, ac demonstrari ex 2 prop huius. Atq; ideo modum hunc hic apposuimus, quia non eum reuocamus ad inferiores propositiones, nempè ad 12 vt Maurolycus.

Itaque vt diuidatur AQ puta in 4 (non in 5 vt Maurolycus) partes, fiat in A lubitus angulus, & iunctis extremitatibus C, Q, ex diuisæ partibus E, F, G agantur parallelæ ipsi iungenti extremitates CQ; tunc enim, è 2 hu. illæ parallelæ secabunt in partes proportionaliter sibi respondentes latera AC, AQ triangulorum, atque vt AC in partes æquales est diuisum, sic AQ in totidem inter se æquales. &c.

Quod si velis insistere inuentioni Maurolycanæ, qua per diuisionem duarum rectarum in partes æquales vnà minus numero partium, in quas æqualiter est diuidenda linea proposita, & anguli alterni ad A, & B sint siue recti cum Maurolyco, siue non recti, modò sint æquales, ac proinde parallelæ AC, DB, sic etiam e 2. Eucl expeditur demonstratio. Nam ED, FL, GK, CH, quæ iungunt æquales, & parallelas per constructionem, sunt & ipsæ parallelæ, ergo in triangulo NAF vt AE ad EF, ita AM, ad MN per 2 huius; in PAG vt AF ad FG, ita AN ad NP; in QAC vt AG ad GC, ita AP ad PQ, at AE, EF sunt æquales, ergo AM, MN. Item FG est dimidia ipsius AF in æquales AE, EF diuisæ, hoc est tertia æqualis pars totius AG; ergo & NP dimidia est in vnà AN æqualium AM, AN, hoc est earũ vtriq; æqualis. Pariter de PQ. &c Reliqua est QB probanda æqualis ipsi PQ. Quod eodem modo probatur in triangulo inferiori KBP, vt enim BH ad HK, ita BQ ad QP, at BH, HK sunt æquales, vt in AC sunt, &c. Ergo & æquales LQ, QP, &c.

§. VIII.

Vsus, & praxis 9 prop. Eucl. ex circino proport.

pro vniuersę Musicę practico compendio in vnicæ lineę varijs partibus auferendis, seu signandis,&c. & pro modo attemparandi harmonicè fidium instrumenta ope circini, &c.

Diuisionis harmonicæ in linea sonora pro genere Diatonico hic compendium accipe, vt suauis fiat etiam auribus Tyronum hæc 9 propos. Euclid. Vide plurima circa hoc apud nos in Apiar. 10 vbi musicas suauitates geometricè tractamus.



1 *In linea AB geometricà, & subducta fidiculæ sonoræ, partem dimidiam accipe in C, & habebis principem consonantiarum Diapason, siue Octauam; pulsata enim linea sonora (quam finge esse eandem AB) liberè, ac tota, non in partes concisa, dat primam vocem Hypaten, siue* Vt, Don. *Posito deinde tactu ad dimidiam in C, vtrelibet AC, vel CB resonabit Netem, siue octauam. &c.*

Eam autem dimidiam partem AC, carpes ope circini proportionũ in ea circini facie, in qua diuisio est rectæ lineæ in 100 partes æquales, si primo interuallum lineæ AB interponas inter numeros 100, & 100, deinde, sic diducto circino, si in eius latere inter numeros 50, & 50 (vbi est dimidium totius diuisæ lineæ in 100 partes) accipias interuallum, quod erit dimidia pars ipsius AB, per demonstrata ex 4 huius.

2 *Accipe interuallum inter 25, & 25, (qui numerus est 4 pars ipsius 100) & habebis quartam partem totius AB ab A in D, siue tres quartas à B ad D; vbi posito tactu, resonabit diatessaron harmonia,* quarta, fa.

3 *Accipe interuallum inter numeros 33⅓, & 33⅓ (qui numerus est 3 pars ipsius 100) & habebis tertiam partem totius AB ab A in E, siue duas tertias à B ad E, vbi posito tactu resonabit consonantia Diapente,* sol. *Habesq; per imperatas has partes ablatas à data AB quattuor præcipuas consonantias.*

4 *Pro reliquis, ac pro reliquo vsu, & praxi hac harmonica 9 propos. Eucl. vide quæ in Apiar. 10 (ne hic iteremus iam à nobis vulgata in editionibus nostrorum Apiariorum) posuimus Prog. 1, & 2, & in eorum corollarijs, & Scholijs.*

5 Hic

5 *Hic tamen pro Tyronibus ad reliquas consonantias pro genere suauissimo Diatonico (vide cit. Ap.) non omittam appenere numeros diuisionum rectæ lineæ in circino proportionum, inter quarum diuisionum numeros accepta interualla dabũt diuisiones reliquas harmonicas in fidicula AB, iuxta numeros, & ordinem, quem habes in cit. Ap. 10 in Schol. post propos. 2 paullo aliter, quàm hic nos instituimus. Numeri sunt* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$. *Quæ sunt consonãtiæ Diapason, Disdiapason, Diatessaron, Diapasondiatessaron, Hexachordum minus, siue Sexta minor, Tonus maior, Diapasondiapente, Diapente, Semiditonus, siue Tertia minor, Tonus maior, Hexachordum maius, Ditonus maior, siue Tertia maior. Itaq; ipsius 100 est* $\frac{1}{2}$ *in circino proportionum interuallum inter 50, & 50. Est* $\frac{1}{4}$ *interuallum inter 25, & 25. Sunt* $\frac{3}{4}$ *interuallũ inter 75, & 75. Sunt* $\frac{3}{8}$ *interuallũ inter 37* $\frac{1}{2}$, *& 37* $\frac{1}{2}$. *Sunt* $\frac{5}{8}$ *interuallũ inter 62* $\frac{1}{2}$, *& 62* $\frac{1}{2}$. *Est* $\frac{1}{16}$ *interuallũ inter 6* $\frac{1}{4}$, *& 6* $\frac{1}{4}$. *Est* $\frac{1}{3}$ *interuallum inter 33* $\frac{1}{3}$, *& 33* $\frac{1}{3}$. *Sunt* $\frac{2}{3}$ *interuallum inter 66* $\frac{2}{3}$, *& 66* $\frac{2}{3}$. *Est* $\frac{1}{6}$ *interuallũ inter 16* $\frac{1}{4}$, *& 16* $\frac{1}{4}$. *Est* $\frac{1}{9}$ *interuallũ inter 11* $\frac{1}{9}$, *& 11* $\frac{1}{9}$. *Sunt* $\frac{3}{5}$ *interuallũ inter 60, & 60. Sunt* $\frac{4}{5}$ *interuallum inter 80, & 80. Vides nostram diligentiam affectantem pro Tyronibus omnem facilitatem, & suauitatem in ieiunis geometricis elementis.*

6 *Igitur si Tyro ad prædicta interualla carpat, siue partes accipiat, iuxta 9 propos. Eucl. in recta AB, habebit duodecim consonãtias siue fides sonoras per tonos, & interualla harmonica suauissima. Ac verè licet affirmare in instrumentis fidium musicã exercere nihil aliud esse, quàm vsum quendam 9 propos. Euclid. in lineis sonoris, dum digitis, & tactibus fides sonoræ per varias partes carpuntur, & diuiduntur. &c.*

7 *Ad facilitatem diuisionis harmonicæ in linea AB, etiam sine circino proportionum, notandum id, quod in cit. Apiar. nostro musico indicauimus, nempe positos esse a nobis numeros eo ordine, vt fiant diuisiones ipsius AB per binas, & binarum sectiones, ac partes aliquotas &c. per ternas, & earum sectiones, & partes aliquotas, &c. per nonam, & quinas.*

Præterea ne fallare, vide in Apiar. cit. terminos, à quibus faciendæ sunt illæ sectiones variæ modò ab A, modò à B. Nempè omnes incipiũt à B versus A, præter $\frac{1}{6}$, *&* $\frac{1}{9}$ *pro semiditono, & pro Tono maiori, qui incipiunt ab A; tamen pro* $\frac{1}{6}$, *accipe* $\frac{5}{6}$, *& pro* $\frac{1}{9}$ *accipe* $\frac{8}{9}$ *incipiendo à B, & omnes diuisiones incipient sic ab eodem termino B, præter tamen vnam* $\frac{1}{16}$ *quæ incipit à C, & terminat in G: potest & ipsa incipere à B, numerando* $\frac{9}{16}$ *vsq; ad G. Vide Ap. cit. 10. prop. 2, & Schol. post eam.*

§. 9.

§. IX.

SCHOLION II.

Remedium, & compendium pro lineis quibuſuis longioribus in vſu circini proportionum.

SI quando accidat vt lineæ ſiue geometricæ, ſiue ſonoræ longitudo ea ſit, quæ facilè non poſſit transferri inter extremos numeros 100, & 100, (vel etiam pro ſubtenſis in inter 90, & 90) & tantum fiat interuallum, quantum non admittant extrema diducta vtriuslibet lateris circini proportionum; tunc facillimum eſt remedium, & compendium ſi vel dimidia, vel quarta, vel alia aliquota pars lineæ AB transferatur inter extrema circini, & interualla reliqua inter numeros ſuperiores circini capiantur, quaſi eſſent partes totius integræ lineæ AB, ac deindè proportione replicentur. &c Exemplum: translata ſit, pro tota AB, AD quarta pars ipſius AB inter extremos numeros 100, & 100 circini. Interuallum inter 50, & 50 erit diapaſon ad AD, non ad AB. Quemadmodum igitur accepta fuit AD quarta pars pro tota AB, ita interuallum, quod eſt dimidium ipſius AD, erit quater replicandum in lineà AB, vt habeatur conſonantia diapaſon in C reſpectu totius AB. Ac pari ratione de cæteris, &c.

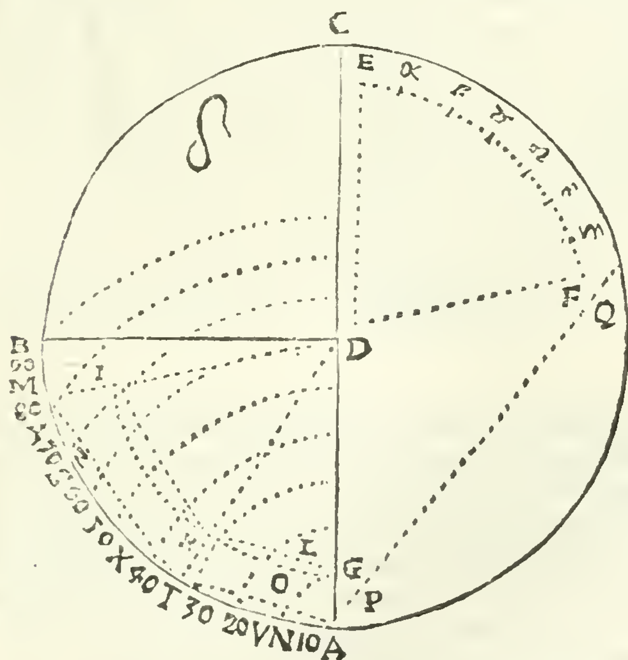
§. X.

PROBLEMA VII, & praxis geometrica.

— A data circulari linea imperatam partem auferendi. Exemplum in ablatione ſeptimæ partis, ſiue in ſeptifariatione dati arcûs.

Quod

QVod Euclides de recta, nos hic etiam de circulari linea problemate so uemus, ac quidē hic paullo geometricè magis quod organicè ad 9, & 10 propos li. præstitimus Est hoc problema ex eorum genere, quæ hactenus in Geometricà philosophia quasi pro nonsolutis habentur, nisi ad mixtas punctuatas incerti ductus lineas confugiatur; & hoc nonsoluto problemate, insoluta etiam sunt problemata de anguli dati in partes lubitas, vel æquales diuisione, de cuiuslibet regularis figuræ in circulo inscriptione, &c. quæ quasi corollaria (vt inferius videbis) deducuntur ex partitione arcûs circularis in quot, & quaslibet partes. Nos circa eorum problematum solutionem versabimur quatenus satis est operationibus vel Astronomicis, vel Gnomonicis, vel Geometricis, vel geometricè practicis



Repono hic figurā (δ) ex initio Apiarij 12, in qua chordæ, siue subtensæ arcuum quadrantis AB, centro communi A, translatæ sunt in rectam, siue diametrum AC, vt hic vides saltem per denos gradus Diuisionem verò quadrantis in 90 gradus æquales (& ex eo totius peri-

phe-

pheriæ in gra. 360) geometricè peractam ex inscriptionibus figurarũ aliquarum in circulo videbis in 3 par: hui. 2 To. post propos. 16 lib. 4 suo in loco.

Sit datus arcus EF, à quo, in exemplo, septima pars auferenda sit. Datâ (vel inuentâ per 21, Tertij in 3 par. hui. 2 to.) semidiametro ED, ad eius interuallum fiat sectio ex D in G, & ducatur arcus GI. Mox interuallo dati arcus EF fiat ex G sectio in I; eritq; GI æqualis arcui dato EF. Aptatâ regula ad DI, vbi ea secabit in M arcum quadrantis AB, puta in exemplo, gradus 77, erit numerus 77 per 7 partes æquales diuidendus, & accipienda septima pars, idest numerus 11 vbi N, & regula aptata punctis N, D secabit in O septimam partem GO arcus GI, qui sectus est æqualis dato EF.

Eadem erit operatio etiam cum dati arcus semidiameter excesserit semidiametrum DB, velut ipsa PQ. Nam aptata regula ad centrum D, & ad terminos arcus dati, & signati extra quadrantem AB, secabit in peripheria AB gradus, & quantitatem diuisam dati arcus.

De-

Demonstratio pendet à vulgata propositione: Rectæ ductæ à centro communi concentricorum circulorum ad peripherias, intercipiunt arcus similes. *Quam propositionem licet alij è 3, & 6 lib. demonstrarint, nos hic aliter, ac facillimè demonstrabimus ope theorematis prioris, quod habes in propos. 6 præ lib. 2, vbi Aranea apud nos geometrizat; eritq; nostra demõstratio in gratiam, Tyronum, sine anticipatione, cum vsu tantum libri 1, solâ suppositâ 11 definnitione lib. 3, in qua definiuntur (quod ibi nos etiam demonstrauimus) segmenta circulorum similia quæ æquales capiunt angulos. &c. Et euidentiæ maioris gratia, in figura, comparabimus ternas, & quaternas septimas pro vnicis in vtroque arcu maiore, & minore.*

Ducatur igitur per grad. 33 recta ad centrum commune D, quæ secet in R arcum IG, & iungantur rectæ IR, RG, MT, TA. Quoniam à communi centro D ad concentricas peripherias IR, MT, æquales sunt semidiametri DI, DR, DM, DT, erunt triangula DIR, DMT isoscelia, & angulus I angulo R, & M ipsi T æquales: communis est angulus ad D; ergo duo DIR, DRI simul sumpti duobus DMT, DTM simul sumptis sunt æquales. Detractis dimidijs I, & M, remanent DRI, DTM æquales. Pari ratione ostendentur anguli DRG, DTA æquales; ergo totus IRG toti MTA æqualis est. Ergo segmenta & peripheriæ IRG, MTA, in quibus æquales sunt anguli, sunt similia; hoc est quemadmodum MTA aufert 77 gradus, ac partes peripheriæ à circulo maiori, sic & IRG totidẽ aufert à suo circulo minore. Eodẽ modo recta DN, quæ vnam septimam in N aufert à peripheria graduum 77 AM, sic aufert vnam septimam GO ab arcu GI. &c.

SCHOLION III.

Ex nostra demonstratione deducuntur corollaria geometrica facilius demonstrata, quam ab alijs quæ videbis in 3 parte hu. 2 To. ad propos. 26, & 27 Tertij; præsertim de similibus, non solum segmentis, sed etiam peripherijs. &c.

§ XI.
SCHOLION IV.

Circa alia exempla in ablaitone tertiæ, quintæ, &c. partis a dato arcu.

R Quod

QVod factum est circa septifariationem dati arcus, proportione faciendum est etiam circa ablationem cuiuslibet alterius partis ab arcu dato. Ac res quidem feliciter cedit quando arcus datus, ac diuidendus est similis arcui (quadrãte diuiso in 90) qui facilè diuidi possit per integros numeros graduũ vel etiam cum aliqua fractione aliquorum minutorum facili diuisione sumendorum; at verò cum, præter gradus integros, vel graduum partes facile diuidendas, inciditur in residua aliqua, vel particulas difficilioris diuisionis, tunc faciendum est quod alij omnes Geometrici philosophi præcipiunt vbi Lẽmata habẽt ante Astrolabia, ante Astronomica, ante Geometrica practica; scilicet physica oculi æstimatione vtẽdum, quæ physicè geometricis operationibus non officit; ac res in calculos numerorum quàm fieri potest minimos resoluenda est; vt etiam Archimedes, & alii faciunt in circuli dimensione potius quàm quadratione, dum rectæ lineæ cum circulari æqualitatem proximè persequuntur, si non assequuntur.

Interim hìc habes numeros in quadrante AB non paucos aptos diuisioni pro exemplo allato in septem partes: 84 habet septimam 12; 77, 11; 70, 10; 63, 9. &c.

§. XII.

COROLLARIVM III.

Datum arcum circularem in lubitas æquales partes diuidere.

COnsequitur ex antecedenti problemate 7. Nam accepta pars multiplex ipsius arcus, & replicata diuidit arcum. Velut in exemplo antepositio septima GO translata in Eα diuidit arcum EF in septem partes æquales. Proportione fient aliæ diuisiones arcuum iuxta cautã in Schol. 4. antecéd.

§.XIII.

COROLLARIVM IV.

Datum angulum rectilineum in lubitas, ac æquales partes diuidere.

Conſequitur & hoc. Nam ex $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ ductis ſemidiametris ad angulum D, ſi concipias ſubtenſas rectas partibus Eα, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$, $\varepsilon\zeta$, ζF æquales, fiunt ſeptem iſoſcelia æqualia, ac per 8 propoſ. lib. 1. anguli verticales ad D ſunt æquales, ergo angulus D in ſeptem diuiſus eſt æquales. Proportione fient aliæ diuiſiones angulorum, iuxta cauta in Schol. 4 anteced.

§.XIV.

COROLLARIVM V.

De inſcriptione cuiuslibet regularis figuræ in circulo.

Licet hocce corollarium etiam ipſum conſequatur ex ablatione partis à circulo, ſiue à diuiſione circuli in partes, verbi gratia, inſcriptio heptagoni è diuiſione circuli in 7 partes, quarum vnam ſubtendit latus heptagoni; tamen in opportuniorem locum transferendum eſt, nempe poſt propoſ. 16 lib. 4, è quo demonſtratiua fit diuiſio circuli, quam ſupponit hæc figurarum vniuerſalis deſcriptio in circulo. Illuc viſe, mi Tyro.

§.XV.

SCHOLION V.

Mixtæ lineæ punctuatæ ab antiquis, & doctiori-

bus Philosophis Geometricis iure ineptæ habitæ sunt solutionibus problematum, & corollariorum proximè antecedentium.

QVamuis Pappus Alexandrinus lib. 4. Math. Colect. Probl. 25 solidis rationibus reijciat mixtam punctuatam quadratricem ab vsibus geometricis (quemamodum & spirales pũtuatim ductæ ineptæ sunt pro geometricè præcisè, ac demonstratiuè operantibus) tamen parum sibi constans in propos. 35 vtitur quadratrice linea, & spirali pro sectione circũferentiæ in data ratione, atque in sequentibus pro inscriptione cuiuslibet polygoni in circulo, pro quadratione circuli. &c. Opinor contentus mechanicè potius, quàm geometricè operari ad praxes, vt ipsemet affirmat in fine citatæ propos. 25 lib. 4.

Linea mixta punctuata cur ab Antiquis Geometris reiecta, &c.

Ac sanè lineæ mixtæ punctuatæ (conchois Nicomedis licet mixta, ductu tamen continuato, ac certo perfacile, ac firmũ instrumentum, nõ minus quàm circinus, ducitur non per incerta puncta) meritò ab Antiquis Philosophis Geometris reiectæ sunt à certitudine geometricæ demonstrationis, cùm propter alia, tum in primis propter incertam earum lineationem, quæ fit per puncta potius æstimatæ, quàm certæ, ac demonstratæ situationis. Ac quod speciatim spectat ad lineam mixtam Dinonstrati, apud Pappum lib. 4 citato post propos. 25, reijcitur tamquam inepta ipsimet circuli quadraturæ, cuius tamen in primis gratià inuenta, & appellata est τετραγωνίζουσα, & cuius formam habes etiam apud nos sub finem Apiarij 2, & preterea etiam in Analectis nostris ad quartam Apiariorum iam vulgatam editionem, Analecto 9, § 1, vbi ostendimus eam ex ortu, & ductu suo esse in sui extremo asympoton ad rectam, siue diametrum circuli quadrandi, idest non posse vmquam ab ea diametrum circuli contingi; quare non potest in semidiametro facere vllam sectionem tertiæ proportionalis, quæ per eam queritur pro circuli quadratura. Vt hęc in figuris, & exemplis intelligas (quorum nulla hìc nobis nunc est necessitas) vide cit. Pappum. Cùm igitur in cit. Analecto sit demonstrata Dinostrati mixta linea nunquam attingens, siue asymptotos rectæ, cum quà deberet coincidere, implicat, & sui natura inepta est, vt possit inseruire circuli quadrationi, pro qua debet esse non asymptotos.

Implicantia est in vsu quadratricis Dinostrati. &c.

Sed quod ad rem nostram facit nullo modo geometricæ certitudini potest inseruire pro diuisione vel circuli, vel dati anguli in partes æqua-

æquales, vel pro inscriptione regularium figurarum in circulo non solum ob prędictas causas, sed etiam in primis quia, vt rectè opponit Pappus, supponit id, ad quod est assumpta, idest proportionem rectę ad circularem lineam. Præterea queemadmodum non potest inseruire circuli quadraturæ propter extrema puncta, quæ nec habet, nec certo, nec continuato ductu signari possunt vsq; ad sectionem semidiametri, cum qua est asymptotos, ita ob easdem causas, & propter reliqua omnia sui puncta (vide eius descriptionem apud nos in cit. Ap. 2.) quæ discretè, ac geometricè incerta positione signantur, nullo modo apta est geometricæ scientificæ diuisioni anguli, vel circuli, vel figurarum regularium in eo inscriptione. Atq; hoc est quod de ea affirmauimus in citat. Apiar. 2 ruere cætera, quæ pendent à falsà quadratura. s. quam in primis profitetur linea Dinostrati ab aliquibus traducta ad alia &c. Ac ne quisquam nos reprehendat, licet nos prædictæ causę tueantur, imus etiam sub vmbram magnorum Philosophorum Geometrarum nobiscum sentientium. Quorum vnus Pappus, præter cætera, de Dinostrati pseudoquadraticis mixtę lineę descriptione sic pronũtiat. Quodam modo Mechanica est. *Ac proinde benigne accipienda est saltem ad aliquas operationes in Physica materia, quę geometricam præcisionem semper vel non requirit, vel non patitur. Addit Pappus:* Ad multa problemata ipsis Mechanicis conducit. *Ac quod a nobis hic asseritur de Dinostratèa, intellige pariter de quacũq; mixta punctuata, siue illæ sectiones conicæ sint, siue quęcunq; alię mixtarum non continuato, & certo ductu descriptarum. Ineptæ enim sunt discretis illis punctis, & incertis ductibus ad geometricas demonstrationes, non secus ac circularis linea non esset certa, & legitima pro geometricis problematibus, quæ sine circino signaretur punctis, vel ductibus interpositis inter alia aliqua puncta circino signata, &c. Nos nullis mixtis pũctuatis, sed certo, ac firmo ductu designatis lineis rectis, & circularibus vsi sumus, vt habes in antecedentibus pro circularis arcus, vel anguli diuisionibus. Vide & post propos. 16. lib. 4.*

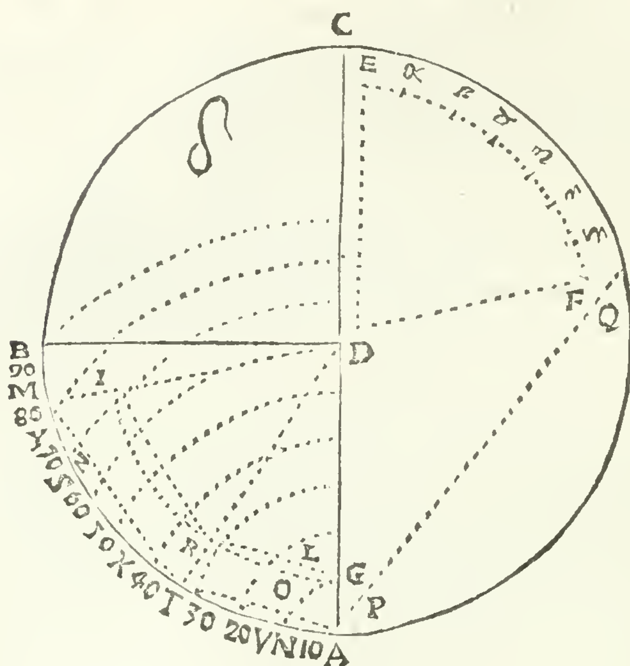
Vsus quadratricis. Dinostrati mechanicus est

§. XVI.
COROLLARIVM VI.

Dati ex eadem semidiametro arcus, quam inter se proportionem habeant.

Ve-

VElut arcus IR, RO, qui ex eadem semidiametro DG aptati ad DA, vel DB ostendunt in numeris inter AT, TM, quæ inter se proportione sint.



Aliter

In circino proportionum grad. 90.

INterpositâ enim semidiametro DG inter numeros 60, & 60, & acceptis internallis GR, RI, si ea aptentur inter numeros circini proportionum, ij indicabunt proportiones eorum arcuum. Internallum arcus GR cadet inter 33, & 3[illegible]; internallum arcus RI cadet inter 44, & 44. est ergo proportio arcus IR ad arcum RG, quæ 44 ad 33. &c.

§.17.

§. XVII.

COROLLARIVM VII.

Datus arcus quot gradus contineat.

PAtet ex antecedentibus. Dum enim arcus IG sit concentricus arcui AB, recta DI producta in M, ibi signat numerum graduũ arcùs etiam minoris IG.

Aliter

In circino proportionum.

INterposità semidiametro DG inter 60, 60, interuallum IG in quos cadet numeros crurium circini, velut inter 77, 77, accipiet ab ÿs numerum graduum arcus IG.

§. XVIII.

SCHOLION VI.

De proportione arcuum similium, & peripheriarum e vsu circini proportionum.

AT quam proportionem habent inter se arcus, non eiusdem circuli, sed diuersorum circulorum, similes tamen, hoc est qui æquales capiant angulos iuxta defin. 11. li. 3? Nempe quam habent inter se peripheriæ circulorum; scilicet quam ex antiquis Pappus lib. 5 propos. 11 dupliciter, & li. 8 propos. 22 tertio demonstrat. Peripheriæ circulorum sunt inter se vt diametri. *Quoniam*

autem

autem Archimedes de dimensione circuli demonstrat diametrum triplicatam cum ferè septima diametri parte æqualem esse circuli peripheriæ, si duorum inæqualium circulorum diametros triplicatas cũ fere septima diametri parte in duas inæquales rectas extenderis, & maioris interuallum interposueris inter numeros extremos 100, & 100 in circini proportionum ea facie, in qua est diuisio rectæ lineæ in 100 partes æquales; minoris vero interuallum aptetur inter superiores aliquos numeros, inter quos (immotà diductione inter 100, & 100) præcisè ceciderit, puta inter 50, 50, erit duarum peripheriarũ proportio subdupla minoris ad maiorem. Ac pariter arcuum similium minoris ād maiorem

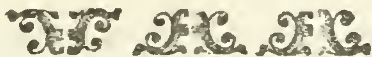
Ad praxim vero expeditorem satis erit ex arte prædicta interponere dati arcus, vel circuli semidiametrum inter numeros circini. Est autẽ proportio peripheriarum, & arcuum similium eadem quæ semidiametrorum, velut est æquemultiplicium, idest diametrorum.

§.XIX.

Geometricorum Paradoxorum amplissimus campus indicatus, in quo seges est de solutis pene omnibus problematibus Geometricæ Philosophiæ vnicà, eàq; datà & non variatà circini diductione.

PRimum huius Ærarij tomum iam typis expresseram, cum incidi forte fortuna in librum tertium quartæ partis de numeris, & mensuris à Nicolao Tartalia italicè perscriptæ. In quo libro profitetur (ac præstat toto eo libro) se soluere pene omnia problemata non solum Euclidis, sed alia plurima geometrica, datà qualibet, & inuariatà circini diductione. Post Tartaliam incidi in libellos quinq; Io. Bapt. Benedicti, in quibus & ipse omnia Euclidis problemata (eius verbis vtar) vnà circini datà aperturà resoluit. Exultaui dum vidi re ipsa confirmata ea paradoxa, quę ego indicaueram in to. 1. huius Ærarij ad prop. 12, § 11, & 12. Ac censui ad hãc propos. 9, (in qua est primum huius libri 6 problema, quod facile soluitur vnica datà, & inuariata circini diductione) non fraudandos Tyrones

rones hac amplissima cognitione paradoxorum numero infinitorum, quibus instructi à Doctore Geometrico liceat iucundà, & varià nouitate condire, ac ornare singula, & omnia problemata Euclidis Elementaria, & alia plurima extra hæc elementa. Viae, amabo, ad singula citatos Authores, vt vulgata problemata modis non vulgatis exerceas. Nos ne Tomi augmentum, ac molem affectare videamur, omittimus hìc, & alibi in hoc Aerario apponere quæ satius ducimus satem, ac tantùm indicare vnde habeantur. &c.



Propos. X. Probl. II.

Datam rectam lineam insectam datæ rectæ sectæ similiter secare.



OPorteat datam insectam AB similiter secare, vt secta est AC. Sit AC in punctis D, E secta. Collocentur AB, AC vt angulum quemcumque contineant, & ducatur CB; atq; per D, E agantur ipsi BC parallelæ DF, EG; & per D ipsi AB ducatur parallela DHK; & erit vtrumque FH, HB parallelogrāmum. [a] Sunt ergo tam DH, FG; quàm HK, GB æquales: & cum ipsi KC trianguli DKC ducta sit parallela HE, [b] erit vt CE ad ED, ita KH ad HD. [c] Est autem tam KH ipsi BG, quàm HD ipsi GF æqualis; est ergo vt CE ad ED, ita BG ad GF. Rursus [d] cùm lateri EG trianguli AGE ducta sit parallela FD, erit vt ED ad DA, ita GF ad FA. Ostensum est autem esse vt CE ad ED, ita BG ad GF; est ergo vt CE ad ED, ita BG ad GF; vt verò ED ad DA, ita GF ad FA: data ergo recta insecta AB similiter secta est vt secta AC. Quod oportuit facere.

a prop os. 34. 1.
b prop. 2. 6.
c propos. 34. 1.
d prop. 2. 6.

§. I.

SCHOLION I.

Conueniunt 9, & 10 Propoſitiones.

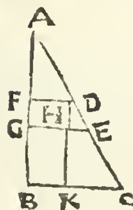
Nam propoſitio 10 ipſa etiam docet, vt 9, imperatas partes auferre, ſiue ſecare in linea data; & 9, dum iuxta ſectum alterum trianguli latus etiam alterum ſecat, docet, vt in 10, ſecare lineam datam iuxta proportionem alterius ſectæ.

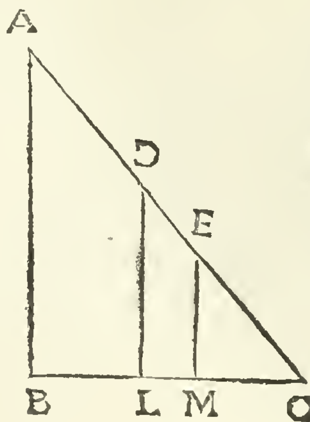
§. II.

PROBLEMA I.

Aliter demonſtrare prop. 10.

Euclidis conſtructio, & demonſtratio in prop. 10 nititur 2 propoſ. huius, quemadmodum & antecedens 9. Nos, quemadmodum ad 9, conſtructionem, & demonſtrationem ex 4 propoſ. deduximus, ita & nunc ad hanc 10.





Nam in figura Euclidis, omiſſis parallelis DF, EG, nos e diuiſæ AC punctis D, & E ducimus DL, DM parallelas datæ, ac diuidendæ AB, ſuntque eæ parallelæ partes ſectæ AB ſimiliter vt AC.

§. III.

COROLLARIVM I.

EAdemq; opera ſingula latera trianguli ABC ſecta ſunt in proportione ſecti lateris AC. Nam & per 2 huius, propter EM, DL parallelas baſi AB, ſecta ſunt in eadem proportione latera CA, CB, & per 4 huius, propter triangula æquiangula ABC, DLC, EMC, vt CE ad EM, & vt CD ad DL, ſic CA ad AB; & permutando, vt CE, CD ad CA, ſic EM, DL ad AB; ergo AB ſecta ad quãtitates ipſarum EM, DL, erit ſecta in proportione lateris ſecti AC.

§. IV.

COROLLARIVM II, & — compendium ex 10 prop. Eucl. pro expeditiſſimà Harmonicà, Gnomonicà, ſiue horarià, & quacunq; alia linearum diuiſione.

SI vtraq; vel ſaltem altera linearum diuiſarum in 100 partes, in circino proportionum, ſemel notata ſit aliquibus ſignis ad numeros diuiſionum, & conſonantiarum harmonicarum, quas paullo ante ad antec. 9 propoſ. in §8, in eo circino indiauimus, ſtatim quæcunq; data recta linea poterit harmonicè diuidi iuxta vſum, quem docuimus, & iuxta cautiones in Scholio poſitas.

Sic, notatis in vtroque circini latere diuiſionibus lineæ Aequinoctialis, habebis in promptu quo diuidas, pro horis deſcribendis, datæ cuiuſcunq; lineæ Aequinoctialis quantitatem, ad horaria, præſertim horizontalia expeditiſſimè aſſignanda; ac pari ratione pro alijs linearum diuiſionibus ad vſus quoſcunq; inſignes.

§.V.

PROBLEMA II.

Aliter 1.—

--- Datam insectam secare vt altera secta est, ex vsu circini proportionum.

Vide inferius § 14, 15, 16, 17, vbi ex circino proportionum secamus datam in qualibet trium proportionalitatum, non solum geometricâ, sed Harmon. Arith. &c.

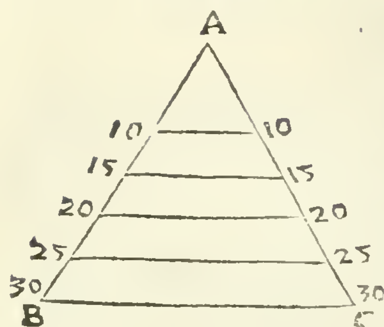
§.VI.

SCHOLION II.

Theorice, atq; vniuersa inuentio, & ars linearū in, & ex circino proportionum prodit ab vsu 10 propos. Eucl. iuxta nostram constructionem eius propositionis è quarta propos. huius lib. 6.

DVm docet Euclides datam rectam similiter secare, vt altera data secta est, fontem aperit ingenioso compendio circini proportionum. Nam quæcunq; lineæ in lateribus eius circini ductæ, ac sectæ sunt, siue Metallicæ, siue Geometricæ, siue Arithmeticæ, (vt aliqui eas variè vocant pro vsibus, ac diuisionibus varijs earum linearum) sunt exemplaria, iuxta quæ secantur quæcunq; aliæ datæ lineæ, dum eæ transferuntur inter extremos circini numeros, & fiunt quasi bases trianguli, cuius latera sunt circini crura, ac tandem eæ bases & diuisæ, & sectæ intelliguntur ab interuallis, quæ accipiuntur parallela basibus diuidendis, ad eum scilicet modum, quem nos vsurpauimus in constructionibus, & demonstrationibus aliter institutis, quam ab Euclide in prop. 9. & 10.

Vide



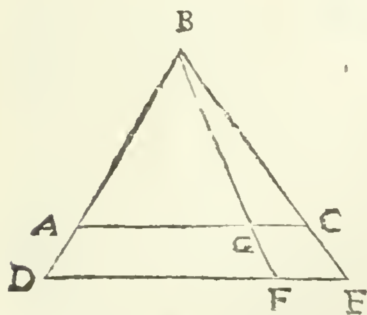
Vide figuram trianguli æquilateri ABC, cuius duo latera AB, AC sint quasi crura circini diuisa in 30 partes æquales. Spatium rectæ diuidendæ aptatur inter B, & C ad extrema laterũ iuxta id spatium diductorum. Atq; vt ipsa BC diuidatur similiter vt latera AB, AC in 10, 15 25, &c. per eas diuisiones ducãtur parallelæ basi, quæ, secta ad quantitates earum parallelarum, erit similiter diuisa, vt AB, AC, per 4 propos. huius permutando vsurpatam, iuxta ea quæ habes in demonstratis aliter hisce propos. 9, & 10 huius.

§. VII.

PROBLEMA III.

Aliter 2.—

Ex Maurolyco datam rectam secare similiter, ac altera secta est.



SI oporteat lineam BE secare secundum proportionem ipsius BD sectæ in puncto A; tunc coniũgam DE, ipsiq; æquidistantem ducam AC, quæ secet ipsam BE in puncto C. Eritq; sicut BA, AD, sic BC, CE.

SCHOLION.

D*Emonstratio est à prop. 2 huius latera enim AD, AE à parallela AC secta sunt proportionaliter in A, & C.*

Ali-

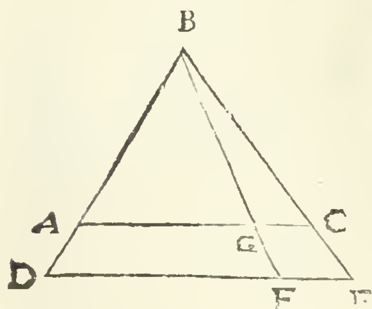
Aliter 3.

VEl si linearum æquidistantium AC, DE alterà diuisâ, libeat reliquam similiter diuidere, coniungam earum extrema ductis DA, EC ad punctum B concurrentibus (concurrent enim, si AC, DE sunt inæquales) & punctum concursus B iungam cum puncto lineæ diuisæ, ducta BG, quæ continuata secabit reliquam in puncto F ita, vt sicut est AG, GC, sic sit DF, FG. Quod ex similitudine triangulorum, per secundam sexti, constat. *Sic Maurolycus in cit. lib. 2. c.6. de lineis horarys.*

§. VIII.

LEMMA.

In triangulo quouis si vni laterum parallela recta agatur, & ex quocumque puncto illius lateris ad angulum oppositum recta educatur linea, diuidentur linea parallela, & latus illud in easdem rationes.



E*Rit hoc lẽma confirmatorium assertionis Maurolycanæ, dum in fine præcedentis proximè problematis affirmat:* ex similitudine triangulorum constare per secundam sexti. *Fortasse intelligendus est de 4 sexti. Est vero lemma hic propositum ex Commandino in comment. ad propos. 6 lib. 1. Conic. Apollon. Quod nos aliter, ac breuius sic expedimus. Ex corollario 1. apud nos ad 4 propos. huius. Triangula BAG, BDF, item BGC, BFE sunt similia, propter parallelam AC basi DE. Ergo vt DF ad FB, sic AG ad GB; & vt EF ad FB, sic CG ad GB. Ergo ex æquo, per 22 quinti, vt DF ad AG, ita FE ad GC. Ergo rectè Maurolycus duas parallelas AC, DE diuisit proportionaliter in G, F.*

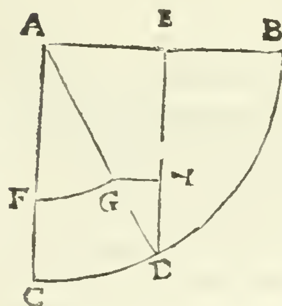
§. 9.

§. IX.

PROBLEMA IV.

Aliter 4. —

--In Quadrante circuli lineam parallelam ſemidiametro ſimiliter, ac ſecta eſt ſemidiameter, ingenioſè ſecare.



Accipe ab eodem *Maurolyco.* Sit in quadrante circuli ABC linea DE alteri ſemidiametrorũ, vtpote ipſi AC, æquidiſtans: ſitq; AC vtcunq; ſecta in puncto F. Si velim ipſam DE ſimiliter ſecare, tunc coniugam AD, ponamque per circinum ipſi AF æqualẽ AG de ipſa AD abſciſſam: & a puncto G ducam ipſi DE perpendicularem GH. Sic enim GH ſecabit in puncto H ipſam DE ad proportionem ipſius AD (per ſecundam ſexti) & ideo ipſius AC. Erit enim, ſicut AG, GD, hoc eſt, ſicut AF, FC, ſic EH, HD; ſicut facere volui.

Contra verò proponatur DE ſecta in puncto H. Si velim ſimiliter ſecare AC, coniuncta tunc prius AD, excitabo a puncto H ipſi DE perpendicularem, quæ ſecet ipſam AD in puncto G. Et per circinum faciam ipſi AG ęqualem ipſam AF. Sic enim eodem Syllogiſmo fiet ſicut EH, HD, ſic AF, FC. Quod faciendum fuit. Sed hæc, & alia huiuſmodi notiora ſunt, quàm canibus (vt aiunt) Delia noſtris.

SCHOLION.

Datas rectas quotcumque, ac inæquales, quarum tamen maxima ſit minor, quàm ea, ad cuius ſimilitudinem ſecandæ ſunt) ſimiliter,

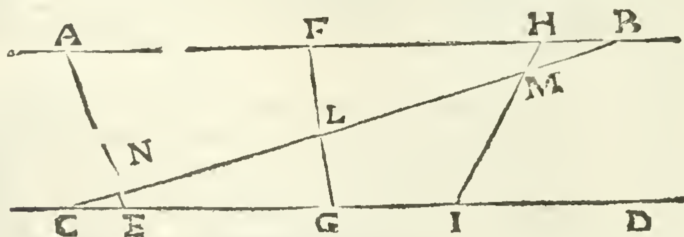
liter, ac altera, simul omnes secare; etiam aliter, quàm in antecedentibus modis, vide ad 31 tertij, in tertia parte huius 2 Tomi, vbi ex 31 propos. demonstratur.

§. X.

THEOREMA.

Inter easdem parallelas lineæ mutuo secant se in eadem proportione.

Quod ad 33 propos. lib. prim. § 5, iuxta exigentiam eius loci, demonstrauimus de sola bisariatione mutuà linearum inter easdem parallelas, hic, vt ibi polliciti sumus vniuersaliter proponimus, & demonstramus de sectione in eadem, ac qualibet proportione. Theorema hoc, quod potuissemus apponere ad 4 huius, à qua demonstratur, huc tamen protulimus, vbi ex praxibus diuidendarum linearum in quacunq; proportione, figuræ aliquæ (præsertim à Maurolyco constructæ) sunt, in quibus theorema etiam hoc licet demonstrare; scilicet, dum per parallelas siue inter parallelas diuiduntur lineæ, diuidi etiam per mutuas sectiones in eadem proportione. Inspice, si lubet, figuram Maurolyci ad 9 huius, § 6, atque eidem applica quæ nos hic demonstrauimus in apposita nostra figura.



Sint parallelæ AB, CD, & inter eas variè ductæ AE, FG, HI, quas transuersè secet inter easdem parallelas recta BC; dico in sectionibus N, L, M mutuò secari in eadem proportione ita, vt quemodmodum se habet HM ad MI, ita BM ad MC, & vt FL ad LG sit BL ad LC, & vt AN ad NE ita sit BN ad NC.

Nam

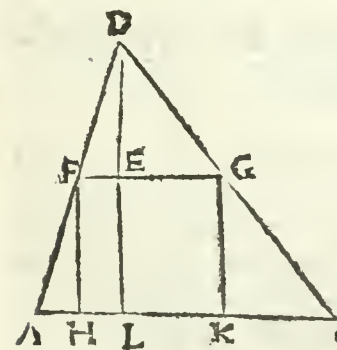
Nam triangula HBM, MCI, item FBL, LCG, item ABN, NCE sunt bina inter se æquiangula. Sunt enim alterni ad B, & C, ad H, & I; ad F, & G, ad A, & E, & ad sectiones, N, L, M oppositi æquales.

Tu singillatim, mi, Tyro, persequere quæ nos breuitatis gratia, in re perfacili tantùm indicauimus. Itaq; in duobus æquiangulis triangulis HBM, MCI, vt BM ad MH, sic CM ad MI, per 4 huius, ergo permutando, vt BM ad MC, sic HM ad MI. In æquiangulis BFL, LCG vt BL ad LF, sic CL ad LG, & permutando vt BL ad LC, sic FL ad LG. In æquiangulis BAN, NEC vt BN ad NA, sic CN ad NE, & permut. vt BN ad NC, sic AN ad NE. Quare in mutuis sectionibus inter easdem parallelas secant se rectæ binæ in eadem proportione.

§. XI.

VSVS 10 Propositionis, & Praxis describendi quadratum in dato triangulo.

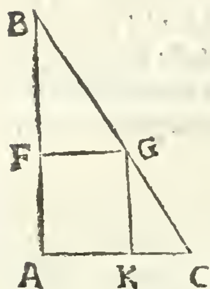
IN Scholio ad hanc 10 proposit. Eucl. Commandinus demonstrat praxim, quæ vtitur hac eàdem propositione 10 pro descriptione quadrati in dato triangulo. Saltem praxim hic libet indicare.



Sit datum triangulum acutangulũ ADC, in quo proponatur descriptio quadrati. A quolibet angulorum D in appositam basim demittatur occulta perpendicularis DL, eaq; secetur in E secundum proportionem, quam habet basis ad perpẽdicularem (quasi ex basi AC, & perpendiculari DL vna esset recta composita, & secta, secundum quam secanda sit DL, iuxta hanc 10 propos.) ita vt sint segmenta DE, EL inter se, velut est DL ad AC; & per sectionem E agatur FG parallela basi AC. Itemq; ex punctis F, G demittantur in basim duæ FH, GK parallelæ perpendiculari DL; eritq; quadratum GH inscriptum triangulo acutangulo ADC.

Pari modo peragenda erit praxis pro descriptione quadrati in obtusangulo, demissà perpendiculari ab angulo obtuso in basim, & diuisà secundum proportionem basis ad perpendicularem. &c.

Pari modo & in triangulo rectangulo demissa perpendiculari ab angulo recto. &c.



Sin autem lubeat in rectangulo triangulo quadratum ita inscribere, vt duo quadrati latera sint communia segmentis laterum angulum rectum constituentium, vt in triangulo rectangulo ABC, alterutrum laterum AB secandum erit in F similiter vt se habent latera AB, AC inter se, ductisq; FG, GK parallelis perpendiculari AB, & basi AC, erit quadratum FK, habens communia duo latera AF, AK, communia cum segmentis perpendicularis, & basis, inscriptum in triangulo rectangulo ABC.

Quarum praxewn demonstrationem ingeniosam habes apud Commandinum ad hanc 10, sed hic à nobis non necessario describendam, vbi nunc Tyronibus solummodo praxim vtilem, & iucundam in vsu huius 10 propos. posuimus.

§.XII.

SCHOLION III.

Fundamentum Geodesiæ in 9, & 10 propositione Euclidis.

INter cæteras vtilitates (vt aliquas videbis in sequentibus) quæ manant ex hisce propositionibus 9, & 10 lib. 6. elementorum geometr illa non exigua est, quòd ex hisce linearum diuisionibus pendet Geodesiæ pars maxima. Diuisis enim (vt indicauimus ad 1 propos. huius) lineis basium è præscripto harum propositionum, diuiduntur etiam triangula, & parallelogrammata in proportione diuisionis basium, atq; etiam diuiduntur reliquæ planæ figuræ, quibus parallelogrammata, & triangula constituta sunt æqualia. Quorum exempla habes apud nos ad 1 prop. huius in trapezys aliquibus, in pentagonis. &c.

§.13.

§. XIII.

SCHOLION IV.

Lemmatica de ſpeciebus Proportionalitatum pro vſu 9, & 10 propoſit. huius in linearum partibus carpendis, ſiue lineis in partes trium præcipuarum Proportionalitatū diuidendis.

1 *HÆ 9, & 10. propoſitiones dū docent datæ lineæ partē lubitam carpere, eàdem opera docēt lineam datam diuidere in lubitas partes, quæ carpuntur in data rectā; vnde etiā prodit diuiſio lineæ datæ iuxtà diuiſam alterā, vt in ſequentibus problematibus videbis. Iam vſum aliquem indicauimus in linea carpenda, ſiue diuidenda per partes in ſonora chorda muſicè reſonantes; mox docebimus etiam diuidere lineam in proportionalitate harmonica, cuius diuiſio differt à diuiſione priori muſica, non ſolum quòd muſica potius praxi, ac auribus, harmonicæ proportionalitatis diuiſio potius intellectui, ac theoriæ proponitur; ſed etiam, quòd muſica diuiſio lineæ certi ordinis, ac formæ eſt in ſuo quoq; genere, qualem nos in genere diatonico exhibuimus, at harmonicæ proportionalitatis in lineà diuiſio eſt varij ordinis partium interſe, in quarum numeris quoniā non ſemper, vt in muſica diuiſione, ſed plerumq; ſolent eſſe proportiones, quæ in chorda ſonora indicāt muſicas conſonātias, ideò harmonica earum partium, ac numerorum proportionalitas apellata eſt. Inferius videbis exemplum aliquod ex Pappo.*

Quid differat lineam diuidere in partes harmonicas, & diuidere in harmonicà proportionalitate.

2 *Ac licet in Philoſophia Geometrica precipui vſus ſint lineæ diuiſæ potiùs in proportionalitate Geometricà, quàm in alijs generibus Proportionalitatum, tamen ad indicandam copiam, quæ manat ab hiſce 9, & 10 propoſ. ac præterea quia reliquorum generum, etiam præter geometricam, proportionalitates habent mirificas proprietates (quales produnt qui de ijs copiosè perſcripſerunt in numeris, à quibus etiam ad linearum partes transferri poſſunt, vt à nobis exempla videbis in 3 parte huius 2 tomi ad 5 propoſ. lib. . Eucl. vbi de affectionibus rectæ lineæ in arithmetica proportionalitate) ideò non diſſimulandum duximus afferre breuiter exemplum ſaltem aliquod diuiſionis*

linearum in præcipuis generibus proportionalitatum, eoque libentius, quod hæc linearum diuisio (præsertim modis, qui mox à nobis tradentur) in triplici proportionalitatum genere ab alijs intacta est.

Decem genera proportionalitatum apud Pappũ. Proportionis cuiusq; prĩcipium est à proportione æqualitatis.

3 Pappus lib. 3. in definitionibus post prop. 5, & 16 proponit 10 genera proportionalitatum, ac de singulis varias habet propositiones, atq; ostendit quo pacto vnaquæq; earum 10 proportionalitatum per geometricam analogiam, siue proportionalitatem inueniri possit. Affirmat proportionis cuiusq; principium esse à proportione æqualitatis, & reliquas omnes proportionalitates prodire à geometrica. Quarum affirmationum demonstrationes geometricas affert: atq; alij etiam in numeris ostendunt: præter cæteros vide Clauium non solùm in copiosa digressione de proportionibus, ad definit. 4. lib. 5. Eucl. sed etiam post propos. 37. lib. 9. Euclid. Nobis hìc nunc sat erit solùm definitiones trium præcipuorum generum afferre ex Pappo, ac nostra nescioque apponere.

Quid differat mediatas ab Analogià.

Igitur Pappus: Differt medietas ab Analogia. Nam si quid est Analogia, & hoc medietas est; sed non contrà. Medietates enim tres sunt Arithmetica, Geometrica, & Harmonica. Arithmetica quidem medietas dicitur, quando tribus existentibus terminis, medius vnum extremorum pari excessus quantitate superat, & à reliquo superatur; vt habet 6 ad 9, & ad 3, vel quãdo fit vt primus terminus ad se ipsum, ita primus excessus ad secundum. prima verò intelligere oportet superantia.

Tres medietates. Singula quæ sit.

Geometrica medietas, quæ propriè Analogia dicitur, quando fit vt medius terminus ad vnum extremorum, ita reliquus ad medium: vt habet 6 ad 12, & ad 3 1; & aliter quando fit vt primus terminus ad secundum, ita primus excessus ad secundum.

Harmonica autem medietas est quando medius terminus eàdem parte & superat vnum extremorum, & à reliquo superatur· vt habet 3 ad 2, & 6; vel quando fit vt primus terminus ad tertium, ita primus excessus ad secundum, vt habent 6, 3, 2.

4 Tyronibus verba Pappi breui compendio, & clarè explico.

Trium proportionalitatum breuis & aperta expositio.

Proportionalitas Arithmetica est, quæ progreditur per differentiam eamdem, siue continuatè 2, 4, 6 per 2, siue discretè 4, 7, & 11 per 3, & 4. Geometrica, quæ per similem proportionem 2, 6, 18, vt est tripla ipsius 2 ad 6, sic tripla ipsius 6 ad 18, & discretè 2, 3, & 12, 18 per sesquialteram. Harmonica cùm eadem est proportio (v.g. in tribus) terminorum, siue extremorum inter se, quæ & differentiarum 3, 4, 6, vt duplus est 6 ipsius 3; sic differentia 2 inter 6, & 4 est dupla differentiæ inter 4, & 3. His positis, ad problemata veniamus. Videat

deat Geometricus Doctor miras, & iucundas proprietates trium prædictarum proportionalitatum comparatarum inter se apud Clau. citat.

§. XIV.

PROBLEMA V.

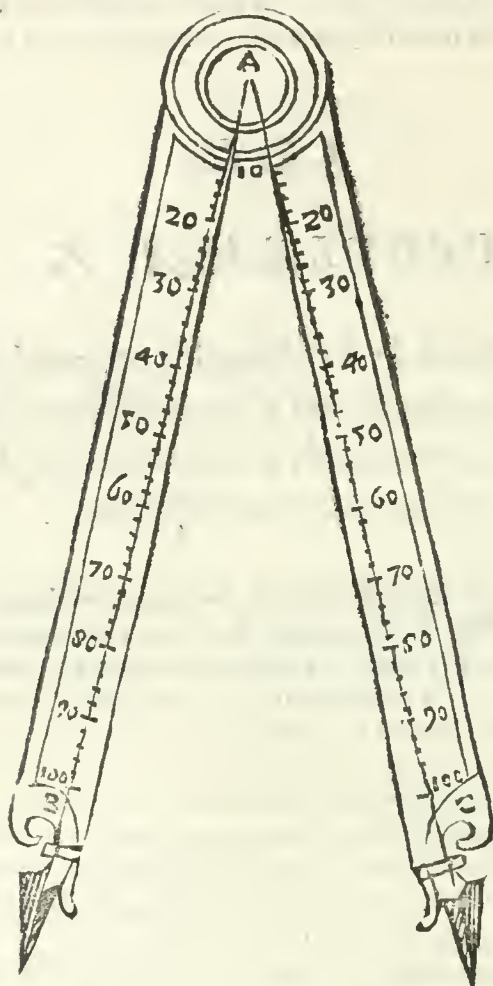
Datam rectam in Arithmetica proportionalitate progrediente per datam differentiam, diuidere geometricè, atque etiam organicè in circino partium æqualium.



Sit verbi gratia in tres partes arithmeticè proportionales progredientes per 2, diuidenda recta quæpiam, in fig Eucl prop 9 ipsa AB. Accipe numerum arithmeticè progredientem quemlibet in tribus terminis 2, 4, 6, & in alia qualibet linea indefinita lubito interuallo carpe partes æquales numero 12, deinde ad eius exemplum diuide datam AB per aliquem ex traditis modis antecedentibus ad has 4, & 10 propos. eritq; in data AB proportionalitas arithmetica segmenti cōstantis ex 2 partibus ad sigmentum secundum constans ex 4 partibus, & secundi ad tertium sigmentum constans ex 6 partibus

Aliter in circino partium æqualium, ea facie, vbi linea iam diuisa est in 100 partes æquales Accipe in latere AB per numeros tria sigmenta maiora (quia in circino incommodat exiguitas spatij numeris monadicis) scilicet æquemultiplices maiores numeros in arithmetica proportionalitate, verb.gr primum sigmentum a centro A ad 10; secundum sigmentum ab eodem A ad 20, tertium ab A ad 30. Atq; est primum sigmentum pro 1, secundum pro numero 2, quia spatium 20 est duplum spatij 10, siue segmēti primi 10, tertiū segmētum est pro numero 3, quia spatium 30 est triplum primi sigmenti 10, itaque est proportionalitas trium sigmentorum arithmetica progrediens per eamdem differentiam vnitatis inter numeros 1, 2, 3. diuiso sic arithme-

me-



meticè iam semel vtroq; latere AB, AC in circino ad terminos 10, 20, 30, expeditissimum erit quamlibet datam iuxtà arithmeticam proportionalitatem diuidere. Nam si quantitatem datæ rectæ interponas inter numeros 20, & 30 circini partium æqualium, & immotà perstante circini diductione ad quantitatem interpositi interualli, si accipias interualla inter 0, & 10, itẽ inter 10, & 20, vsq; interuallis secueris datã rectam, ea erit secta in arithmetica proportionalitate.

Similem in modum, pro alia quauis progressione arithmeticæ proportionalitatis, diuidatur latus AB in numeris iam notatis, pro tripla, quadruplà &c. & ex ea diuisione lateris AB diuidetur in lubita progressione data recta arithmeticè. §. 15.

§.XV.

PROBLEMA VI.

Datam rectam in propoſitâ ſpecie harmonicæ proportionalitatis diuidere geometricè, atq; etiam organicè in circino partiũ æqualium.

Simili modo, quo diximus de arithmeticâ lineæ diuiſione, duc lineam indefinitam, & finge tres numeros in harmonica proportionalitate propoſitos eſſe 2, 3, 6, in quibus vt tertius 6 eſt triplus 2 primi; ſic 3 differentia ipſius maximi ad medium 3 eſt tripla ipſius 1 differentiæ inter medium 3, & minimum 2. Itaq; ad lubitum circini interuallum carpe in lineâ indefinita partes 11 æquales; ſegmentum enim primum duarum partium, & ſecundum trium, & tertium ſex partium erunt inter ſe in proportionalitate harmonica. Ac deinde vteris ſic linea diuiſâ ad diuiſionem alterius datæ pro harmonica proportionalitate iuxtà modos Euclidis, & noſtros ad has 9, & 10 propoſ. quibus data linea diuiditur vt altera.

Organicè verò in circino proportionum accipe numeros maiores æquemultiplices, v.g. à centro A interuallum vſq; ad 10, ideſt ſegmẽtum lineę AB, in 100 partes diuiſæ, conſtans ex duobus quinionibus pro primo numero 2. harmon. proportionalit. deinde ab eodem A in linea AB accipe ſecũdum interuallum, ſiue ſigmẽtum ad numerum 15, quod conſtat e tribus quinionibus pro ſecundo numero harmonicæ proport. Deniq; pro tertio numero harmon. 6, accipe interuallum, ſiue ſegmentum conſtans è ſex quinionibus ab A ad numerum 30; 10, 15, 30: vt 30 triplus primi 10, ſic 15 differentia ad 5 differentiam, &c. Datam verò lineam diuidendam interpone inter numeros 30, & 30, eruntq; interualla inter 10, & 10, inter 15, & 15, iuxtà quæ data recta ſi ſecetur, conſtabit è tribus ſigmentis harmonicam inter ſe proportionalitatem habentibus; nempe vt ſigmentum extremum maximum ad minimum, ſic differentia inter maximum, & medium ad differentiam inter medium, & minimum.

Pro alijs ac varijs formis proportionalitatis harmonicæ ſimiliter operabere.

§.16.

§. XVI.

SCHOLION V.

De datæ rectę sectione in data proportionalitate geometrica. Faciliùs, ac breuius, quàm in antecedentibus Problematibus secare datas rectas in qualibet trium proportionalitatum. Pro Apiarijs aliqua.

EX dictis in duobus antecedentibus problematibus patet etiam modus secandi datam rectam iuxtà propositam aliquam speciem proportionalitatis geometricæ, operando in modum eius similem, quem ibi docuimus. Qui quidem in vsu circini partium æqualium est si quando primi denarij partes in eius instrumenti constructione notatæ non sint. At verò generatim, atq; vniuersaliter loquendo, ac sine cura accipiendi vel denarios, vel quiniones partium pro vnitatibus (vt in antecedenti problemate fecimus) sed simplices numeros accipiendo, habes longe facillimum, ac breuissimum modum diuidendi datam rectam in quamlibet proportionem in nostris Apiarijs Philosophiæ Mathematicæ, Apiar. 12. ad banc 10 Euclid. propos. in applicatione, & vsu 28, numero marginali 2; vnde deducitur modus expeditissimus pro sectione datæ rectæ in qualibet trium, atq; aliarum, si quæ sint iuxtà Pappum, proportionalitatum. Modus est per expositionem segmentorum extra totam; antecedentes modi fuerunt componendo segmenta in eadem sectà. &c.

Verba ex Apiarij sunt: Sit secanda data linea in tres partes, ita vt prima ad secundam se habeat vt 6 ad 3, secunda pars ad tertiam vt 3 ad 12. Additis inter se numeris 6, 3, 12, & facta summà 21, accipiatur in latere circini proportionum numerus 21, & interuallum lineæ secandæ ponatur inter 21, & 21. Deinde accipiantur interualla pro primà parte inter 6, & 6; pro secunda inter 3, & 3; pro tertia inter 12, & 12, quæ erunt partes lineæ ad datam in altera lineà rationem secandæ.

Iuxtà praxim hanc prædictam secturus lineam in tres, vel plures

par-

partes proportionalitatis harmonicæ ad præscriptum propositi harmonici numeri verbi gratia 2, 3, 6, addantur ij numeri inter se in summam 11, tum accipe interuallum à centro circini (partium æqualium 100) ad 11. datæ rectæ harmonicè secandæ quantitatem interpone inter numeros circini 11, & 11, atq; interualla inter 2, & 2, inter 3, & 3, inter 6, & 6 partium æqualium in circino, erunt sigmēta datæ rectæ diuisæ in tres partes habentes inter se proportionalitatem harmonicam 2, 3, 6.

Sic in arithmetica proportionalitate numerorum 2, 4, 6, summà eorum 12 applicatà circino proportionum, & interposito interuallo datæ rectæ secandæ inter 12, & 12, interualla inter 2, & 2, inter 4, & 4, inter 6, & 6 dant sectiones proportionalitatis Arithmeticæ. &c.

Pariter in proportionalitate Geometrica. Itemq; in omnibus singularum proportionalitatum speciebus varijs, quas variæ numerorū formæ significarint.

Ab exemplis hìc positis quemadmodum & ab alijs vide, Lector amice, quantum fæcunditatis aliquando lateat in aliquibus Apiariorum propositionibus, quæ paucis verbis à nobis ibi appositæ sunt. Habes enim in citato exemplo è 12 Ap. tam copiosum, & genericū modum diuidendi facillimè ad lubitam proportionem lineam datam. Quemadmodum & ad lib. 4. post propos. 16 Eucl. vniuersale id problema excitandi facillimè, atq; expeditissimè quamlibet regularem figuram super datà rectà, prodit a propos. 3, vbi docemus facillimè, dato latere polygoni regularis, inuenire semidiametrum circuli circumscribendi, in Apiar. 12, ad lib. 4. Eucl. Hæc pro re nata ijs indicata sunt, qui vel leuiter, vel liuidè alienas lucubrationes legunt, & leuiter etiam, ac liuidè de ijs pronuntiant.

§. XVII.

COROLLARIUM III.

Et PROBLEMA VII.

Datam rectam in quinque sigmenta organicè, & geometricè concidere constantia tres simul

mul proportionalitates, geometricam, harmonicam, arithmeticam ex vsu 10 propos. huius Eucl.

Quod Pappus lib. 3. prop. 15. exhibet operosius, atq; in quinque lineis problema hic à nobis propositũ, nos in vnica linea expeditissimè præstabimus è circino proportionum, iuxtà exempla in antecedenti Scholio, à quo corollarij loco hoc prodit in vsum singularem 10 huius propos. Eucl.

Ex Pappo accipio numeros 3, 4, 6, 9, 12. minimos constantes in dupla proportione tres simul in vna serie proportionalitates. In tripla etiam proportione minimi cõstantes proportionalitates tres 2, 3, 6, 12, 18. In serie dupla tres priores sunt in harmonica proportionalitate, nam vt 6 est duplus ipsius 3, sic differentia 2 inter 6, & 4 est dupla differentiæ inter 4, & 3. Secundus, tertius, & quartus, 4, 6, 9 sunt in Geometrica proportione sesquialtera, vt enim 9 continet ipsum 6 semel ac eius dimidium, sic 6 continet ipsum 4 semel, ac eius dimidium. Tertius, quartus, & quintus sunt in arithmetica proportionalitate, 6, 9, 12; habent enim eandem differentiam 3 inter se. In numeris proportionis triplaris agnosce, mi Tyro, tute tres easdem proportionalitates.

Igitur iunge in vnam summam numeros 3, 4, 6, 9, 12, eritq; numerus 34. In circino partium accipe interuallum à centro A ad numerum 34. Datam rectam interloca inter numeros circini 34, 34. Interualla inter 3, 3, inter 4, 4, inter 6, 6, inter 9, 9, dant segmenta, quibus concisa data recta conficit vnam rectam sectam in triplici simul proportionalitate.

Geometricè verò ex vsu 10 propositionis huius Eucl. sic. Duc rectam indefinitam; atq; in eà accipe lubito interuallo partes 34. datam diuidendam iunge in angulum cum diuisa, atq; operare iuxtà 10 propos. Eucl & iuxtà alios modos geometricos à nobis ad eã, diuiseris geometricè datam in triplici simul proportionalitate, ac faciliùs in vnà, quàm Pappus in quinque lineis exhibuit propositionem nostri huiusce Corollarij.

SCHOLION VI.

Pro praxi organica præcedentium animaduersio.

Exemplo

EXemplo Pappi datos numeros proportionalitatis, siue proportionalitatum, iuxta quos diuidenda sit data recta, traduci to ad minimos, primum numerum imminuendo ad vnitatem, vel binarium, & seriem continuando in minimis, iuxtà proportionalitates datorum maiorum numerorum, tum ob alia, tum in primis pro organica in circino partium operatione, ne summa datorum numerorum excedat centenarium, siue alium numerum, in quem latus circini diuisum fuerit, atque operationem organicam fallat; ac etiam ne geometrica lineæ diuisio iuxta maiores numeros fiat productior, atq; incommodet. &c.

§. XVIII.

PROBLEMA VIII. &

Vsus 10 Propos. Eucl. in inuetione facillima mediæ in harmonica proportionalitate tam organicè, quàm geometricè.



ALiqui ex Pappo prolixius, nos sine Pappo breuius, ac faciliùs ex hac 10 propos. Eucl. exequemur propositum problema, quod licet videatur pertinere ad 13 prop. Eucl. inferius, vbi de inuentione mediæ in geometricà proportionalitate, tamen hìc nos absoluimus, quia per nos immediatè manat eiusdem solutio ab hac 10 propos. Eucl. atq; etiam vt Tyrones videant ad quã præclara continuò perducat hæc eadem Euclidiana propositio.

Sint datæ duæ rectæ AB, AC, quæ in commune segmentum componantur, iunctis extremis in commune punctum A. Earum differentia CB, quà maior AB superat minorem AC, secetur ex hac 10 propos. Euclid. (per modos organicos, vel geometricos in antecedentibus) in D similiter, vt secta est composita ex duobus segmentis AB, AC, hoc est, vt AB ad AC, sic fiat BD ad DC. Dico segmentum AD esse mediũ

in proportionalitate harmonica inter datas AB, AC. Quoniam enim differentia BD, qua maior AB superat mediam AD, se habet, per constructionem, ad differentiam DC, qua media AD superat minorem AC, vt se habet extremarum maior AB ad minorem extremam AC: ergo, iuxtà definitionem harmonicæ proportionalitatis, sunt tres AB, AD, AC harmonicè inter se proportionales, ac media AD, quæ quærebatur, inuenta est. Ita nos aliter, ac paucis, ac sine alijs vel apud Pappum, vel pluribus, & prolixioribus apud alios post Pappum.

§. XIX.

SCHOLION VII.

Vsus amplissimi propos. 10 indicati in vniuersa Geometria, & Stereometria.

EX diuisione lineæ iuxtà datam proportionem in triplici genere proportionalitatis siue singillatim, siue mixtim sumptæ, pendent constitutiones, diuisiones, auctiones &c. non solum planarum omnium figurarum, sed omnium etiam solidarum, iuxta quodlibet genus, & speciem proportionis, si nimirum reducantur vel ad parallelogrāmata, vel ad parallelepipeda intra easdem parallelas lineas, vel intra eadem plana parallela. Nam prout bases lineares, vel planæ fuerint diuisæ, &c. sic & figuræ iuxtà 1 prop. huius sexti, & propos 32. vndecimi, &c. Vide quàm amplè pateat huius 10. propos. vsus.

§. XX.

PROBLEMA IX.

Datam circularem lineam insectam datæ circulari sectæ similiter secare duplici modo.

Quem-

Quemadmodum 9 antec. prop. traduximus etiam in vsum circa circularẽ lineam; sic & hanc 10 traduximus ad circularis lineæ sectionem in proportione sectę alterius circularis. Problema solui potest & ex vsu circini proportionũ in ea facie, in quam translatæ sunt chordæ arcuum quadrantis, & ex modo, quo in § 10 ad anteced. 9 propos. per quadrantem diuisum im-

C B 90 M 80 Y 70 S 60 50 X 40 T 30 20 V N 10 A D F Q G P I Z R L O

peratam partem abstulimus, ibi septimam; Corollarium enim hoc est. Nam si arcus EF secandus est ita, vt pars altera maior habeat se ad minorem vt 4 ad 3, fit concentricus quadranti AB, & orà extremà diuisà in 90 gradus, pars intercepta inter latera DIM, DGA diuiditur in 70, vt ibi iam factum est, atq; ex termino communi vtriusq; partis 4, & 3 vbi T, ducta TD secat arcum IG in R similiter. &c.

In circino vero proportionum interposita semidiametro dati arcus inter 60, & 60, aptatur interuallum dati arcus inter numeros similes, & à centro circini ad terminos numerorum, in quos incidit interuallũ dati arcus, fit diuisio numeri vt 3 ad 4, idest pro exemplo accipitur numerus 33 graduum, & interuallo inter 33, & 33 sectus arcus erit

vt

vt 3 respectu reliqui vt 4, velut 33 respectu reliqui ad 77, id est respectu numeri 44, est vt 3 ad 4.

§. XXI.

SCHOLION VIII.

De diuisione anguli vt alter diuisus est.

V*T ex problemate § 10 ad 9 propos. anteced. sic ex proximè antecedenti corollaria consequuntur magni momenti, velut datum angulum diuidere non solum in æqualia, vt docuimus ad propos. 10, sed etiam in data proportione, siue similiter vt diuisus est alter. Sic angulus D dati arcus EF factus communis arcui maiori AM diuisus est similiter in duos IDR, RDG vt est & totus MDA in duos MDT, TDA. &c.*

Potest etiam anguli proportionata diuisio fieri per circinum proportionum iuxta dicta in §. 20 antec.

§. XXII.

SCHOLION VII.

Quantitatem mathematicam esse in infinitum diuisibilem est per se notum.

A*Ntequam discedam à 9, & 10 huius, vnum tibi, mi Tyro, ingeram non leuis momenti, quod faciat etiam ad 9, & 10 propos. lib. 1., vbi de diuisione anguli & lineæ in duas æquales partes, hic verò in quaslibet, & cuiuslibet proportionis. Si quis igitur obijciat Geometrico Philosopho: Tua isthæc problemata de anguli, vel lineæ diuisionibus vniuersè falsa, ac nulla sunt, quippe nixa falso fundamento de diuisione quantitatis in infinitum. Erunt enim anguli acuti aliqui, ac rectæ aliquæ lineæ tam exiguæ quãtitatis, vt nulla ratione diuidi queant. &c. Respondeo. De quantitate in materia physica tu, ò disceptatoriæ philosophiæ professor, videris.*

Quan-

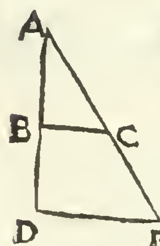
Quantitas mathematica, idest in abstractione geometrica purè conce-pta, hoc ipso quod quantitas est, essentialitèr inuoluit extensionem & proprietatem diuisibilitatis in extensione, &c. Itaq; apud Geometricos philosophos est pro axiomate: Quantitas geometrica, siue abstracta diuisibilis est in infinitum.. Quantitas in abstractione geometrica non constat ex indiuisibilibus. *Ac propterea supposito, ceu per se noto apud abstractè geometricè philosophātes eo primo principio, atq; axiomate, demonstrant deinde problemata de diuisionibus angulorum, linearum, figurarum, &c* *Nota distinctionem.* *Cur sit axioma, & suppositū per se notum quantitatem in abstractione mathematica esse in infinitū diuisibilem.*

Atq; vt hinc videas à Geometrica Philosophia spectari contemplationem, ac theoremata etiam in problematibus, en tibi dum docet modos diuidendi lineas, angulos, figuras, vt sine vlla controuersia demonstret, nec obicem habeat ab ijs, qui opinantur physicam quantitatem constare ex indiuisibilibus, suo de more, ac iure resilit, ac euadit in fœlicem illam suam abstractionem, vbi mentaliter diuidit in abstracta sua quantitate lineas, angulos, figuras. &c. Sunt igitur ea non minus theoremata, quàm problemata demonstrata extra omnem disceptationem, & controuersiām.

Relege demonstrationem in § 5 ad 4 pr. hu pro quantitate in infinitum diuisibile; & ad 12 hu. § 14, & ad prop. 14, §. 2.

Propos. XI. Probl. III.

Duabus rectis datis tertiam proportionalem inuenire.



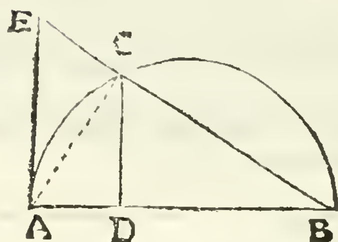
SInt datæ BA, AC, & ponantur vt angulum quemcumque contineant. Oportet ergo ipsis BA, AC tertiam proportionalem inuenire. Producantur AB, AC ad D, E puncta; & [a] ponatur ipsi AC æqualis BD, & ipsi BC [b] ducatur parallela DE per D. Cum itaque lateri DE trianguli ADE ducta sit parallela BC, [c] erit vt AB ad DB, ita AC ad CE; æqualis est autem BD ipsi AC; est ergo vt AB ad AC, ita AC ad CE. Datis ergo duabus AB, AC inuenta est tertia proportionalis CE. Quod oportuit facere. a prop. 3 1. b prop. 31 1. c prop. 2. 6.

§. 13.

§. I.

PROBLEMA I.
Aliter quam Euclides
I –

–Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem maiorem, & minorem adiungere.



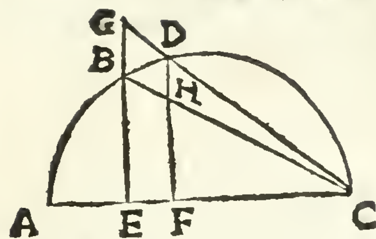
Circa datam maiorem AB describatur semicirculus ACB. Data minor BC ex altero diametri termino B applicetur ad C. Ex C demittatur perpendicularis CD. Ex altero diametri termino A excitetur perpendicularis AE occurrens applicatæ BC productæ in E. Duabus AB, CB erit tertia DB minor proportionalis, & eisdem duabus erit tertia maior proportionalis ipsa BE. Si imagineris ductam AC, tria rectangula triangula BEA, BCA, BCD erunt æquiangula, scilicet communem angulum habentia in B, & angulos rectos, tum in semicirculo ad C, tum ad perpendiculares in D, & A; ergo, per 4 huius, vt AB ad BC, sic BC ad BD. Rursus vt BC ad BA, ita BA ad BE, etiam per prop. 6 in progym. 10, Api. 3. Quinimmo quatuor erunt inter se continue proportionales BE, BA, BC, BD.

§. II.

PROBLEMA II.
Aliter II –

– Atq; alia praxis geometrica pro tertia proportionali.

Non



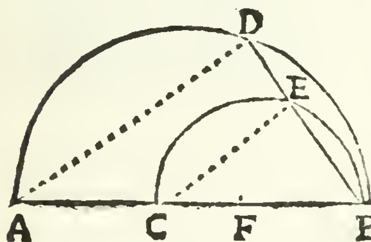
Non est necesse alteram datarum fieri diametrũ semicirculi, sed vtraq; applicetur in quolibet semicirculo ABC. Sit maior CB, minor CD, ex B, & D demittantur perpendiculares in E, & F. Et EB producatur, atq; occurrat ipsi CD productæ in G. Duabus CE, CD erit tertia proportionalis minor ipsa CH, tertia proportionalis maior erit ipsa CG; hoc est CD est media proportionalis inter CG, CB, & CB est media proportionalis inter CH, CD. per theorema 1 in § 37 ad 4 huius. Et inter CH, CG duæ mediæ proportionales sunt CD, CB.

§. III.

PROBLEMA III.

Aliter III –

–Tertiam minorem proportionalem. &c.



Componantur in segmentum cõmune CB vtraq; datarum maior AB, & minor CB. Super maiore AB describatur semicirculus ADE, & super minore CB semicirculus CEB tangens maiorem in B. Intervallo CB, & centro B fiat sectio in D puncto maioris semicirculi, iunctâq; BD, erit à minore semicirculo secta BE tertia proportionalis. Omitto probationem, quæ facile fieri posset ae more communi, ac simplici ex 4 huius, iunctis imaginarys AD, & CE, & factis triangulis æquiangulis, &c. Lubet demonstrationem instituere etiam cum vsu 2 propos. huius lib. 0 sic.

Quoniam per corollarium 5 sub proposit. 6. prælib. 2 Apiar. 1, vbi aracneam Geometriam proximus, a tangentibus se circulis secãtur recta AB, BD proportionaliter in C, & E, estq; vt AC ad CB, sic DE ad

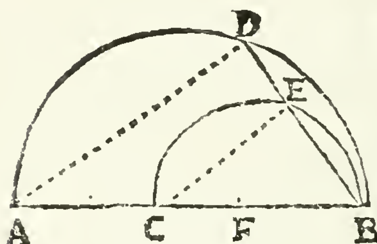
EB, erit & componendo, vt AB prima datarũ ad CB secundam, sic DB (idest secta illi æqualis CB) ad EB tertiam.

§. IV.

PROBLEMA IV.

Aliter IV –

– Tertiam maiorem proportionalem. &c.



SInt datæ FB, CB, & compositæ in cõmune segmentum FB. Super maiore CB describatur semicirculus CEB, & centro B, interuallo minoris FB fiat applicatio, siue sectio in E. iungatur BE, & producatur ad quantitatem maioris BC vsq; ad D, vnde ad angulum rectum demittatur recta occurrẽs productæ BC in A, eritq; BA tertia maior proportionalis inuenta. Demonstratio, & formula argumentationis erit eadem, quæ in antecedenti de tertiæ minoris proportionalis inuentione. idest: vt BE ad ED, sic BC ad CA, per 2, & componendo vt BE ad BD, (idest ad illi æqualem BC) sic BD ad BA. ergo &c.

§. V.

PROBLEMATA V, VI, VII.

Aliter V, VI, & VII. tert. propor.

SCilicet ex vsu circini proportionum, quem habes in antecedentibus ad 4 propos. huius. Et ex vsu normæ. Et ex modis apud Pappum Quem normę, vsum, & quos modos habes ad prop. 3.

§. 6.

§. VI.

PROBLEMA VIII.

Aliter 8 ex lib. 3. Eucl. tertiam proport. &c.

VT videbis inferius ad propos. 16, & 17 huius, quas supponit vsus ibi positus ex aliquibus propositionibus libri tertij.

§. VII.

PROBLEMATA IX, X, XI.

Aliter 9, 10, 11, apud alios tertiam proport. &c.

1 *VIde Clauium non solum in scholio ad hanc prop. 11. Eucl. sed & in Astrolabio lib. 1. lemm. 12, vbi & per rectãgulum, & per circulos se tangentes tertiam, & quartã proportionales inuenit. Ii autem modi nituntur ope parallelarum, vt & hic Euclides.*

2 *Habes & modum hic Euclidis, quem indicauimus in vsibus 2 proposit. ex qua demonstratur.*

§. VIII.

Vsus tertiæ proportionalis ad sectiones conicas, ad horaria, ad specula vstoria, ad asymptotos, idest lineas inter se magis, ac magis accedentes, nunquam se contingentes. &c.

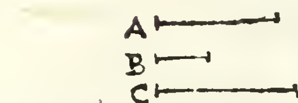
VIde in Apiar. 3, Prog. 2, propos. 1, 2, 3, 4, 7, 9. & Ap. 7, Progym. 3, & eius corollar. & propos. 4, num. 2. & c. Progym. 9. & c. In citatis locis habes problemata magni momen-

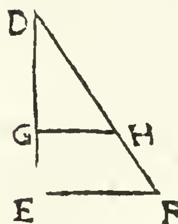
 men-

menti, atq; vsus, præsertim in Conicis, qualia sunt inuentio lateris recti, & descriptio hyperboles, atq; etiam paraboles ad specula vstoria, & ad plura alia singularia, Ap.7, Prog.3, propos.3, & eius corollar. & prop.4, num.2, &c.

Propos. XII. Probl. IV.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem inuenire.





a prop. 3. 1.

b prop. 31. 1.

c prop. 2. 6.

OPorteat tribus datis rectis A, B, C quartam proportionalem inuenire. Exponantur duæ rectæ DE, DF cõtinentes angulum quemcũque EDF: & [a] ponatur ipsi A æqualis recta DG, ipsi B recta GE: & ipsi C recta DH; [b] atque ipsi GH agatur parallela EF per E. Cum ergo lateri EF triãguli DEF ducta sit parallela GH, [c] erit vt DG ad GE, ita DH ad HF. Est autem DG æqualis ipsi A, GE ipsi B, DH ipsi C; est ergo vt A ad B, ita C ad HF. Tribus ergo datis A, B, C inuenta est quarta proportionalis HF. Quod oportuit facere.

§. I.

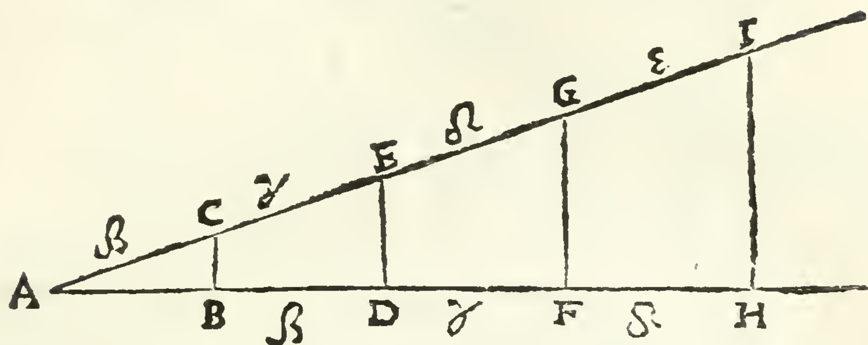
PROBLEMA I.

Aliter I.

Tribus datis lineis non solum quartam, sed quintam, sextam &c. in infinitum continuè prop. inuenire ad maior. & minores termin.

In

IN triangulo videbis hic à vobis modum continuandi lineas plures in eadem proportione, habebisq; trianguli latera secta in eadem continuata proportione segmentorum, non solum contiguorum, sed etiam oppositorum. Verbi gratia in Triangulo AIH



sunt AB, AC, CE, EG, GI; item AB, BD, DF, FH; item AB, AC, BD, CE, DF, EG, FH, GI sunt in eadem, & continuata proportione. Constructionem, & demonstrationem iam accipe.

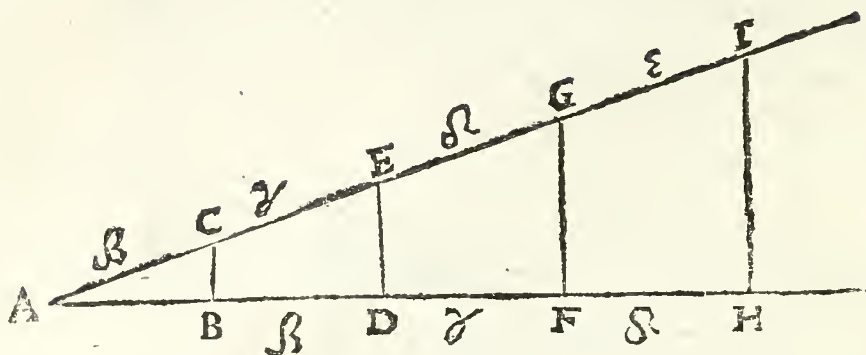
In continuatione ad maiores terminos incipiendum est à prima minima datarum linearum, & progrediendum ex ordine ad secundam maiorem primà, minorem tertià. &c. Itaq; datarum prima, & secũda AB, AC iungantur in angulum ad A, & producantur etiam vltra I, & H in infinitum, prout opus fuerit. Iungaturq; recta BC, ac deinde in inferiori, siue opposito latere, secetur æqualis secundæ ipsa BD, & ex D ducatur DE parallela ipsi BC; secetur DF æqualis ipsi CE: ex F ducatur FG parallela ipsi DE; secetur FH æqualis ipsi EG: ex H ducatur HI parallela ipsi FG; ac sic deinceps in infinitum. Dico ipsas AB, AC, CE, EG, GI, vel AB, BD, DF, FH; vel oppositas AB, AC, BD, CE, DF, EG, FH, GI, esse in eadem proportione duarum AB, AC continuatà.

Vt Tyrones facilius agnoscant sectiones æquales, ijs apposui literas easdem græcas; verbi gratia eadẽ β apposita ipsis AC, BD indicat eas esse eandem lineam, siue æquales, ac pari ratione de reliquis. &c.

Ad demonstrationem verò (apud aliquos aliter, & obscuram) facilius intelligendã in ratiocinationibus è lib. 5, vtar pro Tyronibus eo ordine, vt facilitatem maiorem nemo possit à nobis desiderare.

Ac primo quidem rectam CE esse tertiam proportionalem duabus AB, AC, facilè patet, nam in triangulo AED secta sunt à parallelis

BC,



BC, DE latera AD, AE proportionaliter in B, & C; ergo per 2 huius, vt AB ad BD, sic AC ad CE, sunt autem AC, BD secta æquales, ergo vt AB ad AC, sic AC ad CE.

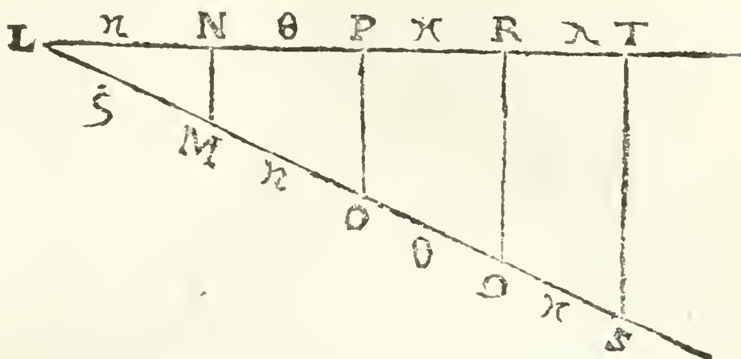
Dico præterea EG esse quartam proportionalem. Nã in triãgulo AGF, (vt modo probatum est in AED è 2 huius) vt AD ad DF, sic AE ad EG, & permutando, per 16 quinti, vt DF ad EG, sic AD ad AE; sed vt AD ad AE, sic AB ad AC; quod sic probo: vt AB ad BD, sic AC ad CE, per 2 huius, & componendo, per 18 quinti, vt AD ad AB, sic AE ad AC, & permutando, vt AB ad AC, sic AD ad AE; ergo vt DF ad EG, sic AD ad AE, & AB ad AC, ergo DF (siue illi æqualis CE) & EG sunt in eadem proportione ipsarum AB, AC.

Pari ratione, ac ratiocinatione demonstrare licet GI esse quintam proportionalem in eàdem proportione ipsarum AB, AC, CE, EG. Nã vt AF ad FH, sic AG ad GI, & vt FH ad GI sic AF ad AG, & vt AF ad AG, sic AB ad AC, ergo vt FH ad GI, sic AB ad AC. Est verò vt AF ad AG sic AB ad AC; quemadmodum probatum est esse AD ad AE, vt AB ad AC. Nam vt AB ad BF, sic AC ad CG, & vt AF ad AB, sic AG ad AC, & vt AF ad AG sic AB ad AC.

Non est cur Tyro turbetur in hac postrema ratiocinatione de quinta proportionali GI, in qua nihil aliud est nisi modus idem probationũ de quarta, tertia, &c. sed sine citationibus 2 huius, & 16, & 18 quinti. Rite percipiat Tyro argumentationem de quarta proportionali EG probata in eadem proportione cum ipsis AB, AC, eamq; formulam applicet proportionaliter reliquis 5, 6, & pluribus lineis in continua proportione positis in triangulo magis, ac magis producto.

In inuentione verò plurium proportionalium ad minores terminos incipiendum erit in constructione à maxima trium datarum, & iungen-

genda in angulum cum secunda minore, &c. vt vides in figura hic apposita LST, quæ quasi quædam inuersa est proximè antecedentis triangularis



gularis superioris figuræ AIH. Sunt in triangulo LST ipsa LM maior quàm LN, & LN quàm NP, & NP quàm PR, & PR quàm RT descendẽdo semper in eadẽ proportione, quam habent maior LM ad minorem LN, &c. Similes literæ græcæ κ inter LN, & MO notant sectam MO æqualẽ ipsi LN, sic æquales NP, OQ, æquales PR, QS, &c. vt in antecedentis figuræ triangularis AIH constructione factum est. Eademq; hic etiam est formula demonstrationis.

§. II.

PROBLEMA II.

Aliter II. —

— Plures rectas lineas in eadem proportione ad minores, & maiores terminos facillimè continuare, siue describere.

SVper datarum maiore AB describatur semicirculus ACDB, & in eo applicetur altera datarum minor CB: demittatur ex C perpendicularis CE in diametrum AB. Rursus super CB describatur semicirculus CFGB, & in eo applicetur BF ipsi EB æqua-

æqualis: ex F demittatur perpendicularis FH in diametrum CB. Tertiò super FB describatur semicirculus FIB, & in eo applicetur ipsa BI æqualis ipsi BH. Ex I demittatur perpendicularis ID in diametrum BF.

Dico ipsas AB, BC, BF, BI, BD esse continuè inter se proportionales; eruntq; etiam plures indefinitè, si plures semicirculi describantur super applicatis, &c. vt factum est in tribus hic semicirculis pro quinq; lineis proportionalibus.

Præterea si iungantur rectæ AC, CF, FI, erunt & ipsæ in eadem inter se proportione, in qua sunt AB, AC, AF, AI, AD.

Demonstratio patet ex coroll. 8. propos huius lib. 6. Nam in triangulis rectang. ACB, CFB, FIB in semicirculi ACDB, CFGB, FIB ab angulis rectis cùm dimissæ sint perpendiculares CE, FH, ID in bases AB, CB, FB, latus CB est medium proportionale inter AB, BE; & latus FB medium est proportionale inter CB, BH; & latus IB mediũ est proportionale inter FB, BD. Igitur vt AB ad BC, sic CB ad BE, idest ad BF æqualem sumptam ipsi BE; & vt CB ad BF, sic FB ad BH, idest ad IB æqualem sumptam ipsi HB; & vt FB ad BI, sic IB ad BD. ergo &c.

Præterea in triangulis rectangulis CEB, CFB, per 47 pri. tam duo quadrata ex CE, EB, quàm duo quadrata ex CF, FB sunt æqualia eidem quadrato ex CB. Sunt autem è sumptis æqualibus EB, BF quadrata æqualia, ergo remanent etiam æqualia inter se quadrata ex EC, CF, ergo & ipsa latera, siue rectæ EC, CF sunt æquales. Pariq; modo ex 47 demonstrabuntur HF, FI æquales.

Quoniam igitur, ex eadem propositione 8 huius, triangulum ACE est simile triangulo ACB; & triangulum CFH est simile triangulo CFB; & triangulum FID est simile triangulo FIB; erit vt AB ad BC, sic AC ad CE, idest ad CF ostensam æqualem ipsi CE; & vt CB ad BF, sic CF ad FH, idest ad illi æqualem FI; & vt FB ad BI, sic FI ad ID. Inuenimus igitur in continua proportione, & descripsimus lineas plu-

plures BA, BC, BF, BI, BD, &c. & AC, CF, BI, ID, &c quod erat præstandum. Atq; hactenus progrediendo ad terminos minores, ac minores in eâdem proportione.

Pro progressione verò (quam aliquis omisit) à minoribus ad maiores, ac maiores lineas in eadem proportione sic mecum operabere, mi Tyro. Super duarum datarum maiore FB descripto semicirculo FIB, & in eo applicata minore IB, fiat angulo IBF æqualis angulus FBC: productâ BC indefinitè, ad diametri FB extremum F fiat angulus rectus BFC à rectâ FC, & productâ dum secet ipsam BC in C. Rursus fiat angulo FBC angulus CBA æqualis, & à rectæ BC puncto C educta CA secet in A ipsam BA; deinde ex I, F, C demittantur perpendiculares ID, FH, CE; & iungantur rectæ IF, FC, CA. Ex eadem 8 prop. rectangula triangula sunt similia DBI, FBI. Item propter æquales angulos ad B, & rectos ad I, F, C, sunt æquiãgula triangula IBF, FBC, CBA, habentq;, per 4 prop. huius, circa æquales angulos latera proportionalia. Igitur vt DB ad BI, sic BI ad BF, & vt BI ad BF, sic BF ad BC, & vt BF ad BC, sic BC ad BA. Atq; hoc ordine itum est a minima DB ad maiores, ac maiores in eadem proportione.

Pariter è 6 prop vt BI, ad BF, sic DI ad IF, & vt BF ad BC, sic FH; idest IF (ostensa æqualis ipsi HF) ad FC; & vt BC ad BA, sic EC (idest FC ostensa æqualis ipsi EC) ad CA. Itaque in eadem proportione crescunt & ipsæ DI, IF, FC, CA semper ad maiores.

SCHOLION I.

ETiam si in progressione à minoribus ad maiores lineas in eàdem proportione angulos ad B æquales construxerimus, tamen in progressione à maioribus ad minores lineas applicatæ in semicirculis conficiunt angulos ad B æquales. Nam semicirculi BGFC productâ peripheria vsq; ad E (vnde EB translata est in EF) quoniam æquales ostensæ sunt EC, CF, æquales arcus, per 28, & 29 tertij, (quas, hic suppositas, habes in 3. p. huius tomi secundi) sub-

I
A
G
C
H
A
E
B

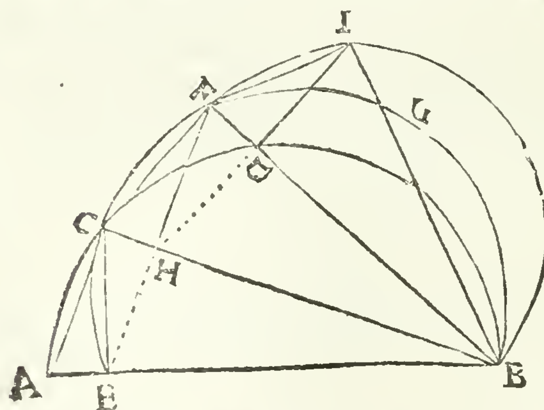
ste-

stendent, & æqualibus arcubus insistentes anguli EBC, CFB, erunt, per 27 tertij, æquales. Pariq; modo si tertij semicirculi FIB peripheria producta intelligatur ex F in H, patebit æqualitas angulorum CBF, FBI propter æquales CF, FI æqualibus arcubus subtensas. &c.

SCHOLION II.

Ad facilitatem operationis pro demittendis perpendicularibus. &c.

D*Emissà perpendiculari CE, reliquæ FH, ID facilè demittentur, regulà iungente duo puncta EF, HI; cadit enim FH perpendicularis in vnam rectam FE, & ID in vnam rectam IH. Quod sic demonstro. Triangula EHB, BHF habent duos angulos ad B æquales, per demonstrata in antecedenti Schol. & duo latera EB, BF secta æqualia, & latus HB cõmune, per 4 pri. habebunt & bases FH, HE æquales, & angulos ad bases æquales, angulũ BFH ipsi BEH, & BHF ipsi BHE æqualem; at BHF à perpendiculari FH est rectus, ergo & BHE; ergo, per 14 pri. ipsæ FH, HF conueniunt in vnam rectam EF. Pariq; modo de HI.*



§. III.

COROLLARIVM I, &

PROBLEMA III.

Præ-

Praxis altera perfacilis, ſine ſemicirculis, continuandi plures lineas in eadem proportione ad minores terminos.

QVemadmodum docuimus praxim continuãdi plures lineas in eadem proportione ad maiores terminos, ſine deſignationibus ſemicirculorum; ita potes ſine ſemicirculis continuare plures lineas in eadem proportione ad minores terminos ſic. Poſt BC *in primo tantum ſemicirculo applicatam, & perpendicularem* CE *demiſſam, fiat angulus* CBF *æquali angulo* ABC, *& in* BF *vltra* F *productâ ſecetur* BF *ipſi* BE *æqualis, & demittatur perpendicularis* FH *(regula appoſita ad puncta* F, E, *vt dictũ, & probatũ eſt in anteced. Schol. 1) & fiat angulo* CBF *angulus æqualis* FBI, *& ſecetur* BI *æqualis ipſi* BH. *Ac ſic deinceps; eruntq;* BA, BC, BF, BI, BD *in eàdem proportione; ac iunctis ad* C, F, I, *perpendicularibus* AC, CF, FI, *patebit demonſtratio in triangulis rectangulis, & æquiangulis, & ſimilibus, &c. vt in antecedentibus §§ demonſtratum eſt.*

§.IV.

COROLLARIVM II, & PROBLEMA IV.

Lineæ ſpiralis in plano deſcriptiones per lineas in eàdem proportione continuatas modo in antecedentibus §§. tradito.

SI vltra BI *per angulos æquales inueniantur modo, quo anteced. entes deſcriptæ ſunt, aliæ, atque aliæ lineæ in eàdem proport. ad minores, ac minores terminos in orbem perfectum, ac deſinentẽ circa* B, *& vertices proportionalium* A, C, F, I, *2. reliqui iunguntur curuàſenſim, in orbem ſemper minorem decreſcente, ſiue ſem-*

per minus à B distante, ac denique terminato in linea AB ad punctum B; ea erit forma quædam lineæ in plano spiraliter serpentis, & inuolutæ; ac pro varia linearum proportione, in qua fuerint descriptæ, & continuatæ, variæ fient spirales. Nec vero necesse est vllam prædictarum spiralium esse ex genere cõmunis, & vulgatæ in plano spiralis, de qua Archimedes, & Pappus ex antiquis. Nam præter genus id spiralis ab antiquis definitæ plures aliæ spiraliter implexæ, ac serpentes in plano lineæ describi possunt. Hìc interim, amice Lector, ex modò demõstratà continuatione linearum proportionalium habes à nobis pro lucro, & corollario geometrico mixtas lineas in varia proportione per vertices proportionalium rectarum linearum spiraliter, & proportionaliter serpentium, siue ex amplo in angustum per lineas proportionaliter descrescentes; siue à minima propepropè B proportionaliter crescentium in orbem semper maiorem.

§. V.

PROBLEMA V.

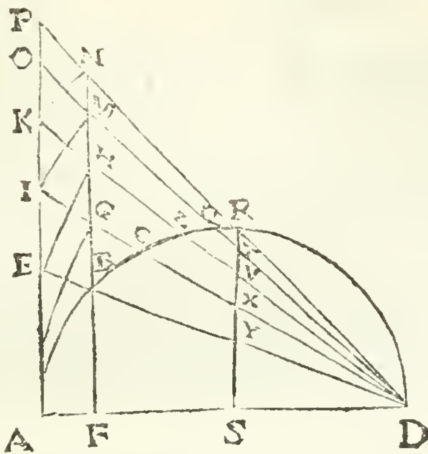
Aliter III —

— Plures lineas in eàdem proportione continuare ad maiores, & minores terminos.

PRAXIS

Sint datæ rectæ DA, DB, quarum proportionem libeat continuare tum ad maiores, tum ad minores terminos. Circa maiorem DA describatur semicirculus ABCD, in quo ex termino diametri D applicetur minor data DB, èademq; producatur donec erectam in puncto A perpendicularem AE secet in E; nec non ex puncto B in eandem diametrum DA demittatur perpendicularis BF, quam arcus AG, EH descripti centro D interuallis DA, DE, secent in G, H, & per G, H ex eodem puncto D producantur rectæ secantes tangentem AE, in I, K, & circumferentiam in C, L. Iterumq; centro D, interuallis DI, DK describantur duo arcus IM, KN secantes perpendicularem FB in punctis M, N, per quæ ductæ

DM,



DM, DN secent tangentem in O, P, & circumferētiam in QR. Dico DP, DO, DK, DI, DE, DA, DB, DC, DL, DQ, DR esse continuè proportionales.

Prædicta praxis est nostri Villalpandi.

Quinimmo si ex R demittatur perpendicularis RS, continuabuntur & aliæ minores in eadem proportione.

Demonstrationi ingeniosæ huius praxis præmitto duo lemmata.

§. VI.

LEMMA I.

Si sint quotcunque magnitudines, & quæ est media proport. inter minimam & maximā, ea sit quoq; media inter reliquas, illæ magnitudines erunt proportionales ponendo minimam, & maximam extremas.

Breuitatis, & facilitatis gratia pro Tyronibus indicabo veritatem propositi lemmatis in numeris.

1 2 4 8 16 32 64.

Vides enim 8 esse medium proportionalem numerum inter extremos 1, & 64, inter 2, & 32, inter 4, & 16. Vides etiam omnes eos numeros esse in vna, eademq; proportione dupla continuatè. &c.

Vide præterea Villalp. lemm. 6. c. 1.

§. 7.

§. VII.

LEMMA II.

Si sint quotcunq; magnitudines continuè proportionales, & aliæ quædam in eadem ratione, sitq; vna aliqua posteriorum media inter duas quaslibet priorum, etiam reliquæ posteriores eodem ordine erunt mediæ inter reliquas priores.

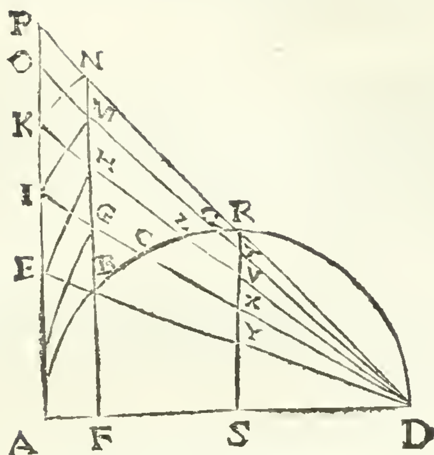
A	1		4		16		64		256		1024
B		2		8		32		128		512	

Vides vtramq; classem numerorum tam superiorem sub A, quàm posteriorem sub B esse in eadem proportione quadrupla, & in posteriore classe sub B numerum, verbi gratia, vel primum 2, vel tertium, ac mediũ 32, hunc inquam, 32 esse medium proportionalem in proportione dupla inter 16, & 64 prioris classis sub A. Vides etiam reliquos numeros eiusdem posterioris classis sub B esse medios proportionales inter reliquos superioris classis, 2 inter 1, & 4; item 8 inter 4, & 16; item 32 mea. proportion. inter 16, & 64. &c. sub A. Vide etiam Villalp. lemm. 7. cap. 1. &c.

§. VIII.

Demonstratio Praxis ante lẽmata præcedentis.

a 24. sexti Eucl. DP, DO, DK, DI, DE, DA, DB, DC, DL, DQ, DR sũt continuè proportionales. Quoniam enim vt DP ad DK, ita est a DK, hoc est DN, ad DH, vel ad DE, propter similitudinem triangulorum DPK, DNH, & vt DK ad DE, hoc est ad DH, ita DH, ad DB, erunt b quoq; in eadem ratione cum



cum rectis DP, DK, DE continuè proportionales DB, DL, DR, Eodemq; modo erũt continuè proportionales DO, DI, DA, DC, DQ, & quidem in eadem ratione cum prioribus. Cum enim DF, DC sint æquales, propterea quod eadẽ DB, sit c media proportionalis inter DA, DF, & inter DG, DC, quarum DA, DG ponuntur æquales; sintque præterea triangula DAE, DFB æquiangula, erit eàdem proportio DE ad DB, quæ DA ad DF, hoc est ad DC. Quare cum DP, DK, DE, DB, DL, DR sint continuè proportionales, & similiter DO, DI, DA, DC, DQ sint quoq; in eadem ratione continuè proportionales; sitq; d DA media proportionalis inter DE, DB erunt e & reliquæ inter reliquas mediæ proportionales, atq; ideo omnes vndecim rectæ DP, DO, DK, DI, DE, DA, DB, DC, DL, DQ, DR erunt continuè proportionales.

b *lem.* 1. *antec.*

c §. 37. *ad* 4 *huius.*

d § 37. *ad* 4 *huius.*

e *lem.* 2. *antec.*

Quod vero attinet ad ipsas TD, VD, XD, YD, patet eas esse continue proportionales in eadem proportione cum ipsis RD, QD, &c. quia sunt in eadem proportione cum ipsis OD, KD, ID, ED, AD propter parallelas PA, RS, & triangula æquiangula DOP, DTR & DOK, DTV, &c. Vt ergo DP ad DO, sic DR ad DT, & vt DO ad DK, ita DT ad DV. &c. Cùm ergo probatæ sint DR, DQ, DL, &c. esse in eadem proportione cum ipsis DP, DO, DK, &c. cum quibus eandem habent proportione ipsæ DR, DT, DV. &c. ergo & inter se sunt in eàdem proportione continuatà, verb. gr. ipsæ DL, DQ, atq; ipsæ DT, DV. &c. vsq; ad extremam, ac minimam DS.

§. IX.

Scholia ad intelligenitam, & confirmationem

de

demonstrationis proximè antecedentis pro Tyronibus.

1 *Probandũ fuit in demonstratione lineas illas à maxima PD ad minimã RD, vel SD esse non solum inter se proportionales, sed etiam in eadẽ proportione, & propterea esse in eadem continuatà. Quæ omnia, & singula probat demonstratio.*

2 Lemma primũ citatum applicatur demonstrationi sequentem in modum. Inter PD, DR, inter OD, DQ, &c. vsq; ad inter ipsas ED, DB media est proportionalis èadem AD, sicut inter numeros 1, 64 inter 2, 32 &c. idem numerus 8 est medius proportionalis; ergo vt PD ad DO, sic DQ ad DR, &c. quemadmodum vt 1 ad 2, sic 32 ad 64 &c. in eadem proportione &c.

3 Lemma secundũ citatum ostendit quemadmodum ipsæ DP, DK, DE, DB, DL, DR; item DO, DI, DA, DF, siue DC, DQ, &c. (quæ bini linearum classes in eadem sunt proportione) etiam innectantur inter se, & conficiant, & continuent ex ordine eandem proportionem; scilicet quia secundæ classis vna linea, nempe DA est media proportionalis inter duas, nempe inter DE, DB prioris classis, ac propterea reliquæ lineæ secundæ classis DO inter DP, DK; & DI inter DK, DE; & DC inter DB, DL; & Q inter DL, DR sint mediæ proportionales, & connectant, & continuent ex ordine eandem proportionem. Eodem modo, quo, quia numerus 32 secundæ classis est medius proportionalis inter duos prioris classis 16, & 64. ideo et reliqui 2, 8 etc. sunt medij inter reliquos 1, 4, 16, & continuant vnam, eandemq; totalem seriem proportionis duplæ numeri secundæ classis internexi numeris prioris classis. Reuise eos numeros in antecedenti secundo lemmate.

§ X.

PROBLEMA VI.

Aliter IV —

Quotlibet lineas inter se proportionales ad maiores, & minores terminos continuare.

Præ

PRæter modos hactenus in antecedentibus positos, ac demonstratos habes & alium apud Clauium in Schol. ad 11 propos. huius, vbi docet lineas proportionales continuare ad plures terminos. Qui tamen ad facilitatem, & simplicitatē maiorem videtur fortasse reduci posse, descripto tantū semicirculo circa maiorem duarū priorum linearum, ac demissis perpendicularibus ex applicata, &c. Vide figurā apud Clauiū, & iuxta nostram indicationem id problema facilius exerce. Demonstratio est ex antecedentibus propos. huius lib. 6.

Hæc etiam apud Clauium indicamus, vt ingeniosa varietate condias Euclidem, & alacriorē animum Tyronibus excites ad geometrica theoremata, & problemata libenter discenda.

§. XI.

PROBLEMA VII.

Aliter V.

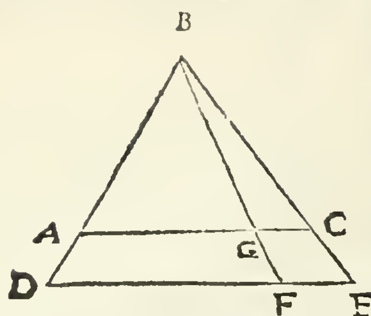
SCilicet per sectiones lineæ media, & extrema ratione. Vide ad 30 huius, quæ propositione eget ille ibi modus continuandi proportionales ad maiores, & minores terminos.

§. XII.

PROBLEMA VIII.

Aliter VI.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem inuenire.



DAtæ ſint tres lineæ AB, BC, BD. Si oporteat quartã inuenire, ad quam BD ſit ſicut BA ad BC, coniungam AC, & producam BC, cui ad E occurrat linea DE ipſi AC æquidiſtans, eritq; propter ſimilitudinem △△ ſicut AB, BC, ſic BD, BE. Itaq; BE erit linea quæſita. *Maurolycus lib. 2 de lin. horarÿs, cap. 6, reg. 5.*

§. XIIII.

PROBLEMA IX.

Aliter VII tribus quartam proport. &c.

S*Cilicet in vſu circini proportionum, quem habes à nobis in loco ad propoſ. 4, qua nititur, § 10.*

§. XIV.

PROBLEMA X.

Aliter VIII quartam proport.

G*Eometricè, vt habes ad 8 propoſ. & eius corollarium, § 5.*

§. XV.

PROBLEMA XI.

Aliter IX.

ORganicè per vſum normæ, ad corollar. eiuſdem octauæ propoſ. Eucl.

§. XVI.

PROBLEMA XII.

Aliter X.

SCilicet paradoxicè è libro 3 Eucl. quem modum habebis inferius ad 16 prop. qua eget, vt demonſtretur.

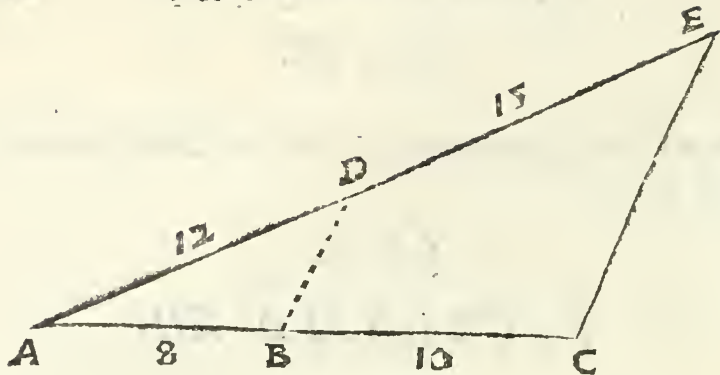
§. XVII.

Vſus quartæ proportionalis in Geometria practica.

VT vidiſti ad quartam propoſitionem huius lib. 6 Euclidis & ad aliquas alias antecedentes, vbi vſus aliquot in exẽplis Geometriæ practicæ prodidimus, inacceſſę altitudines, longitudines, latitudines, profunditates, quæ ignotæ ſunt, ac deinde per modos ibi poſitos inueſtigantur, & agnoſcuntur, nihil aliud ſunt, quam vſus quidam, atq; inuentiones quartæ proportionalis.

Regula item Arithmetica proportionum quam vocant auream, vſus quidam eſt huius 12 propoſ. Euclid. nempe tribus quartum numerum proportionalem inuenire. Cuius regulæ vſus eſt creberrimus præſertim in Geometria practicà. Vide eius regulæ arithmeticæ canones apud nos in Apiar. 11, Progym. 4, cap. 4.

Igitur ſi geometricè, ac ſine operationibus arithmeticis lubeat operari in Geometrià practica iuxta modum hic ab Euclide traditum inueniendæ quartæ proportionalis, ſit (in dimenſione alicuius inacceſſæ altitudinis, &c) pro prima cognita longitudine, ver. gr. 8 paſſuũ quęlibet recta AB diuiſa in 8 partes ęquales per vſum 9 propoſitio.



Eucl. anteced. ex circino proportionum, à quo, iuxta ibi præcepta, octaua pars rectæ AB statim habetur. Secunda cognita magnitudo, verb. gr. baculi paralleli turri dimetiendæ sit BC 10 qualium est ipsa AB 8, iunctęq; sint in vnam rectam AC. Tertia cognita magnitudo, verb. gra. distantia a pede mensoris ad pedem turris, sit passuum 12, pro qua ad lubitũ angulum in A ducatur recta partium 12 ęqualium, qualiũ est vel AB 8, vel BC 10. Iungatur recta ad terminos B, & D primę, ac tertiæ AB, AD. Ex C ducatur ipsi BD parallela CE occurens ipsi AD productę in E. Dimensa DE in partibus ipsius AB dabit cognitam quartam proportionalem magnitudinem, nempe altitudinem turris, 15.

Sed & aliter pro Geometriâ practicâ per circulum inueniemus ignoratam quartam quantitatem post 16 propos. inferius, vbi demõstratio praxis eius perficitur.

§. XVIII.

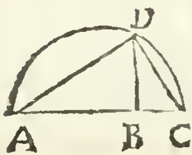
COROLLARIVM III.

Linea in infinitum diuisibilis.

Ex inuentione quartæ proportionalis ad minores terminos, quæ semper potest inueniri, datis tribus, patet lineam esse diuisibilẽ in infinitum; secus .n. aliquando non posset dari quarta proportionalis ad minores terminos. Vide etiam inferius ad propos. 14 hu. §. 2.

Propos. XIII. Probl. V.

Duabus rectis datis mediam proportionalem inuenire.



SIt duabus datis AB, BC media proportionalis inuenienda. Ponantur in directum, describaturq; super AC semicirculus ADC; [a] & ducatur à B puncto BD ipsi AC ad angulos rectos, iunctis AD, DC. [b] Et quia angulus ADC rectus est, quippe in semicirculo, estq; in triangulo rectangulo ex angulo recto D ad basim AC perpendicularis ducta DB, [c] erit BD inter partes basis AB, BC media proportionalis. Duabus ergo, &c. Quod oportuit facere.

a prop. 11. 1.
b propos. 31. 3.
c corol. 1. prop. 8. 6.

§. I.

SCHOLION I.

Propos. hæc 13 tripliciter locale Porisma est.

QVod Clauius affirmat in scholio de quacunq; perpendiculari educta à quouis puncto diametri ad circunferentiam, eam esse mediam proportionalem inter diametri segmenta, &c. apud nos auctarium est ad ostendendũ hanc 13 propos. esse tripliciter localem. Hìc autem suppono ea, quæ habes in priore nostro tomo de propositionibus apud veteres Geometras localibus, earumq; generibus, & exemplis ad propos. 32, § 6, & 7, 11. & ad propos. 35, § 1, 2.

Igitur est localis hæc propositio 13, primò ratione loci, ex quo deducitur perpendicularis, quæ sit media inter segmenta &c. iuxta ea quæ habet, ac proponit Eutocius ad lib. 1. Conic. Planos locos antiqui

Geo-

Loci plani: qui nã apud Antiquos Geometras.

Geometræ appellare consueuerunt quando non ab vno duntaxat pũcto, sed a pluribus Problema efficitur, vt si quis proponat, data recta linea terminata inuenire punctum, a quo ducta perpendicularis ad datam lineam, inter ipsius lineæ partes media proportionalis constituatur. Locum huiusmodi vocant Geometræ, quoniã non vnũ dũtaxat est punctum, quod problema efficit, sed locus totus, quem habet circumferentia circuli circa datam rectam lineam veluti circa diametrum descripti. Si enim in data recta linea semicirculus describatur, quodcunq; in circumferentia sumpseris punctum, & ab ipso perpendicularem ad diametrũ duxeris, quod propositum est efficiet.

Secundò est localis ratione etiam anguli, à quo deducitur perpendicularis, qui angulus cum sit rectus, habet in toto semicirculi arcu pũctum non vnum, sed vagum ad quod fiat, iuxta §6 ad propos. 31 in to. 1.

Tertiò est localis etiam ratione puncti in diametro, a quo puncto erigatur perpendicularis ad arcum semicirculi, quæ sit media proport. &c. Ab omnibus enim punctis dessignabilibus in diametro potest ea erigi perpendicularis.

Triplici autem hoc modo propositum hoc problema est propriè Porisma in inuentione puncti, à quo ducenda sit perpendicularis, &c. iuxta ea quæ habes in 1 To. vbi de Corollario, & Porismate. Illuc reuise.

§. II.

SCHOLION II.

De duplici conuersione apud nos problematis: *Duabus mediam &c.*

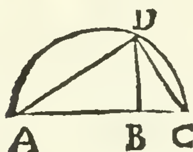
Scilicet: datæ rectæ duas extremas proportionales adinuenire, *ita vt data fiat media proportionalis inter duas adinuentas. Quod problema conuersum duplici modo nos exequimur, ac demonstramus, vt inferius in loco videbis ad propos. 17, & ad 30, quibus propositionibus egent duo illi apud nos modi. Hic, vbi est apud Euclidem id quod conuertitur, saltem indico Conuersiones suis in locis ritè demonstrandas.*

§. III.

THEOREMA.

Si ad lineam rectam perpendicularis ducatur, quæ ſit media proportionalis inter ſegmenta lineæ, ſemicirculus circa illam lineam rectam deſcriptus tranſibit per extremum punctum lineæ perpendicularis.

HOc theorema, quod Clauius poſt propoſ. 13 libri 13 demõſtrat non ſine vſu propoſitionis 17 huius lib. 6, nos hic ante eam propoſitionem aliter ſic expedimus, ac in figura Euclidis.



Si enim perpendicularis DB ducta ad rectam AC eſt media proportionalis inter ſegmenta AB, BC, & ſemicirculus ADC circa AC deſcriptus non tranſit per extremum D lineæ perpendicularis BD; ergo tranſibit per punctum vel infra, vel ſupra D, ac proinde linea vel maior, vel minor quàm ipſa BD, erit media proportionalis inter AB, BC, per hanc 13. Quod eſt contra ſuppoſitum. Supponitur enim ipſa BD, non autem maior, vel minor media proportionalis inter AB, BC. Ergo ſemicirculus tranſibit per D; nec enim poteſt inter AB, BC eſſe niſi vna media proportionalis.

§. IV.

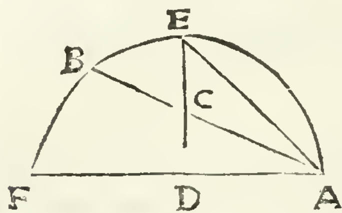
PROBLEMA I.

Aliter I.

Dua-

Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem inuenire.

Ediam proportionalem licet inuenire non solum per descriptionem semicirculi, &c. vt Euclides, sed etiam in dato, & iam descripto semicirculo vel applicando alterutram, vel vtramque, vel descripto semicirculo super maiore datarum.

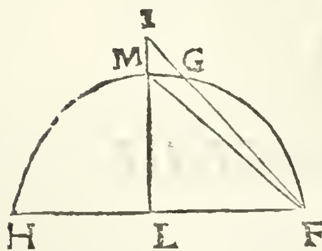


Itaq; 1. in dato semicirculo AEF (cuius scilicet diameter sit maior maiore datarum linearum) applicetur maior datarum AB, & in ea secetur minor AC: ex C demittatur perpendicularis ad diametrũ in D: & DC protrahatur ad sectionem circumferentiæ in F: iuncta AE est media proportionalis inter AB, AC. per theor. 1. §. 37. ad 4 sexti.

§.V.

PROBLEMA II.

Aliter II.



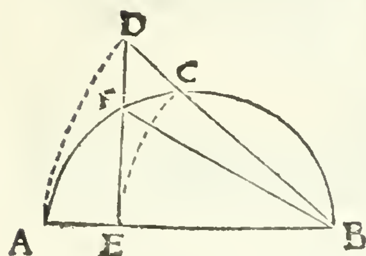
IN dato semicirculo HGF applicetur minor datarum ipsa FG, & producta extra circulum secetur in I ad quantitatem maioris duarũ datarum linearum, inter quas oportet inuenire mediã proportionalem. Ex I demittatur perpendicularis IL secans circumferentiam in M. Iuncta FM erit media proportionalis inter ipsas FG, FI, per eandem citatam propositionem in § 37 ad 4 huius.

§. VI.

PROBLEMA III.

Aliter III.

Describendo semicirculum super maiore datarum.



Sint datæ rectæ AB, BC. Circa maiorem AB describatur semicirculus, in eoq; applicetur minor data BC. Deinde centro B, interuallo maioris BA describatur arcus secans protractam minorem BC in D, demittatur perpendicularis DE secans circũferentiam semicirculi in F, nectaturque BF, erit recta BF media proportionalis inter datas AB, BC. *Villalpandi constructionem ex parte apposuimus, omissa eiusdem demonstratione. Nos hanc praxim demonstramus è corollar. 8. prop. huius li. 6. sunt enim æquales BD, BA, & BC, BE, estq; BF media proport. inter BA, BE, si fingas iunctam AF, & factum triangulum in semicirculo rectangulum. Quod verò DE sit perpendicularis, habes demonstrationem apud nos in* § 10 *ad propos.* 32 *lib.* 1. *in tomo nostro primo, si nempe fingas iunctam AC. Vide citat.* § 10, *& hìc applica.*

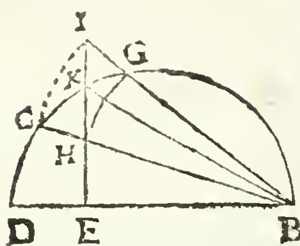
§. VII.

PROBLEMA IV.

Aliter IV.

Applicando vtramq; datam in semicirculo.

Aa Duæ



DVæ datæ, quales, verbi gratia, sunt rectæ BC, BG, applicentur in quouis semicirculo, verbi gratiâ ex termino B ad pũcta C, G. Et quoniam hæc applicatio fit describendo arcus centro B, interuallis rectarum datarum, ijdem arcus producantur aliquanto vlterius, vt vicissim secent applicatas, hoc est arcus descriptus interuallo maioris BC, secet protractam minorem BG in I. Ex I demittatur perpendicularis secans in K, & H: recta BK ducta ad punctum K, in quo circumferentiam secat recta IH, erit media proportionalis inter datas BC, BG.

Demonstratio est ex § 37 ad quartam propositionem hu. libri sexti. Villalpandi constructionem ex parte posuimus.

§. VIII.

PROBLEMA V, & VI.

Aliter V. & VI.

E*X Pappo, geometricè § 2 apud nos ad Octauam prop. huius li. & per normam, vt habes ad eandem proposit. 8, & ad eius corollarium § 8.*

§. IX.

PROBLEMA VII.

Aliter VII. — &

Organicè per circinum proportionum mediam prop. &c.

IN *Apiar. nostro 12, applicat. 34, quæ est ad lib. 6. prop. 13, docemus mediam proportionalem inuenire ope circini proportionum, qui modus pendet ex operationibus Arithmeticis, & ex 16, & 17 prop. inferius. ibi ad eas propositiones in § 8. vide.*

Hic indicamus, vt, si lubeat, eo vtare.

Ibidem indicamus abusum, apud aliquos, circini proportionum circa operationes, quæ sine eo circino faciliùs exercentur.

§. X.

PROBLEMATA VIII, & IX.

Aliter VIII, & IX.

EX *libri tertij propositionibus 35, & 36. Quorum modorum demonstratio manat à prop. 17, & eius corollario ex Clauio. Inferius ibi hauries ad fontem. §§ 2, 3 ad prop. 17.*

§. XI.

PROBLEMA X.

Aliter X.

EX *propositione vltima lib. 2 elem. geom. ibi enim (vide figurã Eucl. in 3. par. hu. 2 To.) EH est media proportionalis per semicirculum, (vt in hàc 13 prop. inuenta) super qua erigitur quadratum æquale quadrilatero rectangulo DB, siue triangulo A. Itaq; Euclides antequam hìc apertè, tacitè ibi docet inuentionem mediæ. &c.*

SCHOLION III.

PRoblemata de rectilineis tertio, quarto, medio proportionalibus, quæ videntur spectare ad propositiones 11, 12, 13 Euclidis, & ab ijs pendere, nos perfectiora, & in omnibus suis partibus melius demõstrata dabimus ad 25 propos. huius, (§ 10, & seqq.) qua egent ad omnimodam perfectionem.

§. XII.

SCHOLION IV.

De vario, & multiplici vſu linearũ mediarum proportionalium apud nos in omni genere Philoſophiæ Mathematicæ.

NVllo modo fraudandos censemus Tyrones Geometricos saltem indigitatione multiplicis vsûs mediæ proportionalis, vt conditum degustent Euclidem; cui, & Geometricæ Philosophiæ iniuriam fieri arbitramur, si vel ignoranti, vel maligno silentio prætermittatur manifestatio ingentium opum sciẽtificarum, quæ in elementarijs Geometricæ Philosophiæ propositionibus latent. Videbis inferius ad prop. 28, & 20 aliquos vsus med. proport. in Conicis. Hìc interim aliquos etiam e multiplicibus vsus indico, quos alibi (præsertim in Apiarijs) apud nos expressiores videre poteris, ne bis eàdem, licet nostra, describere videamur. Itaq; —

I.

— In Geom. ſpeculatiua vſus med. proport. pro diuiſionibus, &c. figurarum.

Vide inferius ad propos. 20. huius, §§ 2, 4, &c.

II.

II.

Itē in Geometria ſpeculatiua vſus mediæ proportionalis pro trasformationibus, & quadrationibus difficillimorum curuilineorum.

Vide in Ap. 1. prælibam. 3, vbi Poteum geometricum exhibemus, præſertim in propoſ. 2, 3, 4, 5.

III.

In pictura optica vſum inſignem mediæ proportionalis —

— *Vide inferius ad prop. 20. § 24, 25, 26, 27.*

IV.

Vſus mediæ proportionalis pro deſcriptione ſectionis conicæ hyperbolicæ, & pro exhibitione aſymptotων, ideſt linearum rectarum cum linea hyperbolica concurrentium, & in infinitum ſemper inter ſe accedentiū, nunquam tamen ſe contingentium.

Apiar. 3. progym. 3. propoſit. 7, 8, 9.

V.

Vſus mediæ proportionalis pro catoptricis in deſcriptione ſectionis Parabolicæ ad conficienda vſtoria mirifica ſpecula.

Apiar. 7, progym. 3, Propoſ. 2.

Scho-

SCHOLION V.

QVænam sint sectiones conicæ hyperbolicæ, & parabolicæ, habes apud nos in 1 tom. ad propos. 44, § 1. & inferius in hoc 6 lib. ad proposit. 29. Vide, & Apollonij Conicorum lib. 1. propos. 11. & 12. Et vide apud eundem ad pleniorem, & planiorem intelligentiam initio lib. 1 definitiones axis, lateris recti, transuersi, ordinatim actarum, &c.

VI.

In Geometrià Practica vsus mediæ proportionalis pro dimensione vniuersi terrarum orbis, altitudinum, profunditatum, distantiarum inaccessarum. &c.

Apiar. 2, Progym. 3, propos. 7, & Schol. ad eam, & propos. 8, & corollar. Et progym. 2, propos. 6. Prodit hic vsus ex inuentione diametri totius terræ, quam diametrum habes a nobis proditam in antecedentibus ad propos. 8 huius lib. 6.

VII.

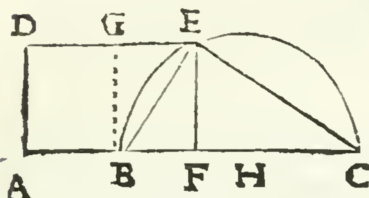
In Gnomonicis vsus med. proport. pro varijs, & vtilibus praxibus circa stylos horariorum.

IN Ap. 9. Prog. 4. cap. 2. nu. 3, & cap. 5, num. 2, vbi horaria horizõtalia geometricà facillimà ratione construimus, ac demonstramus, stylumq; nihil aliud esse quàm mediam quandam proportionalem ostendimus. Ex qua doctrina docetur modus longitudinis styli vel erigendi, vel (si eius longitudo ignorata sit, vel stylus ipse amissus) iterum reponendi.

§. XIII.

PROBLEMA XI.

Dato medio proportionali, in data linea duo extrema reperire. Oportet autem datum mediũ dimidia parte datę lineę non esse maius.



SIt datum medium A B, data verò linea BC. Volo in BC duo extrema proportionalia reperire, inter quæ sit AB medium proportionale. Modo tamen AB non sit maius dimidia parte ipsius BC. Nam sic medium esse non posset. Iungo AB, & BC, vt AC sit linea vna. Tum super BC describo semicirculum BEC. Et à pũcto A erigo perpendicularem AD, quam pono ipsi AB æqualem; Et per punctum D duco DE parallelam ipsi AC; quæ omnino secabit, aut cõtinget semicirculum, vt in puncto E; cum AD non sit maior semidiametro. Tum à puncto E demitto EF perpendicularem ipsi BC. Dico BC sic diuisam in puncto F, vt AB sit media proportionalis inter BF, & FC.

Hoc autem satis manifestum est ex ipsa trigesima Tertij, & Consectario antecedentis. Nam cum FE sit æqualis AD, per trigesimam quartam Primi; ob idq; ipsi AB; ductis lineis BE, & CE, fiet Triangulum BEC rectangulum. Ob id, ex ipso consectario, erit BF ad FE (ob idq; ad ipsam AB) vt FE ad FC. Quod fuit faciendum.

Peletarius ad hanc 13.

SCHOLIA.

1 *DIffert antecedens problema à nostro, quo, ad 17, & 30 propos. huius, datæ duas extremas proportionales adinuenimus, quod Peletarius duas extremas proportionales inuenit in altera data, cum apud nos vna tantum sit data; &c.*

2 Cla-

2 *Clauius paullo aliter instituit constructionem. Nam Peletarius datas AB, BC iungit in vnam. Clauius datæ BC alteram AB iungit ad rectum angulum in B, & in parallelogrammo arctiore GF, cuius datum latus BG tangit semicirculum, expedit id quod Peletarius in laxiore AQ. &c.*

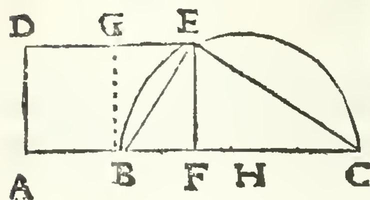
3 *In demonstratione Peletarius vtitur lib. 3. nos eo non egemus, & possumus demonstrare angulum BEC rectum in semicirculis ex ijs, quæ apud nos habes in vsibus, & consectarijs ad 32 prop. lib. 1. in 1 tomo nostri huius Aerarij.*

4 *Addimus nos antecedenti nostrum sequens*

§. XIIII.

PROBLEMA XII. quod est:

Datis duabus lineis, quarũ altera non sit maior dimidio alterius, super datarum maiore construere triangulum rectangulum ita, vt minor datarum sit perpendicularis ab angulo recto in basim deducta.



Hoc problema quasi corellarium est antecedentis. Nam datâ BC, & seorsim à BC, datâ BA, quæ non sit maior, quam BH, vel HC, propter prædicta in anteced. problemate; si velis super BC triangulum rectangulum construere tale, vt ab eius angulo recto perpendicularis in basim BC deducta sit ipsa BA; centro facto in puncto dimidiationis H, & interuallo HB, descripto semicirculo BEC, & cæteris constructis, vt in antecedenti probl. nempe erecta datarum minore perpendiculariter in B, & actâ GE parallela maiori datarum BC, punctum E in arcu semicirculi erit ad quod erũt adducenda duo latera BE, CE in angulum rectum in semicirculo, & ex angulo CEB demissa EF erit perpendicularis pro ipsâ BG, illique æqualis. &c. iuxta demonstrata in anteced. probl.

Scho-

SCHOLION VI.

Ad facillimam operationem proximè antecedentium duûm problematum.

D G E A B F H C

Liberum est perpẽdicularem æqualem minori datarum duarũ linearum erigere è quolibet pũcto alterius datarum maioris siue intra semicirculum, siue extra protractæ, ac deinde ducere per extremum perpendicularis parallelam maiori datarum, quæ parallela tãget, vel secabit semicirculum in puncto, vnde demittatur perpendicularis, quæ sit media proportionalis inter segmenta maioris datarum. Sic licet ex omni puncto datæ BC vel intra semicirculum BEC per totam diametrum, vel extra semicirculum, si diametrum protrahas vltra vel C, vel B ad lubitam quantitatem, licet, inquam, erigere datarum minorem AD, vel BG, vel aliam inter BF, vel inter FC, &c. Applica à nobis hic indicata figuræ, vt videas libertatem, & facilitatem operationis exemptã à determinatione Peletarij, & aliorum, dum ille facit AB æqualẽ minori, & ab extremo A erigit illi æqualem, vel alij determinatè erigunt ab extremo B perpẽdicularem æqualem minori datarum. &c.

De inuentione duarum mediarum proportionalium.

§. I.

SCHOLION I.

Euclides ab Apollonij reprehensionibus vindicatus. Apollonius ipse ab Antiquis reprehensus, etiam prolato eius paralogismo in inuẽtione duarum mediarum proportionalium.

1 *Post inuentionem mediæ proportionalis inter duas datas lineas, consequens in Geometrica Philosophia videbatur vt Euclides doceret etiam modum inueniendarum duarum mediarum proportionalium inter duas datas, propter vsus quamplurimos earum duarum mediarum, præsertim in Stereometria, vt inferius videbis, Sed prudens Euclides in hisce Geometricis Elemẽtis ea tantùm ponenda censuit, quæ non requirerent vel lineas, vel instrumenta, præter elementaria, scilicet ea, quæ extra lineas rectas, vel extra circinum, normam, & regulam, non requirerent ductus aliquos mixtarum linearum per instrumenta quasi mixta. Quarum rerum vt plurimum eget apud antiquos ea duarum mediarum inuentio.*

Cur Euclides nihil de inuentione duarum mediarũ proportionalium.

Apollonius Pergæus in epistola ante lib. 1. Conicorum contra Euclidem sic scribit: Animaduerti non positam esse ab Euclide rationem componendi loci ad tres, & quatuor lineas, verum ipsius tantũmodo particulam quandam, atq; hanc non satis feliciter &c. *Pappus Alexandrinus in Proloquijs ante lib. 7 Collectionum Mathematicarum, vbi de Conicis Apollonij, interpretatur verba Apollonij de loco ad tres, & quatuor lineas in sensum geometricum reconditiorem, quàm Eutocius Ascalonita in Commentarijs in Apollonium, & eius citatam epistolam. Omissa Pappi interpretatione, appono interpretationem Eutocij, quæ ad rem meã facit: sic scribit*: Inuehitur deinde Apollonius in Euclidem, non vt Pappus, & nonnulli arbitrantur, quòd duas medias proportionales non inuenerit, si quidem Euclides

rectè

rectè inuènit vnam mediam proportionalem non infeliciter, vt ipſe inquit. Duas verò proportionales medias neq; omnino in elementis inueſtigare aggreſſus eſt, & Apollonius de duabus medijs proportionalibus in tertio libro nihil inquirere videtur. Sed veriſimile eſt Euclidem in alio libro de locis conſcripſiſſe, qui ad manus noſtras non peruenerit.

2 *Pro Euclide in Apollonium Pappus loco citato:* Quem autem dicit in tertio libro locum ad tres, & quatuor lineas ab Euclide perfectum non eſſe, neq; ipſe perficere poterat, neque aliquis alius: ſed neq; paululum quid addere ijs, quæ Euclides ſcripſit per ea tantùm conica, quæ vſq; ad Euclidis tempora præmonſtrata ſunt, vt ipſe etiam teſtatur, dicens fieri non poſſe vt locus perficeretur abſq; ijs, quæ ipſe ſcribere coactus ſit. Euclides autem ſecutus Ariſtæum ſcriptorem luculentum in ijs, quæ de Conicis tradiderat, neq; anteuertens, neq; volens eorum tractationem deſtruere, cùm mitiſſimus eſſet, & benignus erga omnes, præſertim eos, qui Mathematicas diſciplinas aliqua ex parte augere, & amplificare poſſent, vt par eſt, & nullo modo infenſus, ſed accuratus, non arrogans velut hic, quantum oſtendi potuit de loco per eius conica memoriæ prodidit. Non addens perfectum illud, abſolutumq; eſſe, tunc enim neceſſario reprehendi poſſet, nunc vero haudquaquam illud faciendum eſt, ſi quidem & ipſe in Conicis pleraq; imperfecta relinquens non ſatis ea valet tueri. Adijcere autem loco quæ deerant, facile potuit, animo comprehendens ea, quæ ab Euclide de loco ſcripta fuerant, & dans operam Euclides diſcipulis Alexandriæ longo tēpore, ex quo adeo excellentem in Mathematicis habitum eſt aſſecutus, neq; vſquam deceptus eſt. At locus ad tres, & quatuor lineas, in quo magnifice, ſe iactat, & oſtentat, nullà habita gratià ei, qui prius ſcripſerat, eſt huiuſmodi. *Vide cætera apud Pappum, quæ hic nunc nihil ad nos.*

Euclides mitiſſimus, & benignus erga omnes, è veterum teſtimonio.

Apollonij pleraq; imperfecta in conicis; non ſatis tueri ea valet. &c. ex Pappo.

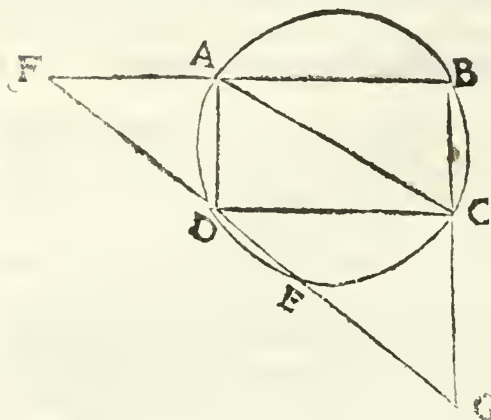
Adde his Pappi etiam rationes noſtras, quas paulo ante pro Euclide attulimus circa omiſſionem duarum mediarum &c.

3 *Pappi ſententiam de Apollonio Euclidis nō æquo reprehenſore, quod verè ipſe Apollonius reprehendendus ſit in quibus alium immerito reprehendit, confirmant non ſolum ea ex ipſomet Pappo:* & ipſe *(ſcilicet Apollonius de quo loquitur)* in Conicis *(quæ vt prædixit, ab alijs, atq; etiam ab Euclide iam perſcripta pro ſuis vēditauit)* pleraq; imperfecta relinquens, non ſatis ea valet tueri; *ſed confirmat etiam (extra Conica) exemplum in rem noſtram de inuentione duarū mediarum ab Apollonio fruſtrà tentatà. Bona fide apponam vt iacet apud antiquum, ac doctum Iohannem Grammaticum Alexandrinum*

Euclidis eximia laudes apud Pappum.

Euclides numquā deceptus.

cognomento Philoponum, in comment. 36 ad lib. 1 Poster. Analytic. Aristotelis. Est autem Apollonij Pergæi in hanc rem (*de duarum mediarum inuentione*) demonstratio, vt Parmeniũ ait, quam & nos exponemus sic se habẽtem. Duabus datis rectis lineis inæqualibus duas medias proportionales inuenire. Sint datæ duæ rectę lineę inæquales AB, & BC. Et ponantur ita vt rectũ angulum contineant, eum qui sub ABC, & cõpleatur parallelogrammum BD, & diameter ipsius ducatur AC. Et circa triangulum ACD describatur circulus ADEC, & producantur lineæ BA, & BC in rectam vsq; ad F, & G, & coniungatur F,G, transiens per punctum D, ita vt FD æqualis sit lineæ EG, hoc enim tamquam petitio sumitur indemonstratum. Manifestum vtiq; est, quod & FE æqualis est ipsi DG. Quoniam igitur extra circulum ADC punctum sumptum est F, & ab ipso F duæ rectæ lineæ FB, & FE deductæ secant circulum ad puncta A, & D; quod igitur fit ex BF in FA, æquale est ei, quod fit ex EF in FD. Hac eàdem ratione & quod fit ex BG in CG æquale est ei, quod fit ex DG, in GE. Æquale autem est id, quod fit ex DG in GE ei, quod fit ex EF in FD; vtræq; enim vtriusq; æquales sunt, EF scilicet ipsi DG, & FD ipsi EG. Igitur, & quod fit ex BF in FA, æquale est ei, quod fit ex BG in GC. Est igitur vt FB ad BG, ita GC ad FA, sed vt FB ad BG, sic & FA ad AD, & DC ad CG, propter similitudinem triangulorũ. Est autem DC æqualis ipsi AB, & AD ipsi BC, igitut & vt AB ad CG, ita FA ad AD. Erat autem & vt FB ad BG, idest vt AB ad GC, sic GC ad FA, igitur vt AB ad GC, sic & ipsa GC ad FA, & ipsa FA ad BC. Quatuor igitur rectæ lineæ AB, GC, FA, BC inuicem proportionales sunt.



Imperfecta, & paralogistica demonstratio Apollonij apud veteres.

Vidisti ne, mi Tyro, Euclidis reprehensorem Apollonium non demonstrasse id, quod maxime oportuit, nempe ipsas FD, EG esse æquales, & pro petitione sibi assumpsisse, ac supposuiße id, quod geometrica indiget demonstratione? Itaq; noster Euclides potius omittendam, quàm precariam asserendam pro legitima, & Geometrica, demonstrationem sapienter, vt semper, ac merito censuit.

§ 2

§. II.

SCHOLION II.

Duarum mediarũ proportionalium inueniendarum occasio, & vsus.

1 *ACcidit inuentioni duarum mediarum linearum proportionalium idem quod & quadraturæ circuli, cuius theorema iam pridē in Geometrica philosophia demonstratum est, problema verò nondum. Pariter duas medias proportionales, immo & plures in eadem proportione lineas lineis alijs interpositas demonstrant varia theoremata à nobis apposita ad antecedentes propositiones huius lib. 6 element. At inter duas datas more problematũ Geometricorum ponere, ac designare duas in eadem cum datis proportione, nondum præcisè geometricè factum, ac demōstratum esse aliqui arbitrantur. Nos verò loco veri paradoxi asseruimus (& hic etiam paullo inferius asseremus) in Ap 2, Preogym. 3. prop. 11, & in Ap. 3. progym. . coroll. 2. post propos. 11, geometricè, ac organicè ritè inuentas ab antiquis duas med. propor.*

Duarum mediarum proportionaliũ inuentio est & theorema, & problema.

Quod quidem problema de duabus medijs plurifariam vtile est; ac propterea hic in loco à nobis de eo agendum est. Ab eo enim patet campus ingens Euclidem eruditè condiendi, atque ornandi.

Illud autem in primis hìc sequemur vt, pro Tyronibus, missis mixtis aliquorum lineis, & instrumentis operosioribus, vtaremur tantum rectis, & circularibus lineis, & instrumento, quod à norma non differt; ne scilicet in Elementis geometricis à facilitate elementari discedamus.

2 *Extat apud veteres Geometras epistola Eratosthenis ad Ptolemæum Regem, quæ hic consequitur.*

Ptolomæo Regi Eratosthenes. S.

DIcitur ex antiquis tragœdiarum compositoribus vnum introducere Minoa Glauco Sepulchrum excitare volentem, cumq; dictum fuisset illud quaqua versus esse pedes cen-

Minos Glauci Sepulchrum cubicæ figuræ iussit, seruata figurà duplicari.

centum; Dixit paruam fore arcam pro Regio sepulchro, duplicetur igitur, & cubus non mutetur. Certè qui vnumquodq; latus duplicare voluerit, non erit erroris expers. Nam lateribus duplicatis planum quodlibet quadruplū efficietur, ipsum verò solidum octuplum. Quęsitum igitur est a Geometris, qua ratione solidum in eadem figura permanens duplum efficeretur. Quæstio hæc cubi duplicatio nominata est. Nam proposito cubo, quærebant qua via alterum illi duplū efficerent. Ambigentibus, & laborantibus cæteris, primus extitit Hipocrates, qui indicauit id fieri posse, si constitutis duabus lineis, quarum maior minoris esset dupla, duæ mediæ in continua proportione inuenirentur. Quare ea res dubia in maiorem difficultatem versa est.

Delij peste laborantes iussi arā duplicare.

Aliquanto post Delij morbo laborantes, cum ab oraculo Apollinis iuberentur aram ipsius duplicare, neque qua id fieri posset ratione satis viderent, in eandem dubietatem incidere, & obiurgante Platone eos Geometras, qui erant in Academia, ab ijs quæsitum est, vt inuenirent quod propositum fuerat. Ij, cùm labori se dedissent, & conātes inuenire duas medias proportione respondentes duabus propositis lineis, dicitur Architam Tarentinum eas inuenisse hemicylindrorum ratione, Eudoxus verò flexis quibusdam lineis. Cæterum vterq; probatam harum rerum rationem inuenire, sed neuter eas ad vsum potuit accōmodare, & manibus experiri, excepto vno Manechmo, qui tamen parum fecit, & id parum maxima cum difficultate. Sed nos excogitauimus per organa facilem inuentionem, qua non tantùm duas medias proportionales duabus datis, sed quotquot propositum fuerit vt inueniamus, & eo inuento poterimus demum ad cubū reducere propositum solidum lineis æquè distantibus contentum, aut etiam ex vna aliam figuram formare, quæ aut æqualis, aut maior sit, seruata similitudine. Quoniam nulli dubium est, quin huiusmodi instrumento duplicari possint aræ, edificiaq; & ad cubum referri liquidorum, & siccorum mensurę, vt modiorum, & similium, quarum mēsurarum lateribus vasorum capacitas dignoscitur, & vt summatim dicam, quæstionis huius cognitio vtilis est volentibus duplicare, aut maiora reddere organa, è quibus tela, saxa, aut fereæ pilæ mittuntur. Nam necesse est omnia in latum, & in longum crescere proportione quadam, siue foramina sint, siue nerui, & immissa alia, aut quicquid opus fuerit, si totum proportione augeri cupimus; quod fieri non potest sine medij inuentione.

Vsus varij duarum mediarū proportionaliū.

3 Habes in antecedenti epistola 1 occasionem duarum mediarum proportionalium datam esse à quæstione duplandi cubi &c. & ex hoc exemplum Abductionis Geometricæ, de qua vide inferius § 9. 11. non

esse

esse problema id potius curiosum, quàm vtile, quod vtilitates tot practicas habet. Exempla præcipuorum è prædictis vsuum habebis inferius apud nos in sectione secunda Brauiarij nostri stereometrici. Illuc te prouoco.

§ III.

SCHOLION III.

De veterum molitionibus, & inuentis circa inuentionem duarum mediarum proportionalium. Recentiorum aliqua non diuersa ab antiquis. Animaduersio in Pappum noua, vel non prorsus vulgata è recentioribus & à nobis.

1 *QVæ in epistola Eratosthenis innuuntur inuentiones, & instrumenta pro duabus medijs proportionalibus, fusius exponuntur è Veteribus ab Eutocio in commentar. ad Archim. de sphæra, & cylindro, & a Pappo lib. 3. propos. 5. & lib. 4 post Prop. 22 vsq; ad 26. Item a nostro Clauio in Geom. pract. & ab alijs; inter quos vide etiam Danielem Barbarum in Comm. ad lib. 9. cap. 3. Vitruuij, vbi habet inter vetera id noui quòd apponit orthographiam mesolabij Architæ, ac eius vsum sibi missa ab amico Antonio Maria Paccio.*

Neq; vero nobis otium est censuram exercere, ac prodere deficientias aliorum siue antiquorum, siue recentiorum in molitionibus organicis, & geometricis circa hoc celeberrimum problema de duabus medijs. Geometricè sciens lector citatos à nobis Authores legat, ac de ijs, si lubeat, censeat. 2

Tantùm hic indico non facile esse noua circa hoc problema moliri post acutissima Veterum inuenta, ac pro nouis aliqua afferri ab aliquibus, quæ coincidunt cum antiquorum inuentis. Exemplo sit Orontius in lib. de hactenus in Geometria desideratis, &c. vbi pleraq; pro nouis, atq; a se inuentis habet circa inuentionem duarum mediarum, quæ tamen non differunt ab antiquorum inuentis. Modi enim quos affert

Orõtius de duabus medijs proportionalibus coincidit cum antiquis.

fert in lib. 1. propos. 1. vsq; ad propositionem 5, sunt ijdem cum inuentionibus Eratosthenis, licet Orontius aliquid variet, dum vtitur suo illo gnomone, vbi diuisio facta est lineolæ secundum mediam, & extremam rationem.

Pariter alij aliqui modi posteriores apud eundem Orontium in idem cadunt cum demonstratione, ac deficiẽtia demõstrationis Apollonij à nobis è veteribus allatæ, § 1 antec. Modus item propositionis 5 apud eundem Orontium est idem cum modo Platonis apud antiquos.

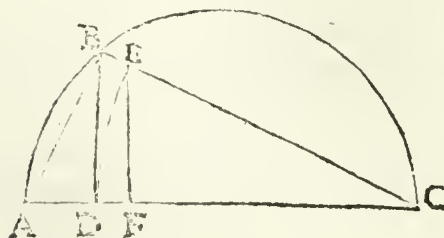
Pappus male affirmat problema de duabus medijs esse tantũ è genere problematũ solidorũ.

2 Quod verò Pappus lib 3 cit affirmat problema de duabus medijs esse è genere tantùm solidorum problematum (vide quæ nos perscripsimus in To. 1 huius Ærarij, § 4 ad primam, & § 1 ad 35 propositiones libri 1 clem) redarguitur sententiæ falsæ ab ijs Antiquorum, & Recentiorum, qui re ostendunt esse etiam id problema planum, & lineare, dum id soluere conati sunt vel per mixtas quasdam ingeniosas lineas, vel per simplices ortum in plano habentes, vt sunt rectæ, & circulares. Sic Nicomedes conchili. Diocles cissoidea, Menechmus sectionibus conicis. Rectis verò, atq; etiã circularibus lineis Erathostenes, Sporus, Plato nisi sunt problema absoluere.

At nos interim iam pridem apud alios vulgatis, ac protritis, licet ingeniosissimis, veterum inuentis circa duas medias, &c. apponemus aliqua saltem non passim vulgatissima è recentioribus inuentis, vt Lectori sit aliquod pretium operæ in legendis nostris hisce ad Euclidem condimentis,

§. IV.

Pro duabus medijs Theorema, ac Lemma.



IN semicirculo quolibet ABC, si applicetur qualibet recta CB, & à pũcto sectionis cum circũferentia B demittatur in diametrum perpendicularis BD; tũ interuallo CD si secetur applicata in E, atq; a sectione demittatur perpendicularis EF, erũt applicatæ segmenta BC, CE.

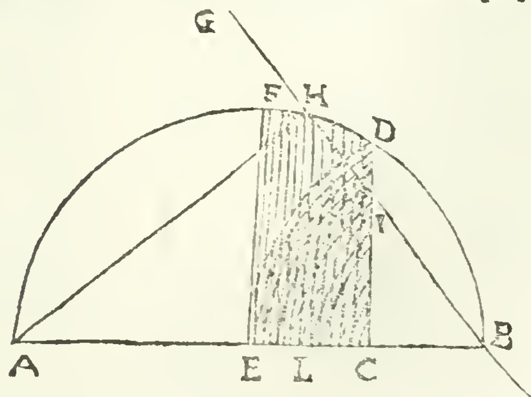
CE duæ mediæ proportionales inter diametrum AC, & inter segmentum CF. Iuncta enim AB, sunt tria triangula inter se æquiangula ACB, BCD, ECF. nam in primo triangulo angulus ABC in semicirculo rectus est, in secundo, & tertio triangulo anguli BDC, EFC à perpẽdicularibus recti sunt, & angulus ad C communis est. Ergo reliqui reliquis æquales. Quare, per quartam huius, habent latera circa æquales angulos proportionalia. Igitur vt AC ad CE, ita CB ad CD, hoc est ad CE sectam ipsi CD æqualem, & vt CB ad CE, ita CE ad CF. Itaq; quatuor sunt rectæ inter se continuè proportionales AC, CD, CE, CF.

§. V.

PROBLEMA I.

Datis duabus rectis duas medias proportionales attentare, atq; interponere.

DAtæ sint maior AB, minor BC inter se in commune segmentum CB compositæ, inter quas opportet duas medias inuenire. Circa maiorem describatur semicirculus ADB, & ex minoris termino C excitetur perpendicularis CD.

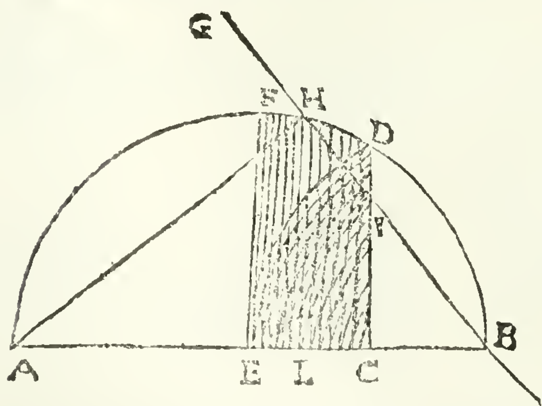


Interuallo BD signetur diameter in E; ex E perpẽdicularis secet circũferentiã in F. Deinde intra terminos FD varijs interuallis ex B fiant crebræ aliquot sectiones in circumferentia, ex quibus sectionibus demittantur in diametrum totidem perpendiculares. Ex B interuallis ad singulas perpendicularium cum diametro sectiones ducantur arcus se-

cantes perpendicularem CD, vt apparet in apposita figura. Deniq; regula ad punctum B apposita, & fixa, secundum alterum extremum G moueatur per arcum DF donec aliquorum duorum arcus, & perpẽdicularis (scilicet alicuius arcus ducti è puncto aliquo inter EC, & alicuius perpendicularis inter FD) habentium commune punctum in diametro iungat sectiones, alteram in perpendiculari DC, alteram in arcu FD, si non præcisè geometricè, saltem sine sensibili differentia; & ad imaginarias sectiones proximas signatis in figura sectionibus. Ceu vides rectam, siue regulam BG iungere sectiones I, & H arcus IL & perpendicularis HL habentium commune punctum in L. Ac tunc segmenta HB, IB erunt pro inuentis duabus medijs proportionalibus inter datas AB, BC. Demonstratio patet ex lemmate antecedenti. Sunt enim tria triangula rectangula habentia communem angulum ad B, atq; inter sese æquiangula HLB, ICB. & si fingas iunctam AH, tertium triangulum erit ABH. Ergo, iuxta lemma, vt AB ad BH, ita BH ad BL, hoc est ad æqualem BI, & vt BH ad BI, ita BI ad BC.

SCHOLION IV.

1 QVoniam lineæ BG duplex esse debet sectio, altera à perpendiculari DC, altera ab ipso arcu semicirculi AFD, & interuallorum ex B secantium perpendicularem DC maximum est BD, ac per D (vbi commune punctũ esset sectionum tã arcus semicirculi AFD, quam arcus ex interuallo BD ducti) ducta recta ex B non haberet duo segmenta pro vtraq; media proportionali; propterea interuallum BD translatum est in E, vt habeatur interuallum EC, itemq; illi æquale FD, intra quorum interuallorum

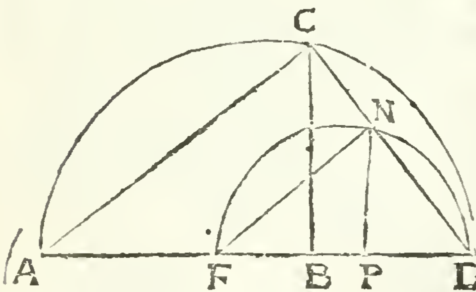


terminos E, C, & F, D consistunt & perpendiculares ex arcu FD, & arcus ducti ex communibus punctis perpendicularium cum diametro ad perpendicularem DC. Itaq; quæcunq; applicatæ ex B in semicirculo AFB secabunt arcum intra F, & D, eæ solæ pro nostro problemate aptæ sunt, vt vna ex ijs det duas medias proportionales, quoniam intra terminos F, D, vel E, C duci possunt arcus secantes perpendicularem DC infra D.

2 Ope huius nostræ praxis inuenientur lineæ vel semper magis, ac magis accedentes citra, vel semper minus recedentes vltra quæsitam applicatam, cuius duo segmenta dent quæsitas duas medias proportionales inter ipsas AB, CB, donec tandem perueniatur ad insensibilem differentiam.

§. VI.

Lemma ad organicam inuentionem duarum mediarum proportionalium.



SE mutuo tangant quilibet duo circuli ACD, FND in pũcto D, quod sit terminus diametri DA, & quoniam eadem DA, per 11 Tertij etiã transit per centrum semicirculi FND, erit DF diameter semicirculi FND; applicetur; ad circumferentiam maioris semicirculi rectæ DF (idest diametro minoris circuli) æqualis DC secans minorem semicirculum in N, & ex N demittatur in diametrum DA perpendicularis NP, erunt CD, DN duæ mediæ proportionales inter AD, DP. Iunctis AC, FN, statim apparet in semicirculis rectos esse ad C, & ad N. Quare, iuxta demonstrata ex antecedenti nostro lemmate §. 4, erunt tria æquiangula triangula, &c. & vt AD ad DC, ita DF, hoc est illi secta æqualis DC, ad DN, & vt DC, siue DF ad DN, ita DN ad DP.

Item aliter, ac breuiter, ex praxi apud nos in to. 1 huius Ærarij ad prop. 11, & 12, § 2, si secetur DB æqualis ipsi DN, BC, quæ iunget puncta B, & C, est perpendicularis. Igitur ex corollar. prop. 8 huius, in triangulis rectangulis ACD, FND, ipsa CD est media proportionalis inter AD, DB, siue DN; & ND est med. propor. inter FD, (siue DC,) DP. &c. ergo, &c.

§. VII.

PROBLEMA II.

Aliter II.

Inter duas datas duas medias proportionales organice inuenire.

Datæ sint AB, BC. Erigatur perpendicularis CD occurrens in D peripheriæ semicirculi ADB descripti circa maiorem AB. Interuallo BD fiat sectio in E; eritq; interuallum AE, in quo sectiones factæ ex B dabunt applicandas in semicirculo

circulo, quæ nostro negotio aptæ sunt. Accipiatur norma duplicata BGH, cuius rectus angulus I sursum, aut deorsum moueatur per perpẽdicularem CD, ac interim latus IB semper excurrat per punctum B, donec ductorum arcuum ex B per spatia EA, AD vnum aliquem contingant in extremis latera IG, IH, ceu vides factum ad extrema arcus GH; hoc enim facto duæ HE, IB erunt inuentæ mediæ proportionales inter AB, BC. Nam iunctâ AH, statim patet demonstratio, & applicatio figuræ lemmatis proximè antecedentis. Ac pro norma geminata GIHGIB in figura huius § 7, sunt in figura lemmatis rectæ C-D, FN ad angulum rectum in N, & ibi ex D applicata DF in C notat in figura normæ geminatæ extrema arcus G, H, &c. Itaq; in vtraq; figura tria sunt rectangula æquiangula triangula. In figura quidem normæ geminatæ trianguli AHB angulus H in semicirculo est rectus, in triangulo GIB angulus I normæ rectus est, in triangulo ICB angulus C à perpendiculari DC est rectus, & angulus ad B cõmunis est tribus triangulis, &c. Igitur vt AB ad BH, ita BG, hoc est illi æqualis BH, ad BI, & BI ad BC. Quod erat faciendum.

SCHOLION V.

LEmma, & propositio proximè antecedentia è Villalpando sũt, à nobis tamen accisa, & aptius Tyronum captui explicata, & inter se collata, vt lucem accipiant inuicem. Vide plura, & verba ipsa, & instrumentũ Villalpãdi apud nos in Apiar. 2. Prog. 3, propos. 11. & scholia ad eam. Et ipsum Villalpandum cap. 3 vbi etiam per curuas quasdã, quas appellat proportionatrices, ingeniosè duas medias inquirit, &c.

§. VIII.

PROBLEMA III.

Aliter III.

Duas medias proportionales. &c. —

— *Vt habes apud nos ex Platone in antecedẽtibus ad propos 8 huius, & ad eius corollarium.*

§. 9.

§. IX.

SCHOLION VI.

Quomodo duæ mediæ proportionales inseruiant duplationi cubi. Et in duarum mediarum proportionaliũ inuentione exemplum ad Aristotelis intelligentiam de Abductione Geometricà.

1 EVclides lib. 11, Prop. 33. similia solida parallelepipeda inter se sunt in triplicata ratione homologorũ laterum. *& corollariũ eius propositionis:* si fuerint quatuor lineæ rectæ continuè proportionales, vt est prima ad quartã, ita parallelipipedum super primam descriptum ad parallelepipedum simile, similiterque descriptum super secundam. *Igitur, vt cubus dupletur, accipiẽda est recta, quæ dupla sit lateris dati cubi, & inter has duas duæ mediæ proportionales inueniendæ sunt, ac super secunda excitatus cubus erit duplus dati cubi. Nam vt linea quarta primæ est dupla, sic cubus excitatus supra secundam est duplus cubi super prima, per propos. & corollar. cit Vide in Breuiaro nostro Stereometrico in fine bu. 2 To. ad vsum pro hac duplatione cubi.*

2 *Quoniam ergo cubi duplatio eget inuẽtione duarũ mediarum proportionalium, ideo abducta est quæstio duplationis cubi ad quæstionẽ duarum mediarum &c.*

Abductio Geometrica quæ nã. *Optime, atq; opportune huc Proclus lib. 5. in comm. ad Eucl. primam propositionem.* Abductio (*inerudite interpres :* inductio) est transitus a proposito problemate, vel theoremate ad aliud, quo cognito, aut comparato, Propositum quoq; perspicuum est. Exempli caussa, cum cubi duplatio proposita esset ad inuestigandum, quæstionem in aliud transtulere, quod illud propositum consequitur, ad duarum nempe mediarum linearum inuentionem translata est quęstio, & sic quærebant deinceps: quonam modo datis duabus rectis lineis, duæ mediæ proportionales reperirentur. Primum autem dicunt Hippocratem Chium prædictorum titulorum Abductionem fecisse, qui & lunulæ quadratum fecit æquale, & alia multa in Geometria inuenit.

3 Hic

3 *Hic quasi corollary loco patet quid sit Abductio, de qua Arist. in li.2 Priorum Resolutoriorum cap.31. Vbi & exemplum ponit quadratæ lunulæ ab Hippocrate, qui à quæstione de circuli quadratura fecit Abductionem ad quæstionem de rectilineo, quod æquale circulo sit, ac de recta linea ducenda, quæ æqualis sit circuli peripheriæ. &c.*

§. X.

SCHOLION VII.

Duæ mediæ proportionales iam pridem ex antiquorum inuentis geometricè, ac demonstratiuè inuentæ sunt.

Miror aliquos in Geometricis cauillosè philosophantes, dũ alienis inuentis inuident, audere in Geometrica philosophia, quam profitentur, ea negare, vel respuere, quibus nõ firmatis, nutat præcipua moles eius philosophiæ, quam certissimam, ac firmissimam omnium humanarum scientiarum semper omnia sæcula venerata, & admirata sunt. Sic aliqui dum ab Antiquis inuenta (quibus certiora nec ipsi possunt inuenire) circa duas medias proportionales conãtur labefactare, non intelligunt penè vniuersæ Stereometriæ, atque aliarum Mathematicarum scientiarum, (aut etiam extra mathematicas artium) præclarissimas theorias, & operationes labefactari, quæ pendent ab inuentione duarum mediarum proportionalium.

Quam pernicio sum sit negare duas medias proportionales inuẽtas.

Qualium theorematum, & problematũ ad praxes aliqua sunt apud Euclidem in posterioribus libris, in primis apud Archimedem, ac plures alios. Quos nugatos, non philosophatos esse, (& quidẽ publico cum errore omnium sæculorum, quibus semper in admiratione fuerunt) dicendi essent, dum aliqua demonstrant circa solida corpora, quæ nullius firmitudinis sunt sine inuentis duabus medijs proportionalibus.

Nugę non sunt quę Archimed. &c. de solidis &c.

Nos igitur licet hìc in antecedentibus aliqua protulerimus etiam à recentioribus circa inuentionem duarum proportionalium, ea tamen non præposuimus, sed apposuimus antiquis inuentis, & ad copiam, non ad indigentiam ea exposuimus, quasi melioribus, aut certioribus indigerent antiquorum inuenta circa duas medias. Itaq; quod olim in

quia duæ mediæ proportion. ritè sunt inuenta.

Apiar.

Apiar.3 prog.1. ad Nicomedis conchoiden, quasi dubij, ac trepidi pronuntiauimus, hic disertè profitemur, vt Geometricæ philosophiæ partem potiorem de solidis verè esse solidam ostendamus, affirmamusq; duas medias proportionales iam pridem geometricè, ac demonstratiuè inuentas. Nam vt reliquorum Antiquorum inuenta omittam, & saltem vnum indicem, cuius, & apud nos vestigia sunt, duæ mediæ inuētæ per modum Nicomedis ope lineæ conchilis, habent eam certitudinem geometricam, qua nulla maior desiderari potest in vllius problematis geometrica demonstratione. Non ducitur punctis discretis iuxta oculi æstimationem, sed ductu continuato regulari, certo, ac firmato in firmo, ac facili instrumento. Quod a circino in sui operatione non differt, nisi quod dum in orbem fertur cuspis lineæ cōchilis dessignatoria, eodem tempore regula, quæ quasi semidiameter est, etiā in longum fertur certo, firmo, regulari, & continuato motu. Vide id instrumentum etiam apud nos in Apiar.3 Progym.1.

Nicomedis modus pro 2 med. proport. inuentione optimus, demonstratiuus, &c.

Eius instrumenti præcipuus vsus est vt à dato puncto ducatur recta, cuius pars intercepta inter duas angulum facientes, sit æqualis alteri datæ. Quo facto per conchoiden lineam ab instrumenti continuato ductu signatam, nihil desideratur præterea ad perfectam geometricā demonstrationem, quam Nicomedes instituit, & perficit pro inuentis a se duabus medijs proportionalibus. Vide, præter antiquos, apud Clauium lib.6 Geometriæ practicæ figuram demonstrationis Nicomedeæ, atq; in ea applica, & agnosce quæ hic a nobis indicantur, vt tibi constet veritas nostræ sententiæ de duabus geometricè inuentis, & demonstratis medijs proportionalibus.

Nicomedis suppositū organicū, tamē demonstratum, etiam apud nos geometricè circino, & regula peragitur.

Quod si preter circinum, & regulam non admittenda censeas alia instrumenta pro operationibus geometricis, habes etiam a nobis in § 12 ad 32 propos. lib.1. modum, quo datę rectæ acceptum interuallum transferatur secus regulam ad sectionem ęqualis rectæ interceptæ inter duas angulum continentes. Quamquam satis apte, & sine dubitatione, apud ingenuè philosophantes, ipsumet instrumentum Nicomedis transfert interuallum datæ ad æqualem datę secandam æquè, (atque etiam certius) ac circinus secus regulam. Vide nos in cit. § 12 & in Apiar.3 cit. præsertim ad rem, in coroll.2 post propos.15 prog.1. Quas ob res nulla superest dubitandi ratio de geometrica iam pridem inuentione duarum mediarum peoportionalium, ac de veritate, ac certitudine omnium problematum Stereometricorum prodeūtium a duarum mediarum proportionalium geometricè demonstrata inuentione.

§11.

§. XI.

SCHOLION VIII.

De numeris medijs proportionalibus, & duobus & pluribus inter duos datos inueniendis.

Ad ornatum, & gustum Mathematicæ Philosophiæ Tyronibus acuendum, vide Clau. in erudita digressione ad 4 defin. lib. 5. vbi de Geometrica in numeris proportionalitate, num. 10, vnde miros modos, & miras numerorum affectiones proferas ad inueniendos plures numeros geometricè medios proportionales inter quoslibet duos. &c. Vide & Orontium de reb. Math. lib. 1. propos. 9.

Hic interim accipe aliqua ex Euclide lib. 8, quæ nescio qui quasi noua arcana inter sua furtim reposuerunt.

Inter duos nu. quadra. vnus est medius propor-tion.

I. Igitur in cit. lib. 8. prop. 11 demonstratur: Duorum quadratorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus. *Sic inter primũ, & secundum numeros quadratos 4, & 9 medius proportionalis numerus est 6, vt enim 4 ad 6, sic 6 ad 9. Inter secundum, & tertium numeros quadratos 9, & 16 medius proportionalis est 12; vt enim 9 ad 12, sic 12 ad 16. &c. Traxim verò inueniendi medium proportionalem numerum inter duos datos numeros vide inferius apud nos §. 8. ad propos. 17, ex qua propositione demonstratur ea praxis.*

Duorũ cuborũ numerorum duo medij propor-tionales.

II. Propos. 12 cit. li. 8. Duorum cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri. *Sic inter duos primos cubicos numeros 8, & 27 duo medij proportionales numeri 12, & 18 intercedunt, ac vt 8 ad 12 ita 12 ad 18, & 18 ad 27 in eadem continuata proportione.*

Mira verò proprietas est vnitatis comparatę cum quadratis, & cubicis numeris spectans ad nostrũ negotium de numeris medijs proportionalibus. nam —

Inter vnitatem & quemlibet nu. quadratum est medius pro por-tionalis.

— III. Inter vnitatem, & quemlibet numerũ quadratum intercedit numerus medius proportionalis. Sic inter 1, & primum quadratum numerum 4 intercedit numerus medius proportionalis 2, ac vt 1 ad 2, sic 2 ad 4. Inter 1, & secundum quadratũ numerum 9 intercedit medius proportionalis numerus 3, ac vt 1 ad 3, sic 3 ad 9.

Accipe à nobis hic regulam vniuersalem ad praxim. Radix cuius-

libet numeri quadrati est numerus medius proportionalis inter suum quadratum, & vnitatem. 4 radix quadrati 16 est numerus medius proportionalis inter 1, & 16; vt enim 1 ad 4, sic 4 ad 16. Quadrati 25 radix 5 est numerus medius proportionalis inter 1, & 25; vt enim 1 ad 5, sic 5 ad 25. &c. Vide tabellam apud nos in Ap. 11, Prog. 4, cap. 7. Nec opus est ambagibus Benedicti in theor. arith. 33, & 34. Nã patet à radice in se multiplicata, idest toties sibi addita, quot continet vnitates, produci quadratum. ergo &c.

Inter vnitatẽ, & cubicum duo medij proport.

IV. Inter vnitatem, & quemlibet numerũ cubicum duo medij proportionales numeri sunt. Sic inter 1, & primum cubicum 8 duo medij sunt proportionales 2, & 4; ac vt 1 ad 2, sic 2 ad 4, & 4 ad 8 in eàdem continuatà proportione.

Pulchra proprietas.

V. Ex Benedicto, theor. 35. Numerus quilibet per alium aliquem vnum, eundemq; multiplicatus, & diuisus, est medius proportionalis inter productum, & quotientem. 20 multiplicatus per 5 producit 100, diuisus per eundem 5 dat quotientem 4. Inter 100, & 4 medius est proportionalis 20, vt enim 4 est quinquies in 20, sic 20 est quinquies in 100.

Hactenus hæc paucula in numeris mira, & iucunda pro condimento Tyronibus circa prædicta de lineis medijs vna, & duabus proportionalibus inter duas datas.

§. XII.
COROLLARIVM.

De sectione datæ lineæ in subitas partes continuè proportionales.

PRædicta in numeris indicata inseruire possunt negotio geometrico, in quo versati sumus hactenus, de duabus medijs proportionalibus, immo pro sectione datæ rectę in quotlibet continue proportionales partes. Exemplum esto pro sectione in quatuor continue proportionalia segmenta. Data recta interponatur inter extremos numeros, puta 27, & 27 acceptos in circino in partes æquales diuiso, & acceptis interuallis inter 8, & 8, inter 12, & 12; inter 18, & 18 secetur data recta, cuius partes tres sic sectæ cõparatæ cũ tota, erũt quatuor rectæ lineæ continuę proportionales, vt sunt numeri 8, 12, 18, 27, &c. iuxta proprietatem indicatam in anteced. § 11, nu. 2. Similia alia sic applica.

De

De inuentionibus linearum proportionalium etiam in Proportionalitatibus Arithmetica, & Harmonica.

§. I.
SCHOLION I.

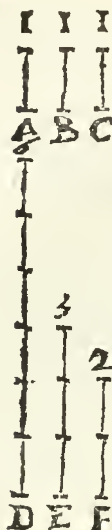
De procreatione Harmonicæ à Geometrica Proportionalitate.

1 QVemadmodum ad 9, & 10. propos. docuimus lineas diuidere in triplici genere præcipuarum Proportionalitatum, scilicet non solum in Geometrica, sed etiam in Arithmetica, & Harmonica; ita & hic æquum alicui fortasse videatur post hanc 13. prop. quæ vltima est de lineis proportionalibus inueniendis in Geometrica proportionalitate, addere saltem aliqua de inuētionibus linearum proportionalium etiam in Arithmetica, & Harmonica proportionalitatibus. Age fiat satis æquo Tyronum desiderio, sed cum ea exceptione, ac terminis apud nos consuetis, idest vt indicatis tantùm apud alios iam vulgatis, si quid apud alios non vulgatum occurrerit apponamus. Et quoniam exiguæ sunt ingenioli nostri vires, ideò paucula, & breuiter promimus.

Itaq; qui plura, & tam pridem vulgata, sed non pro vulgo, exquirit circa inuētiones linearum proportionalium non solum in triplici, sed & in decem generibus Proportionalitatum, videat Pappum citatum à nobis ad 10 prop. Eucl vbi de sectionibus linearū; videat etiam Clauium, ac si qui alij à Pappo, & post Pappum. &c.

2 Omissis reliquis, notatione dignum nobis visum est id, quod acutè apud Pappum docetur de modo, quo ex Geometrica proportionalitate gignitur Harmonica. Omitto Arithmeticam ex eadem Geometrica prodeuntem, solū de Harmonicæ ortu à Geometrica loquor, quia vsui mox futurus nobis est. Propositionis mox à nobis afferendæ demonstrationem geometricam (quam Clauius ad numeros transtulit) vide apud Papp. lib. 3, propos. 20. Aptius Tyronum doctrinæ hic fiet (vt ad propos. libri 2, & 5) si propositionis ostensionem quam-

dam in numeris faciamus, ac in lineis, quasi per vnitates, in partes æquales concisis. Videbis eum, qui sit instructus geometricà proportionalitate (de qua nos hactenus abundè cum Euclide) possidere etiam vi, ac potentia reliquas proportionalitates a Geometrica prodeuntes.



Finge in Geometricæ Proportionalitatis proportione æqualitatis (facilitatis, & euidentiæ maioris gratia) esse tres lineolas, quasi tres vnitates A, B, C; vt ex earum Geometrica Proportionalitate fiant tres lineæ in Harmonica Proportionalitate, affirmat Pappus: duabus A, tribus B, & vni C, sit æqualis D; duabus B, & vni C sit æqualis E; & vni B, & vni C fiat æqualis F Dico D, E, F harmonicam constituere medietatem. &c. *Huius propositionis regulam intellige vniuersalem circa quodlibet aliud genus proportionis Geometricæ cuiuscumq; inæqualitatis. Addit Pappus in fine Geometricæ demonstrationis;* manifestè patet si ABC vnitates ponantur, eam (*scilicet harmonicam rectarum D, E, F. Proportionalitatem*) consistere in minimis numeris 6, 3, 2. *Regula abstractè vniuersalis est: Trium linearum in harmonica proportionalitate prima, & maxima constat ex primà (in Geometrica Proportionalitate) geminatà, ex secundà, siue medià triplicatà, & ex tertià semel assumptà. Secunda (siue media harmonicæ) constat ex medià (geometricà) geminatà, & ex tertià semèl assumpta. Tertia ac minima harmonica constat ex medià, & tertià, siue minimà geometricà simul iunctis.*

3 *Figuræ applico, & affirmationis veritatem ostendo. Vides, posita proportione æqualitatis trium A, B, C in Geometrica Proportionalitate, primam, & maximam inæqualium D compositam esse ex A geminata, & ex B triplicata, & ex C semèl assumptà, hoc est ex sex partibus, quarum duæ priores æquales sunt primæ A, tres sequentes sunt æquales secundæ B, sexta æqualis est tertiæ C. Vides secundam inæqualium, siue mediam E, constare ex B geminatà, & ex C semel assumptà, hoc est ex tribus partibus, quarum duæ priores æquales sunt mediæ B, tertia pars est æqualis tertiæ C. Vides tertiam inæqualium F constare ex B, & C simul assumptis, hoc est ex duabus partibus, quarum prior æqualis est mediæ B, posterior tertiæ C.*

Ac sunt tres (sic ex geometricis lineis conflatæ) D, E, F in harmonica Proportionalitate, quia eadem est proportio primæ D ad tertiam

tiam F, quæ differentiæ inter D, & E ad differentiam inter E, & F. vt patet in numeris 6, 3, 2, in quibus, vt 6 ter continet ipsum 2, sic differentia 3 inter 6, & 3 ter continet 1 differentiã inter 3, & 2.

Accipe pariter in numeris exemplum procreationis harmonicæ proportionalitatis ex Geometrica inæqualis proportionis, puta in sesquialterà, in qua sint geometricè se habentes numeri 9, 6, 4. Iuxta regulam antepositam ex 9 bis assumpto, ex 6 ter, ex 4 semel fit summa primi termini harmonici 40. ex 6 bis, & ex 4 semel aßumptis fit summa medij termini 16; ex 6, & 4 fit tertius terminus harmonicè proportionalis 10. Atq; vt 40 ad 10, sic differentia intèr 40, & 16, hoc est 24 ad differentiam inter 16, & 10, hoc est ad 6. Geom. 9, 6, 4. Harmon. 40, 16, 10.

§. II.

LEMMA.

Ex harmonica Geometricam Proportionalitatem procreare.

HOc Pappus non habet. *Nobis vsui futurum est in sequenti Problemate. Accipe Lemmatis solutionem applicatam figuræ antecedenti. In Harmonica Proportionalitate sint D, E, F; vt ad Geometricam reuocentur sic operare. Detrahe minimum terminum F ex medio E, 2 ex 3, & reliquum primum repone pro medio termino B Geometricæ Proportionalitatis. Ipsum B detrahe ex minimo Harmonico F, 1 ex 2, reliquum 1 repone pro altero extremo C Geometrico. Denique iũge inter se minimum Harmonicum F cum duplo medij Geometrici B, idest 2, & 2, idest summam 4 confice, quam detrahe ex maximo harmonico D, idest detrahe 4 è 6, & residui dimidium, idest residui 2 semissis 1, erit alterum extremum A Geometricæ Proportionalitatis ex Harmonica.*

Accipe etiam exemplum alterum in resolutione ad Geometricam inæqualitatis. In Harmonica sunt 40, 16, & 10, minimus terminus 10 ex medio 16 subtractus relinquit 6, qui est medius Geometricus, idem 6 sublatus ex medio harmonico 10 relinquit 4 minus extremum geometr. minimus harmon. 10 compositus cum duplo medij Geomet. 6, idest 12, & 10 conficiunt summam 22, quæ subtracta è maximo har-

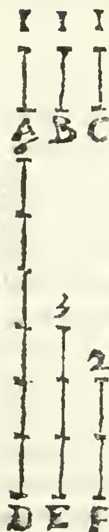
barmonico 40, relinquit 18, cuius dimidium est 9 tertius, ac minimus terminus Geometricus. Harmon. 40, 16, 10, Geomet. 9, 6, 4, et harmonica.

Ex antedictis tu, mi Tyro, elice regulam vniuersalem, & abstractam procreandi Geometricam ex Harmonica proportionalitatem.

§. III.

PROBLEMA, & Paradoxum.

Datis duabus rectis, media, & minore extrema, maiorem extremam in Harmonica Proportionalitate inuenire per analogiam ad Geometricam.



QVod Pappus, & ex eo alij soluunt, nos aliter ex antecedenti lemmate soluemus quodã modo paradoxico, scilicet maiorem extremum terminum Harmonicum inueniendo ex maiore Geometrico. Datæ sint E media, & F minima, quibus maxima D inuenienda sit in Harmonica Proportionalitate. Per antecedens lemma analyticè eant E, F in B, C. Ipsis B, C inueniatur tertia maior proportionalis in geometrica proportionalitate, per proposit. 11. Eucl. & modos nostros ad eam; inuentaq; sit A, quam, è Schol anteced. & è modo Pappi auge in D, eritq; D tertia maxima quæsita harmonicè. Augetur autem A in ipsam D harmonicam per compositionem geminatæ A, triplicatæ B, & semel assumptæ C, idest ex 1 fit 6. siue fit ex A ipsa D per additionem ipsarum E, F ad A, in hoc exemplo æqualitatis, hoc est per summam ex 3, 2, 1 in 6.

Pariter in exemplo numerario altero, datis 16, & 10, inuenies extremum maximum harmonicum, si, per antecedens lemma, resoluas 16, & 10 in 6, & 4; quibus tertio proportionali maiore 9 addito, ipsum 9 augetur harmonicè, si geminetur in 18, & addatur medius geomet. 6 ter, & semel extremus minimus 4. ex 18, 18, 4 fit sum-

summa 40, qui est maximus, ac primus terminus quaesitus in harmonica proportionalitate 40, 16, 10, atq; inuentus analyticè ex Geometrica Proportionalitate.

§. IV.

SCHOLION II.

Dato medio, & maiore extremo, inuenire minus: datis extremis, inuenire medium, &c. in Harmonica Proportionalitate.

VIde Pappum propos. 9. vbi inuentionem docet minoris extremi in harmonica proportionalitate, vide & nos in antecedentibus ad 10 propos. § 18, vbi de inuentione medij in proportionalitate harmonica. Ad Pappum te reiecimus, quia nihil noui habemus circà inuentionem minoris extremi in harmon &c sicut è nostris aliqua non vulgata protulimus circà inuentiones medij, & maioris, &c.

§. V.

SCHOLION III.

De Inuentionibus extremarum, & mediae linearum in Arithmetica Proportionalitate.

VIde nos ad propos 5. lib. 2. elem. vbi in loco ex demonstratione, & figura eius 5 proposit. omnia facillimè patent spectantia ad inuentiones extremarum, & mediae proportionalium linearum in Arithmetica Proportionalitate.

§. 6.

§. VI.

SCHOLION IV.

De Inuentionibus extremorum, & mediorum numerorum in Proportionalitatibus Harmonicà, & Arithmeticà.

VIde nos ad propos. 5. lib. 2. vt ex ijs ornes, ac dites etiam in numeris antedicta de lineis harmonicè, & arithmeticè proportionalibus; quemadmodum habes in antecedentibus, § 11, à numeris iucunda, & curiosa proditandis, & ornandis linearum proportionalium inuentionibus &c. in Proportionalitate Geometricà.

Propositio XIV. Theor. IX.

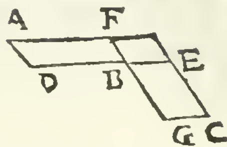
Aequalium, & vnum vni angulo æqualem habentium parallelogrāmorum reciproca sunt latera, quæ circa æquales angulos. Et parallelogramma, quæ vnum vni angulum æqualem habent, & quorum reciprocantur latera circa æquales angulos æqualia sunt.

SInt parallelogramma AB, BC æqualia habentia angulos ad B æquales, positæque sint DB, BE in directum, a erunt ergo & FB, BG in directum. Dico parallelogrammorum AB, BC latera, quæ circa æquales angulos, esse reciproca. Hoc est, esse vt DB ad BE, ita GB ad BF. Perficiatur enim parallelogrammum FE. Et quia

a *Colligitur ex 13. 14. & 15. 1.*

AB





AB, BC parallelogrã-ma æqualia sunt, aliud autem quoddam est F-E, [b] erit vt AB ad FE, ita BC ad idem FE. sed vt AB ad FE, ita est DB ad BE;& vt BC ad FE, ita est G-B ad BF. [d] Ergo est vt DB ad BE, ita GB ad BF. Parallelogrammorum ergo AB, BC [e] latera sunt reciproca. [f] Reciprocentur iam latera, quæ circa æquales angulos; sitque vt DB ad BE, ita GB ad BF. Dico parallelogramma AB, BC æqualia esse. Cum enim sit vt DB ad BE, ita GB ad BF. [g] Et vt DB ad BE, ita AB ad FE; atque vt GB ad BF, ita BC ad FE, erit vt AB ad FE, ita BC ad idem FE; [h] æqualia ergo sunt parallelogramma AB, BC. Æqualium ergo, & vnum vni, &c. Quod oportuit demonstrare.

b prop.7.5.
c prop.1.6.
d prop.11.1.
e def.6.1
f def. 2.6.
g prop.1.6.
h prop.9.5.

SCHOLION I.

Ex harum 14, & 15 propos. parte secunda habes demonstratam in vsu geometrico centri grauitatis æqualitatem figurarum. Vide in Epilogo planimetrico sub finem 3 partis hu. 2 Tomi.

§. I.

PROBLEMA I.



Dato parallelogrammo æquale parallelogrammum, ex vsu propos. 14, describere.

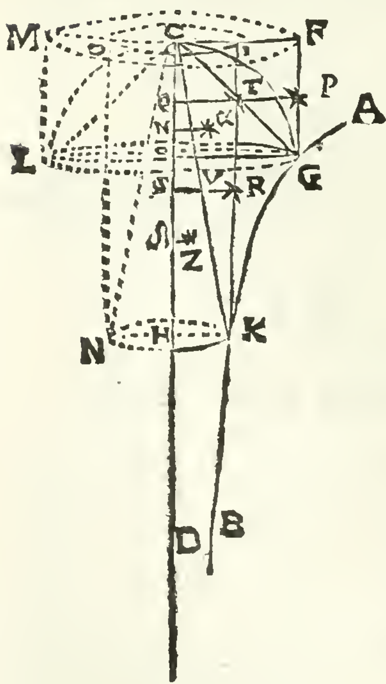
Dati parallelogrammi AB quodlibet latus AC extendatur in directũ ad lubitum terminum D. Ac fiat reciprocè vt DA ad CA, sic AE ad AF: rectangulum DF æqua-

le est rectangulo C E. Habent enim circà cõmunem angulum A laterat per constructionem, reciprocè proportionalia, iuxtà hanc 14 huius, Erit hæc praxis nobis vsui pro nouo modo describendæ hyperbole. etiam intrà asymptotos, ad 29 huius.

§. II.

THEOREMA I.

Si parallelogrammorum rectangulorum inter hyperbolen, & rectam asymptoton latus asymptoto parallelum ad distãtiam alterius lateris gyrari concipiatur, fient superficies cilindricæ sine basibus, omnes inter se se æquales.



Traducamus iam facilè vsu centri grauitatis hanc propos. 14 etiam ad superficies aiquas rotundas. Hìc in loco, vbi supponitur 14 huius, libet aperire præclara theoremata, quæ deducuntur ex demonstrato theoremate (de quo in analecto 10 ad Apiaria, & ad 35. lib. 1, & ad primam huius, & inferius ad 29) de parallelogrammis (& triangulis inferius ad 15 huius) æqualibus inter asymptotos. Vt videas hìc, & alibi in vtroq; huius Ærary tomo à nobis elementa Geometricæ philosophiæ etiam ad vltra elementa produci

ac

ac eleuari. Ad cilindricarum, & conicarum superficierum, & soliditatum quantitates, dimensiones, & proportiones, &c. hinc gradum facies facillimum, sine vlla necessitate demonstrationum ex Archimedeis, vel posterioribus Euclidianis: vt mox videbis.

Esto hyperbole AE, & recta illi asymptotos CD. Parallelogrammorum rectangulorum (euidentiæ, ac facilitatis gratià, finge angulum rectarum asymptoton CD, CF comprehendentium hyperbolen vtrinq; descriptam, esse rectum in C) EF, HI finge latera FG, IK ad distantias EG, (siue PQ) & KH (siue SR) gyrari parallelos, quasi circa axem, circa asymptoton CD; ea latera (sine lateribus tamen inter CF, EG, CI, KH) dum sic gyrantur in orbem perfectum, producent geminas cylindricas superficies sine basibus, quales finge FGLM, IKNO, quæ inter se se erunt æquales. Idemq; fiet ex lateribus quorumcumq; parallelogrammorum inter asymptotos producentibus semper æquales inter se cylindricas superficies.

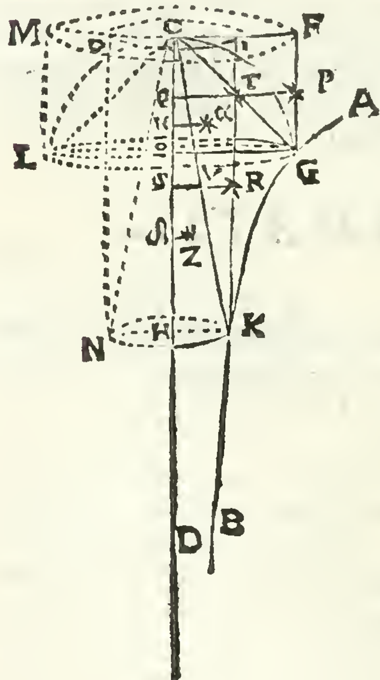
THEOREMATIS

Præcedentis facillima demonstratio ex nouo vsu centri grauitatis.

Licet ex demonstratis apud Antiquos liceat nobis demonstrare propositionem præcedentis Theorematis, tamen (Deo grates) vnus nobis ex domesticis noster Guldinus sufficit pro antiquis, & neotericis omnibus Qui Guldinus regulà vnicà, breui, facillima, & vniuersalissima, congruente cum antiquorũ, & aliorum omniũ demonstrationibus, &c. lib. 2 de centro grauitatis cap. 8, quasi aurea geometricà claue (sic iterũ, ac tertiò iuuat eam appellare) tam ingentem thesaurum, & tantam copiam aperuit pro demonstrationibus, constructionibus, proportionibus superficialium, & solidarum (præsertim quas vocant rotundas) figurarum, vt vnus longe plura corpora, & plures superficies nouarum figurarum sub cognitionem, & demonstrationem geometricam produxerit, quàm cæteri omnes simul antiqui, & neoterici geometrici philosophi.

Latera FG, IK bifarientur in P, R, & iungantur ad rectos in Q S rectæ PQ, RS. Quoniam, ex citato Guldino, in rectanguli EF latere FG, centro grauitatis T, rotato parallelos ad distantiam PQ, circà

asymptoton CD, superficies cylindrica sine basibus, quam producit id latus FG, est æqualis superficiei comprehensæ sub FG, & sub peripheriâ, quam describit centrum grauitatis T, hoc est rectangulo (siue producto) sub FG, & rectâ, quæ sit æqualis peripheriæ descriptæ à T. Itemq; in rectangulo HI superficies cylindrica sine basibus, quam describit latus IK in rotatione parallela circà CD, est æqualis superficiei comprahensæ sub IK, & sub peripheria designata à centro grauitatis R lateris IK, hoc est rectangulo sub IK, & recta æquali peripheriæ ab R designatæ; atq; ex Pappo (vide nos in 1 tom huius Ærarij ad prop. 45. § 3.) vt peripheria ex T ad peripheriam ex R, sic semidiameter TQ ad semidiametrum RS; vt autem TQ ad RS, ita reciprocè IK ad FG, per 14 huius (sunt enim inter asymptoton, & hyperbolen parallelogrammata EF, HI æqualia, iuxtà demonstrata in Analectis ad quartam editionem nostrorum Apiar. anal 10. igitur superficies sub FG, & sub peripheriâ designatâ à T, pariterq; superficies sub IK, & sub peripheria ab R, erunt inter se se æquales, per hanc eandem 14 huius: ergo & superficies cylindricæ ex FG, IK circa CD (quæ ex citata Guldini regula æquales sunt superficiebus sub IK, & peripheria ex R, & sub FG, & peripheria ex T) erunt & ipsæ inter se æquales. Quod erat demonstrandum.



§. III.

COROLLARIVM I, ac vniuersale.

Rectorum cylindrorum superficies sine basi-

bus productæ à lateribus etiam inæqualibus æqualiũ rectangulorũ sunt inter se æquales.

Patet ex proximè antecedenti demonstratione. Sunt enim superficies cylindricæ sine basibus æquales productæ ab æqualium rectangulorum lateribus etiam inæqualibus &c. Iuxta hanc 14 &c. qualia sunt in figura antecedent. Theorem. CE, CH; EG, HK. &c.

SCHOLION II.

Confirmatorium præcedentium.

Assertio illa in præcedenti demonstratione, atq; in Corollario vniuersali: superficies cylindrica sine basibus ex rotatione lateris FG, est æqualis rectangulo sub FG, & peripheria à semidiametro QP; *item:* superficies cylindrica ex rotatione lateris IK est æqualis rectangulo sub IK, & sub peripheria semidiametri RS: *cõgruit etiam cum Archimedis propos 13 lib. 1. de sphæra, & cylindro; vbi demonstrat cylindri recti superficiem sine basibus æqualem eße circulo, cuius semidiameter est linea media proportionalis inter latus, & diametrum basis cylindri. Vide expressiora pro hac re apud nos in 3 par. bu. 2 to. ad finem l. 3. vbi eleuamus eum lib. ad geom. rotund. § 2, num. 6.*

§. IV.

COROLLARIVM II.

Superficies cylindri recti sine basibus producitur, ductà cylindri altitudine in circumferentiam basis.

Patet ex antecedentibus; nam rotatio, siue circumferentiæ centrorũ P, R ad distantias PQ, RS, sunt è semidiametris basiũ IG, NK, quibus æquidistantes, & æquales sunt rectæ PQ, RS. Vide & Guldinum lib. 3. cap. 1. propos. 6.

§. V.
THEOREMA II

Cylindri recti, æqualium ſine baſibus ſuperficierum, facti ex gyratione circa aſymptoton æqualium rectangulorum, habent inter ſe proportionem ſemidiametrorum in baſibus. Ac demonſtratur ex nouo vſu geometrico centri grauitatis.

ELeuemus etiam ad Stereometriã hanc 14 ex vſu facili cẽtri grauitatis. Dicet Tyro, quemadmodum ex æqualium rectangulorum lateribus (licet inæqualibus) fiunt æquales ſine baſibus cylindricæ ſuperficies, an non etiam ex æqualium rectangulorum circà aſymptoton gyratione fiunt ſolidi cylindri æquales, licet inæqualium inter ſe altitudinum, & baſium? Haud quaquam, mi Tyro. Finge igitur circà aſymptoton CD gyrari rectangula EF, HI, fient geminæ ſolidæ figuræ rectorum cylindrorũ LF, NI, quorum ſolidas quantitates affirmo eſſe in proportione, quam habent inter ſe baſium circularium ſemidiametri, quales finge inter EG, HK.

Quoniam enim ex aureà geometricà centri grauitatis regulà (cuius conſonãtiam cum demonſtratis ab alijs & in antecedentibus

tibus, & hic mox videbis) soliditas cylindrorum LF, NI conficitur ex ductu rectangulorum EF, HI in circumferentias, quas in rotationibus circa CD descripserunt centra grauitatis in T, & V, vbi sunt semisses rectarum PQ, SR, quæ bifariant rectangula, & quæ sunt æquales basibus rectangulorum eorundem EF, HI; ac ipsa quidem rectangula sunt inter asymptotos æqualia, peripheriæ verò, ex inæqualibus semidiametris QT, SV descriptæ, sunt inæquales: ergo cylindrorum differentia, & proportiones inæqualitatis desumendæ sunt non à rectangulis æqualibus, sed ab inæqualibus circumferentijs centri grauitatis factis à semissibus QT, SV basium ipsis PQ, RS æqualium Vt verò sunt circumferentiæ, sic & diametri: ergo vt circumferentia facta à puncto T ad circumferentiam factam à puncto V, ita diameter, idest duplicata QT ad duplicatam SV, idest ad diametrũ SR. At QP, SR sunt semidiametri basium LG, NK: ergo cylindri recti isoperimetri LF, NI habent inter se proportionem semidiametrorum in basibus.

SCHOLION III.

Congruit nostra demonstratio ex vsu geometrico centri grauitatis cum ritè demonstratis ab alijs, qui probant cylindros rectos isoperimetros &c. esse inter se sicut diametri basium. Vt enim apud nos inter se sunt semidiametri, sic & pro illis duplicatæ semidiametri, idest diametri.

COROLLARIVM III.

Ex prædictis etiam patet inter prædictos cylindros esse proportionem circumferentiarum in basibus. Vt enim semidiametri, & diametri, sic & circumferentiæ inter se.

§. VI.
COROLLARIVM IV.

Cylindrorum rectorum (isoperimetrorum sine basibus) reciprocantur sicut semidiametri

(etiam

(etiam diametri, & peripheriæ) basium, sic etiam soliditates cum altitudinibus.

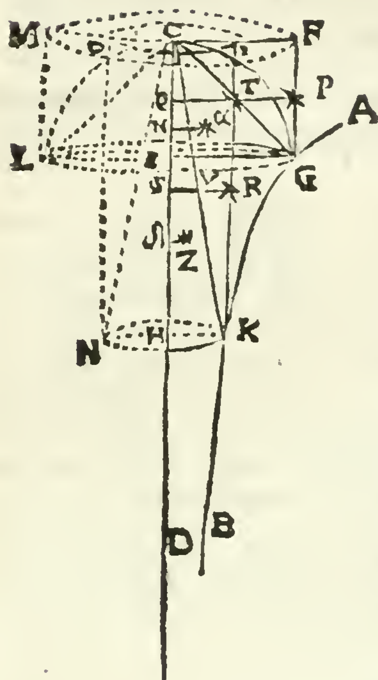
SIc semidiametri inter EG, & inter KH (hoc est illis æqualis TQ, RS) cylindrorum LF, NI isoperimetrorum, (per demonstrata in antecedentibus) reciprocantur cum altitudinibus HC, EC; sunt enim latera reciproca (ne discedamus ab vsu huius propos. 14) rectangulorum æqualium inter hyperbolen AGKR, & asymptoton CD. Ac vt semidiametri, sic diametri inter NK, & inter LG, & peripheriæ basium circularium &c. iuxtà antedicta, & probata. Vt verò, ex theorem. anteced. basium semidiametri reciprocantes cum altitudinibus, ex hac 14. sic soliditates inter se cylindrorũ. Sic nos facilius deducimus ex antedemonstratis, & clarius iuxtà formulam geometricam huius 14 proposit. affirmamus, quàm aliqui, dum dicunt: recti cylindri isoperimetri sine basibus, habent inter se proportionem altitudinum contrariè acceptarum. &c.

§. VII.

COROLLARIVM V, & VSVS proximè præcedentiũ theorematis, & corollariorum in re vasaria pro liquidis. &c.

FInge factas, ac datas geminas æquales, atq; inter se congruentes superficies flexiles, æreas, rectangulas, quarum latera maiora sint in data, vel lubita proportione, puta triplà, vel duplà minoris lateris, velut hic in figura rectanguli HI latus HC respectu lateris CI. Ex datis laminis possunt fingi cylindrici duo cyathi isoperimetri sine basibus, nempe vel iũgendo in vnum duo latera longiora alterius laminæ, vnde prodeat cylindrus sine basibus maioris altitudinis, vel alter cyathus cylindricus potest fingi, iunctis in vnum alterius laminæ lateribus minoribus, vnde prodeat cylindrus sine basibus minoris altitudinis. Finge exẽpla in LF, NI. Alterutrà basium clausà à circulo in vtroq; cyatho, ac vino infuso, quæ-

re



ro ex te, mi Tyro, primò, vter eorum cyathorum plus vini cõtinebit? Secundo quantò plus vini alter altero cyathus continebit? Si altitudines HC, EC adspicias, te fallent, ac indicabunt maiorem cylindrum, qui minor est. &c. Cum ergo sint cyathi isoperimetri, spectandæ sunt, non altitudines, sed semidiametri basium, ex ante demõstratis. Quoniam verò minus altus cyathus LF habet in basi LEG semidiametrum EG, (nempè rectam illi æqualem PQ) puta duplam semidiametri KH (nempè rectæ RS illi æqualis) in altiore cyatho NI, ideò duplo plus vini continebit LF, quàm NI.

Ac si vnicam rectangulam laminam habeas, e Geometricis theorijs docebit te Physica vt eam cylindricè inflectas, cõmissis mineribus lateribus, vt plus vini & infundas, & haurias; at verò philosophia Moralis non abutens geometricis demonstrationibus, submittet tibi, mi Tyro, Temperãtiã quasi Pincernam, quæ cylindricum poculum ex eàdem laminà, commissis longioribus lateribus, minus capax, ac vino lymphato infusum tibi propinet, quod aptius erit Mathematicis abstractionibus intelligendis, & exercendis.

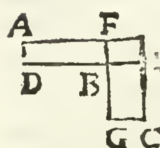
Hactenus aliqua ex vsu, & demonstrationibus à 14 propos. huius circà rectangularum, & cylindricarum superficierum, & soliditatum reciprocationes inter hyperbolicam, & rectam asymptotos &c. Gradum iam faciamus ad aliqua circà reciprocationes, & partus aliquos geometricos triangulorum æqualium inter easdem asymptotos. *Ad prop. 15, § 3. etc.*

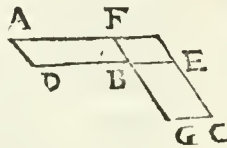
§. VIII.

THEOREMA III.

 In

In parallelogrammis omnia complementa eorum, quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum, ſunt reciproca, ſiue habent latera reciproca.





REuiſe, ac repone hic figurã propoſit. 43 libri 1. Euclid. ſiue mãlis in figura hic huius propoſ. 14, productis lateribus AD, CG, & concurrentibus in angulum, finge factum eſſe parallelogrammum, circa cuius diametrum ſint parallelogrammata FE, & imaginatum DG ſub rectis DB, BG oppoſitè geminatis. Quoniam per 43 propoſ. lib. 1. complementa AB, BC ſunt æqualia, & angulos ad verticem B habent æquales, ergo circa B habent latera reciproca &c. iuxta hanc propoſ. 14; ac ſunt ipſa complementa AB BC reciproca, iuxta definit. 2 huius lib. 6.

§.IX.

Vſus, & applicatio 14 prop. ad ſolutionem eximij theorematis circa diuiſionem arithmeticam.

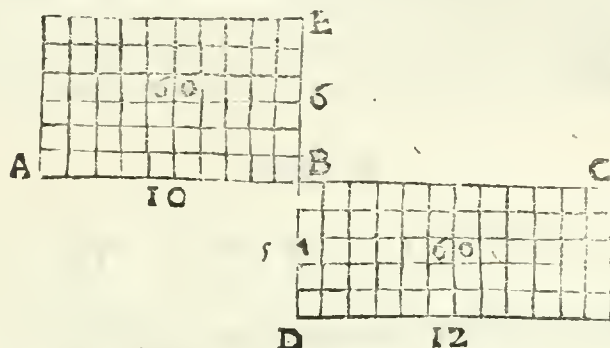
QVod pluribus docemus in Apiar. noſtro 11, Progym. 4 cap. 3, hic paucis expediemus. Theorema eſt· Eodem numero per plures diuiſores diuiſo, erunt diuiſores, & quotientes in eadem proportione, ſed ordine conuerſo. *Eſto numerus 60 diuiſus per 10, 12, 15, 20, 30, & quotientes ſint 6, 5, 4, 3, 2, vt vides in figuris arithmeticis ſequentibus;*

60(6. 60(5. 60(4. 60(3. 60(2.
10 12 15 20 30

In quibus apparet eſſe vt 10 ad 12, ita 5 ad 6; vt 12 ad 15, ita 4 ad 5, vt 15 ad 20, ita 3 ad 4; vt 20 ad 30, ita 2 ad 3.

Qua

Quanam ratio, aut demonstratio linearis, aut geometrica huius eximiæ proprietatis arithmeticæ? Nempe quam mox videbis ex hac 14 propos. Eucl. Si enim numerum 60 in rectangula distribuas (vt vides in apposita Geometrica figura) & noris, aut opereris iuxta supposita ex arithmeticis theorijs apud nos in cit. Apiar. 11, statim prodit demonstratio ex 14 hic prop. Eucl.



Nam cum idem sit numerus planus 60, siue sint omnia ea minora rectangula inter se æqualia areis, & angulis rectis, erunt eorum latera, quæ fiunt à numeris diuisoribus, & quotientibus, reciproca, iuxta defin. 1. & propos hanc 14. hoc est vt AB ad BC, idest diuisor 10 ad diuisorem 12, ita DB ad BE, idest quotiens 5 ad quotiẽtem 6, & pariter de reliquis. Vide, & applica figuris multiplicatis in Apiar. cit.

§. X.

SCHOLION V.

Demonstratio vniuersalissima propositionis 14 pro omni quantitate.

S*Cilicet pro discretà, idest etiam in arithmeticis, & pro continuà quantitate, scilicet in figuris non solum planis, sed etiam solidis. Igitur vniuersalissimè sic formetur propositio:* Quantitatum reciprocè proportionalium producta sunt æqualia. *Sint quasi duorum parallelogrammorum æquiangulorum, quasi la-*

tera, quatuor numeri reciprocè proportionales 2, 6, 4, 12, quasi in primo parallelogrammo sit antecedens 2, in secundo consequens 6, item in secundo antecedens 4, in primo consequens 12; productum ex primo antecedente 2, & secundo consequente 12, quod est 24, est æquale producto ex primo consequente 6, & secundo antecedente 4, quod pariter est 24. si ergo producentia 2, & 12, 4, & 6 sint lineæ, producũt æqualia rectangula, sin alterum sit linea, alterum superficies rectangula, producunt æqualia solida parallelepipeda. Quare habes veritatem huius propos. 14 ampliatissimam etiam ad solida, & facile in numeris demonstratam propositionem 34 libri 11 de parallelepipedis.

§. XI.

SCHOLION VI.

De ampliatione primæ proposit. huius lib. 6. ad pluriformia solida.

VIde in Epilogo nostro planimetrico, & agnosce per modum hunc vniuersalissimum demonstrandi de vtroq; genere quãtitatis in notis logisticis, demonstratas simul libri 6 proposit. 1. & libri 7. proposit. 17, & 18; & lib. 11 propos. 25, & 32 de solidis parallilepipedis eiusdem altitudinis, quæ sunt inter se vt bases & lib. 12 propos. 5, 6, 7, 11, 13, 14 de pyramidibus prismatibus, conis, cylindris. Vide § 4, sect. 1 Breuiarij nostri Stereometrici; & sect. 2 pro vsibus.

§. XII.

SCHOLION VII.

De ampliatione propos. 34, & 35 lib. 1 etiam ad pluriformia solida.

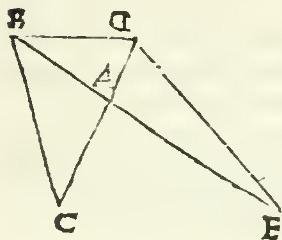
QVemadmodum ex occasione ampliatæ huius propos. 14 etiam ad solida indicauimus ampliationem prop. 1 huius; ita libet

hic

hic indicare ampliationem etiam propos. 34, & 35 lib. 1. quæ primus quidam gradus sunt ad propos. 1. hu. Vide igitur initio Epilogi planimetrici, & in Breuiarij nostri stereometrici sec. 1. § 2. Nam ex vniuersalissima demonstratione per notas logisticas de productis æqualibus ex ductu eiusdem quantitatis in æquales quantitates, patent propositiones stereometricæ libri 11, propos. 29, 30, 31; libri 12 propositiones 7, 11, & earum corollaria de parallelepipedis, de prismateis, de conis, & cilindris æqualibus sub eadem altitudine, & super eàdem vel æqualibus basibus.

Propositio XV. Theor. X.

Aequalium triangulorum, & vnum angulum vni æqualem habentium, reciproca sunt latera, quæ circa æquales angulos. Et triangula, quæ vnum angulum vni æqualem habent, & quorum latera, quæ circa æquales angulos, reciprocantur, sunt æqualia.



Sint triangula ABC, ADE æqualia, habeantq; vnum angulum BAC vni DAE æqualem. Dico latera, quæ circa æquales sunt angulos, reciproca esse. Hoc est, esse vt CA ad AD, ita EA ad AB. Ponantur enim CA, AD in directum; [a] erunt ergo & EA, AB in directum, & ducatur BD. Cum igitur triangula ABC, ADE æqualia sint, sitq; aliud ABD, [b] erit vt CAB ad BAD, ita ADE ad idem BAD: [c] sed vt CAB ad BAD, ita est CA ad AD, & vt EAD ad BAD, ita est EA ad AE: [d] Ergo vt CA ad AD, ita est EA ad AB. Triangulorum ergo ABC, ADE latera, quæ circa æquales angulos, reciprocantur. Sed reciproca sint iam latera triangulorum ABC, ADE, & sit vt

a *Colligitur ex* 13. 14. & 15. 1.
b *prop.* 7. 5.
c *prop.* 1. 6.
d *prop.* 11. 5.

CA

CA ad AD, ita EA ad AB. Dico triangula ABC, ADE esse æqualia. Iuncta rursus BD, erit vt CA ad AD, ita EA ad AB; e sed vt CA ad AD, ita est triangulũ ABC ad triãgulum BAD; vt verò EA ad AB. ita triangulum EAD ad triangulum BAD. Vt ergo ABC ad BAD, ita est EAD ad idem BAD: vtrumque ergo ABC, EAD ad BAD eandem habet proportionem: f æquale ergo est triangulum ABC triangulo EAD. Aequalium ergo triãgulorum, &c. Quod oportuit demonstrare.

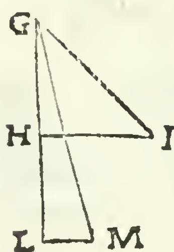
e prop. 1. 6.

f prop. 9. 5.

§. I.

PROBLEMA.

Dato triangulo æquale triangulum ex vsu prop. 15 describere.



Dati trianguli vnum latus GH producatur, vt lubet, ad L. Fiat vt GL ad GH, sic HI ad parallelã LM, & iungatur GM. Triãgula GHI, GLM sunt æqualia. Habent enim circa æquales angulos H, L (externum, & internum sub parallelis) latera reciprocè proportionalia, iuxta 15 huius.

Erunt (hæc praxis, & quæ in § 1 ad prop. 14 antec.) nobis vsui pro nouo modo describẽdæ hyperboles etiam intra asymptotos, ad 29 huius.

§. II.

COROLLARIVM.

Linea in infinitum est diuisibilis, hoc est non constat ex indiuisibilibus.

Quem-



QVemadmodum enim, ex postulato secundo, in fig. antec. § 1, & in §, ad propos. 14 hu. AD, GL in infinitum protendi possunt, sic AE, HI, in infinitũ imminui possunt, alioquin tribus, DA indefinite, CA, AE finitis, vel tribus LG in efinite, GH, HI finitis quarta proportionalis in latere AE, vel in latere HI nõ posset inueniri, quod est cõtra 12 hu.

Erit hoc corollarium etiam vsui nobis ad nouã demonstrationẽ de hyperbole asymptoto ad rectam, ad propos. 29. huius.

SCHOLION.

De conorum isoperimetris superficiebus sine basibus.

PAtet ex hac 15 (vt in § 2 ad anteced. 14 propos. hu.) à lateribus reciprocis triangulorum æqualium inter asympt. fieri æquales etiam conorum superficies, sine basibus.

§. III.

THEOREMA.

Conorum isoscelium ex gyratione triangulorum æqualium inter hyperbolen, & asymptoton soliditates inter se sũt vt semidiametri basiũ, & reciprocè vt altitudines, è nouo vsu centri grauitatis, & cum vsu huius 15 prop.

VT 14 propos. antec. sic & hanc 15 eleuemus facillimè ad stereometrica. Inter asymptoton CD, & hyperbolen GB triangula CGE, CKH finge gyrari circà asymptoton CD;

per-

perfecto orbe, conficient geminos conos LCG, NCK, quos affirmo habere inter se proportionem quam habent basium semidiametri EG, KH, itemque quam habent altitudines HC, CE reciprocè, idest vt HC ad CE, sic soliditas coni LCG ad soliditatem coni NCK.

Suppono primo centra grauitatis triangulorum CEG, CHK esse in α, & in Z punctis vbi (iuxtà à nobis ad prop. 4. hu. § 41. demõstrata) rectæ ab angulis ad apposita bifariata latera se mutuo secant.

Suppono secundo ex Commandino ad proposit. 14. Æquiponder. Archimed. in triangulo rectam basi parallelam ductam per centrum grauitatis intercipere tertiam partem reliquorum laterum, velut in triangulis ECG, HCK rectæ parallelæ basibus CE, CH, per α, & ζ ductæ intercipiunt tertiam partem laterum EG, HK.

Quoniam igitur triangula CEG, CHK rotata circa asymptoton CD. sunt inter asymptotos æqualium rectangulorum EF, HI æqualia dimidia; peripheriæ verò à cẽtris α, ζ factæ in ea rotatione, sunt inæquales, propter inæquales perpendiculares distantias ab α ad κ, & à ζ ad δ; soliditas verò conorum rectorum CLG, CNK conflatur ex ductu rotatæ quãtitatis triangularis in peripheriam rotationis à cẽtro grauitatis, iuxtà auream vniuersalem demõstratiuam (& effectu congruentẽ cum veris aliorum, præsertim antiquorũ Antistitum, demonstrationibus, vt in anteced. vidisti, & inferius videbis) regulam in vsu geometrico centri grauitatis: ergo differẽtiã proportionis inter conos LCG, NCK accipienda est ex differẽtijs peripheriarum à centris grauitatis. Quoniam igitur vt peripheriæ ex rotationibus ipsorum α, & ζ, sic & semidiametri κα, δζ inter se habent; & per secundum suppositum, κα est tertia pars semidiametri EG, & δζ est tertia pars semidiametri HK: ergo proportio trium κα

ad tres & erit proportio semidiametri EG ad semidiametrum HK: ergo proportio coni LCG ad conum NCK est semidiametrorum. &c. Quod erat primo demonstrandum.

Secundo demonstro esse vt altitudines CE, CH, sic reciprocè conum ad conum. Quoniam enim æqualia sunt triangula CEG, CHK inter asymptoton CD, & hyperbolen AB, & per hanc 15 propos. habent circa æquales rectos angulos ad E, & H latera reciprocè proportionalia, est vt altitudo CE ad altitudinem CH, sic reciprocè semidiameter HK ad semidiametrum EG; sed vt semidiametri, sic soliditates, per priorem huius theorematis partem demonstratam; ergo vt altitudines, sic & soliditates reciprocè in conis isoscelibus ex triãgulis æqualibus inter asymptotos.

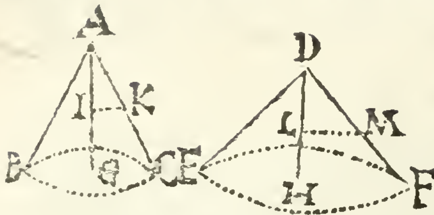
§. IV.

LEMMA

Demonstratũ ex nouo vsu centri grauitatis. Conorum rectorum, ac inæqualium altitudinum, quorum latera sunt æqualia, superficies sine basibus, sunt inter se, vt basium semidiametri.

PRæmitto Lemma hoc vsui practico in re vasaria pro liquoribus, quem mox apponam. Demonstrationis hìc indicandæ similitudo cum facta demonstratione in anteced. theoremate facit vt hìc ponam hoc theorema. Quemadmodum enim coni inter asymptotos habent æqualia triangula soliditates conicas conflantia, rotationes verò centri grauitatis inæquales; sic & superficies conicæ hìc à nobis propositæ habeat latera triangulorum rectis angulis opposita æqualia designantia superficies; at rotationes centri grauitatis habent inæquales.

Itaq; sint in seq fig. sub isoscelibus superficies conicæ sine basibus (inæqualiũ altitudinum, siue inæqualium angulorum ad vertices A, D, ac proinde inæqualium etiam basium BC, EF, per 24 prop. li. 1) factæ ab æqualium laterum AB, AC, DE, DF rotationibus circà axes, siue



circa latera AC, DH triangulorum AGC, DHF; & sint semidiametri IK, LM peripheriarum signatarum à rotationibus centrorum grauitatis in dimidys K, M laterum AC, DF. Quoniam superficies eæ conicæ sunt æquales, productæ ex ductu peripheriarum à punctis K, M signatarum in quantitatem laterum AC, DF (iuxtà regulam geometricam centri grauitatis, quam etiam videbis in Schol. seq. congruentem cum aliorum demonstrationibus) & latera AC, DF ponuntur æqualia, ergo differentia, seu proportio inæqualitatis inter conicas eas superficies erit petenda ex inæqualitate semidiametrorum IK, LM sub inæqualibus peripherys à punctis K, M designatis. Vt ergo peripheria à K ad peripheriam ab M designatam, sic semidiameter IK ad semidiametrum LM. Vt verò IK ad LM, sic semidiameter inter GC ad semidiametrum inter HF in æquiangulis triangulis AIK, AGC, & æquiangulis DLM, DHF. Ergo superficies conicæ BAC, EDF habent inter se proportionem semidiametrorum in basibus. Et quemadmodum LM maior est, quàm IK, sic semidiameter inter HF, maior, quàm semidiameter inter GC, indicat maiorem capacitatem superficiei sub EDF, quàm quæ sub BAC, licet maioris minor sit altitudo DH, quam altitudo AG minoris superficiei conicæ; sine basibus acceptâ vtràq; superficie.

SCHOLION.

Congruit præcedens demonstratio ex centro grauitatis cum ijs, quæ habet Villalpandus lib. 6. cap 6. prop. 16, vbi demonstrat superficies conicas sine basibus sub æqualibus lateribus esse inter se, vt basium diametri; ac doctè ille quidem ex Archimede, & posterioribus libris Euclidis; at nos faciliùs pro Tyronibus ex vsu geometrico centri grauitatis, sine necessitate aliorum Authorum. &c.

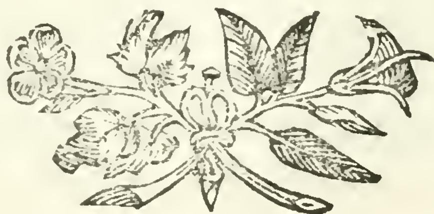


§. V.

VSVS, & COROLLARIVM ex --

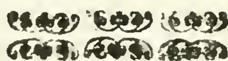
--- Præcedenti Lemmate, ac theoremate in re vasaria pro liquoribus. &c.

INuerte conicas superficies ABC, DEF, ac finge cyathos æqualium laterum, inæqualium altitudinum. Ne te fallat maior altitudo GA, quàm DH, ac putes plus vini hausturum te ex ABC, quàm ex DEF, habes vndè à fallacia te eximas. Itaque Physica si geometricà demonstratione abutens te trahat ad haustum ex EDF, Temperantia per abstractionem geometricam reuocet te potius ad haustum ex ABC.



TOMI SECVNDI
ÆRARII
Philoſophiæ Mathematicæ
PARS SECVNDA

Complectens propoſitiones 16, &c. ad finem libri 6.



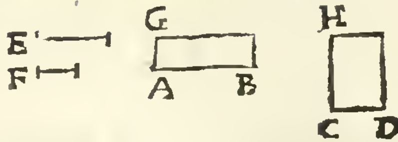
Propoſitio XVI. Theor. XI.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, erit quod extremis continetur rectangulum æquale illi, quod medijs continetur rectangulo. Et ſi rectangulum extremis contentum æquale fuerit medijs contento rectangulo, quatuor illæ lineæ proportionales erũt.



Int quatuor rectæ AB, CD, E, F proportionales, vt AB ad CD, ita E ad F. Dico rectangulum AB, & F contentum æquale eſſe conteto CD, & E. a Ducantur à punctis A, C ad rectas AB, CD ad angulos rectos AG, CH; ſitq; ipſi F æqualis AG, & ipſi E ipſa CH, compleanturque parallelogramma BG, DH.

a prop. 11.1.



DH. Et quia est vt AB ad CD, ita E ad F, & est E ipsi CH, & F ipsi AG æqualis, erit vt AB ad CD, ita CH ad AG: [b] parallelogrammorum ergo BG, DH latera, quæ circa æquales angulos sunt, reciprocantur: quorum autem parallelogrammorum æquiangulorum latera reciprocantur, illa æqualia sunt: parallelogramma ergo BG, DH æqualia sunt. Et est BG quod AB, & F continetur (est enim AG ipsi F æqualis) DH quod CD, & E continetur (est enim CH ipsi E æqualis.) Quod ergo AB, & F continetur æquale est ei, quod CD & E continetur rectangulo. Sit iam quod AB, & F continetur æquale ei quod CD, & E continetur. Dico quatuor rectas esse proportionales. Vt AB ad CD, ita E ad F. iisdem constructis, cùm quod AB, F continetur, æquale sit ei quod CD, E continetur, sitque BG id, quod AB, & F continetur (est enim AG ipsi F æqualis) DH vero quod CD, & E cōtinetur (est enim & CH ipsi E æqualis) erit BG ipsi DH æquale: & sunt æquiangula. [d] Æqualium autem, & æquiangulorum parallelogrammorũ latera, quæ circa æquales angulos, reciproca sunt. Erit ergo vt AB ad CD, ita E ad F. Si ergo quatuor rectæ lineæ, &c. Quod oportuit demonstrare.

b propos. 14.6.

c propos. 14.6.

d propos. 14.6.

SCHOLION.

HAsce 16, & 17 propos. aliter demonstratas ex vsu geometrico centri grauitatis vide in Epilogo planimetrico sub finẽ 3 partis hu. 2. To.

§. I.

COROLLARIVM I.

Propositio 16, & eius conuersa etiam ad triangula rectangula traductæ.

NAm quod demonstratum est de totis, idest rectangulis quadrilateris valet etiam de dimidijs, idest de triangulis rectãgulis. Applica, & fruere hac appendicula geometrica etiam ad praxes non inutili, si mecum, ac quò ego prospicias.

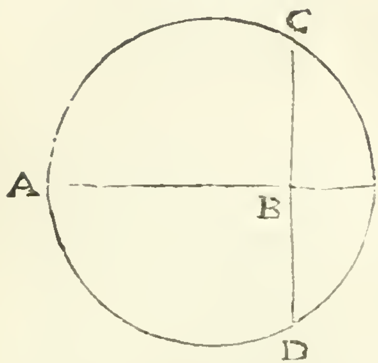
§. II.

PARADOXVM

In Praxi, (firmatâ partim ex hac 16 prop. l. 6.) Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem inueniendi e lib. 3 Eucl.

AD hasce 16, & 17 spectant ea, quæ supponunt duas prop. li 3, in 3 par. hu. Tom. & expresso nomine praxeon inscripsimus, de more aliorum Authorum, apud quos dum praxes exercẽtur, nihil refert suppont aliqua in posterioribus deinde complete demonstranda. Paradoxum verò etiam quod hîc proponimus est quatenus id habet inopinati, ac noui, quod docet modum inueniendæ quartæ proportionalis (vt & ad seq. 17, tertiam, & mediam videbis) e li. 3, in quo nullum eius inuentionis vestigium videtur inesse.

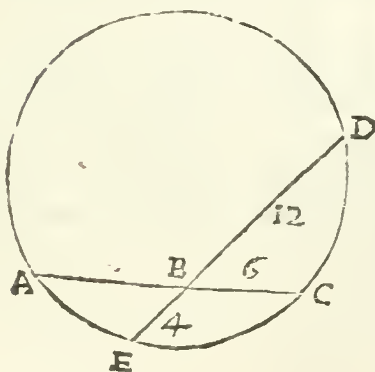
Finge enim tres datas esse rectas, quibus inuenienda sit quarta proportionalis, ad quam ita se habeat tertia, vt prima ad secundam, iungantur



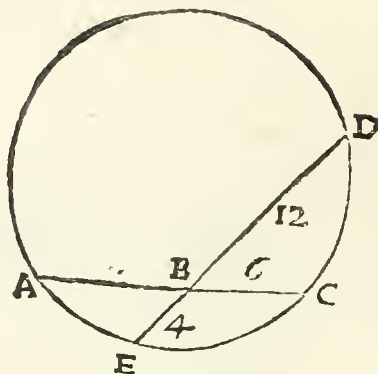
gantur in vnam CD, secunda CB, & tertia BD, & ad iuncturam B iungatur ad angulos libitos (licet in exemplo figuræ hic appositæ ad B anguli recti sint, & AB per centrum transeat, & CB, BD sint æquales; quæ conditiones non sunt necessariæ) prima AB. Per C, A, D ducto circulo, protracta BE erit 4. eritq; (nempè latera reciprocorum rectangulorum) vt AB ad BC, sic BD ad BE. Sunt enim, per 35 tertij, rectangula æqualia, alterum sub extremis AB, BE, alterum sub medijs CB, BD; ergo per hanc 16 sunt quatuor AB, BC, BD, BE proportionales, & e lib. 3 inuenta est BE quarta proportionalis, iuxta à nobis propositum, ac præstandum.

§. III.

Vsus 16 propositionis, & praxis inuentionis quartę lineę prop. in circulo pro praxibus vniuersæ Geometriæ practicæ.



EXemplum imaginariũ esto pro Tyronibus in Altimetria. Circa turrim aliquam notæ sint (per aliquem è modis a nobis positis vel in Apiario nostro 2, vel in antecedentibus ad propositiones huius li. 6. Eucl. 2, 4, 8, &c) tres quantitates lineares, prima, distãtia mensoris a baculo perpendiculariter ante turrim erecto passuum puta 4; secunda, altitudo



titudo baculi pass. 8, cuius, & turris pariter vertices vniat imaginaria recta ad pedes mensoris producta; tertia, sit distantia mensoris ad turrim, pass. 6. Iungantur in vnam rectam AC (vt vides in figurà) secunda, & tertia, idest altitudo baculi 8, & distantia mensoris à turri, scilicet 6, quæ sunt duæ rectæ AB, BC, mox ad iuncturam B adiũgatur in lubito angulo prima EB 4 distãtia mensoris à baculo. Tum per A, E, C ducatur circulus. Protracta EB in D, & dimẽsa BD mensuris ipsarum AC, EB, prodẽt mensuram quartam quæsitam, nempe turris altitudinẽ notatam in mensuris antecedentium triũ, scilicet 12 passuum.

§ IV.

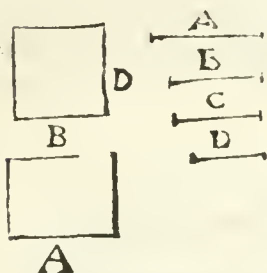
COROLLARIVM II.

In quo Praxis è 16 prop. ac vsus geometricus aureæ arithmeticæ regulæ in circulo.

IN antecedenti vsu geometrico habes vsum, & praxim in circulo paradoxicam pro regula proportionum arithmeticà, quã aureã vocant. Expressiora videbis inferius ad 17. hu. § 7 Hic interim indico ex antecedenti § 3 quasi corollarium; pro cuius intelligentià habes numeros in lineis anteced. fig. Atq; hic vsus reponi potest inter cætera circuli miracula.

Propositio XVII. Theor. XII.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, erit quod extremis continetur rectangulum, æquale quadrato, quod fit à media. Et si quod extremis continetur rectangulum æquale fuerit quadrato, quod à media fit, erunt tres lineæ illæ proportionales.



Sint tres rectæ A, B, C proportionales, vt A ad B, ita B ad C. Dico quod A, C continetur æquale esse ei quod ex B. Ponatur D æqualis ipsi B. Et cum sit vt A ad B, ita B ad C, sit vero ipsi B æqualis D, erit vt A ad B, ita D ad C. a Cũ autem quatuor rectę proportionales sũt, est quod extremis continetur rectangulum, æquale ei quod medijs continetur rectangulo. Quod ergo A, & C continetur æquale est ei quod B, D continetur; at quod B, D continetur æquale est ei, quod ex B, est enim D ipsi B æqualis. Ergo quod A, C continetur æquale est ei, quod ex B quadrato. Sit iam quod A, C continetur æquale ei, quod ex B. Dico esse, vt A ad B, ita B ad C. ijsdem enim constructis, cùm quod A, C continetur æquale sit ei, quod ex B, & quod ex B æquale ei, quod B, D continetur, quòd B, D æquales sint; erit quod A, C continetur æquale ei, quod B, D continetur. b quandó autem quod extremis continetur æquale est ei, quod continetur medijs, sunt quatuor illæ lineæ proportionales. Est igitur vt A ad B, ita D ad C: æquale autem est D ipsi B: ergo vt A ad B, ita est B ad C. Si ergo tres lineæ, &c. Quod oportuit demonstrare.

a propos. 16.6.

b propos. 16 6.

§. I.

COROLLARIVM I.

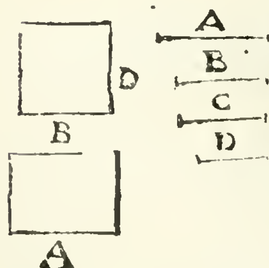
Propositio 17, & eius conuersa etiam ad triangula rectangula traductæ.

Nam quod demonstratum est de totis, idest rectangulis quadrilateris valet etiam de dimidijs, idest de triangulis rectangulis. Applica, & fruere hac appendicula geometrica etiam ad praxes non inutili, si mecum, & quo ego prospicias.

§. II.

COROLLARIVM II ex Clauio,

Et ampliatio proposit. 16, & 17 apud Eucl.

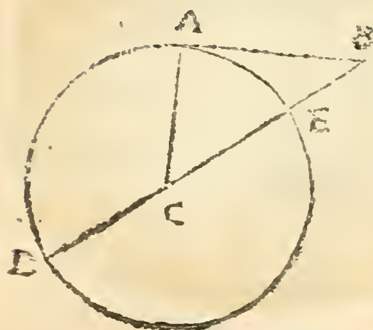


Ex posteriori huius theorematis parte efficitur quamlibet rectam lineam esse mediam proportionalem inter quasuis alias duas rectas, quę comprehendũt rectangulum quadrato illius æquale. Ex eo enim quod rectæ A, C comprehendunt rectangulum æquale quadrato rectæ B, ostensum fuit esse vt A ad B, ita B ad C. Quare B media est proportionalis inter AB, & BC. *Sic Clauius à nobis applicatus fig. hîc apud Euclidem. Idem Clauius docet propositionem 16, & hanc 17 valere etiam de parallelogrammis non rectangulis, modò sint æquiangula. Pro quibus eadem est demonstratio quæ & de rectangulis.*

§. III.

PRAXIS–

–Duabus datis mediam proportionalem inueniendi, demonstrata partim ex hac prop. 17 apud Eucl.

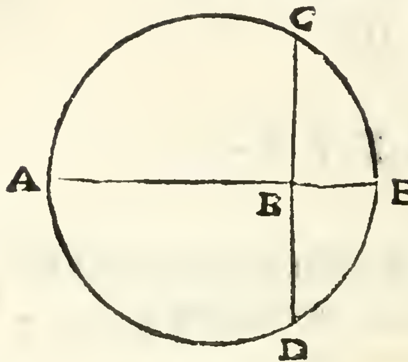


Datâ maiori DB, secetur in ea minor BE, & bifariatâ DE in C, semidiametro alterutra CD describatur circulus. Tum, per ea, quæ docuimus ad 32 primi, à B ducatur tangens BA, quæ erit media proportionalis inter datas DB, EB; est enim rectangulum DBE, BE æquale quadrato ex AB, per 36 Tertij, ergo ex hac 17 AB est media, &c.

§ IV.

ALTERA praxis inueniendi --

-- Duabus mediam &c. cum demonstratione ex hac 17.



IVnge datas AB, BE in vnam, & describe circulum ex bifariata, & per iuncturam B ad rectos, duc CD, eritque, per 35 Tertij, & hanc 17, alterutra CB, BD media proportionalis inter AB, BE; propter quadratum ex CBD æquale rectãgulo sub ABE &c.

SCHOLION.

PRo vtraq; praxi antecedenti, vide etiam Apiar.3.progym 10, propos.3, & 5. & in 3 parte hu.2.To. ad prop.35, & 36.li.3.

§.V.

PRAXIS tertia

(Duabus tertiam proportionalem.&c.) demonstrata partim ex hac 17.prop.Eucl.

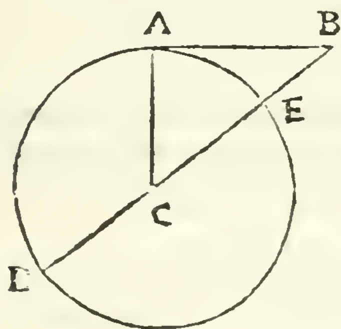
IN cit.Ap.3.&c.prop.1: Maior AB datarum iungatur ad rectos in B eum duplicata minore CB, BD. Per extrema A, C, D describatur circulus, & ipsa protracta ex B in E ad circumferentiam, erit tertia proportionalis, per hanc 17, & cit.35.Tertij.



§ VI.

PRAXIS IV, qua docet --

-- Conuersam propositionis 13 huius li. 6. apud Euclidem, exhibere; hoc est: datæ rectæ lineæ duas extremas proportionales adinuenire, ac describere.



AB extremo datæ AB excitetur (per 12 pri. & ad eam scholia) ad angulos rectos lubitæ longitudinis ipsa AC. Centro C, interuallo CA describatur circulus DAE. Ab extremo B per centrum C ducatur recta B-D. Erunt BE, BD duę extremæ ita, vt quemadmodum EB ad B-A, ita BA ad BD

Nam ex 36 tertij, tangentis AB quadratum est æquale rectangulo sub DB, BE, ergo, per hanc 17 sexti, sunt EB, BA, BD proportionales. *ex Apiar.3, Trig. 10, propos.4.*

SCHOLION.

Ad facilitatem, & libertatem exercendi proposit. anteced. problematis.

NOn est necesse ipsam BD transire per centrum; sat est ipsam posse à ducto circulo secari, vt patet ex casibus 30 prop. lib. 3. Eucl. *Vide ad prop. 30 huius aliter exhibitam hanc conuersam.*

§ 7.

§. VII.

Vſus arithmeticus propoſitionum 16,& 17.lib. huius 6.apud Eucl. in regula aurea,& eius probatione.

Regulæ, quam Arithmetici vocant trium, & examen, & probatio nituntur vtralibet, aut vtraque 16, & 17 propoſitione lib. huius 6 Eucl. Exempla luculenta habes in noſtro Apiar. 11 Arithmetico, Progym. 4. cap. 4. Illuc reuiſe. Ne tamen hic videamur Tyronibus defeciſſe in eo quod propoſuimus, breuiter indicabimus aliqua.

I. Datis quatuor quantitatibus proportionalibus, quarum vna ignota ſit in numeris, ea reperietur ope huius vtriuſq; propoſitionis in exemplo ſic.

A	B	C	D
4	12	20	60

Si nota ſint mediæ B, C, & nota alterutra extremarum A, vel D, altera extrema ignota reperitur poſt multiplicationem inter ſe mediarum B, & C, & partitionem producti per notam alteram extremarum. Duc 12 in 20, productum eſt 240, quod diuiſum vel per 4 dat 60, vel per 60 dat 4. Qui numeri ſunt alteruter quartus proportionalis. Vt enim 4 ad 12, ſic 20 ad 60. &c. Eodem modo ſi nota ſint extrema A, D, & alterutrum mediorum B, C ignotum ſit, multiplicentur inter ſe A, D, fiat producti diuiſio per B, vel C, & dabitur quarta quantitas nota in numeris ex ignota.

Ratio, demonſtratio, & theoria ſunt ex hic apud Eucl. quia cùm rectangulo extremarum A, D ſit æquale rectangulum ex medijs B, C (ſunt enim ex ſuppoſitione quatuor proportionales quantitates) ergo ſi altera extremarum ignoretur in numeris, erit illa, quæ deficit primæ extremarum ad complendum rectangulum, ſiue productum à duabus medijs. Vt autem ſciatur id, quo deficit prima extremarum ad complendum rectangulum, ſiue productum ex medijs, productum ex medijs diuiditur, ſiue ſubtrahitur quoties poteſt (eſt enim, vt docuimus in noſtris Apiarijs, Diuiſio quædam proportionata ſubtractio) ex producto mediarum quantitatum altera extrema quantitas nota,

& residuum, siue Quotiens diuisionis, est altera extrema, quæ erat ignota. Ex rectangulo, siue producto ex B in C 12 in 20, quod est 240 subtrahitur (quod est diuidere, &c.) altera extrema A 4 quoties potest, siue exploratur quoties sit 4 in 240, & in quotiente datur 60; toties enim est 4 in 240, siue toties subtrahi potest 4 ex 240, estque productum ex 4 in 60 sub extremis A, D rectangulum 240 æquale rectangulo, siue producto ex medijs B, C, 12, 20; ac propterea trium A, B, C, 4, 12, 20 quarta proportionalis quantitas in numeris est D 60. Quæ dicta sunt in exemplo quæsitæ alterius extremarum, intellige, atq; experire, mi Tyro, tute in exemplo cum quæritur altera ignota mediarum.

2. Ex prædictis patet etiam cur rectæ operationis factæ per regulam auream, siue proportionum, fiat examen multiplicando extrema inter se, itemque media inter se; ac si sint producta inter se æqualia, indicent ritè, ac rectè factam esse inuentionem quartæ proportionalis quantitatis. Nam apud Eucl. hìc, cum rectangula mediarum, & extremarum sunt æqualia, lineæ, siue numeri, sunt quatuor proportionales. Itaq; habes ex altera parte propositionum 16, & 17 regulam proportionum, ex altera & conuersa examen eiusdem regulæ proportionum.

Vide proposit. 19. lib. 7 Euclidis, quæ est in numeris, cum sua conuersa, eadem quæ hìc cum sua conuersa in lineis.

3 Quæ dicta sunt ex 16 propos. circa quatuor quantitates eadem intellige hìc etiam ad 17 proposit. circa tres, quando secunda est media proportionalis inter primam, & tertiam; habet enim tunc media quantitas rationem duarum, nempe secundæ, & tertiæ, dum respectu eodem ad primam, & quartam refertur, & quasi geminatur. In eo casu licebit inuenire tantùm alteram extremarum ignotam. Multiplicatâ enim in se ipsam mediâ, & factâ partitione per alteram extremarum, dabitur tertia; propter rationes ex 17 propos. huius, quæ similes sunt rationum a nobis allatarum ex 16 propos. Vide propos. 20 libri 7. Elem. vbi arithmeticam demonstrationem habes.

Sint 4, & 6; quænam erit tertia proportionalis quantitas in numeris ita, vt 6 sit media, & quemadmodũ se habet 4 ad ipsam quantitatem 6, ita & 6 ad tertiam? fiat quadratum è 6, siue productum 36. Huic erit per hanc 17 æquale rectangulum ex prima 4, & ex tertia ignota. Partire rectangulum 36 per 6, & Quotiens erit 9 tertia quæsita quantitas proportionalis, vt 4 ad 6, ita 6 ad 9. estq; idem productum, seu quadratum ex media idest 36 ex 6, quod & ex extremis 4, & 9 inter se ductis, &c.

§8.

§. VIII.

Vsus 17 proposit apud Eucl. pro inuenienda in numeris, siue per numeros media proportionali. &c.

SI sint duæ quantitates numeratæ, siue concisæ in partes, seu numeros, velut 4, & 9, inter quas inuenienda sit media; quoniam ex hac 17 prop. productũ ex prima, & tertia est æquale quadrato mediæ, ductis inter se 4, & 9 fit productum 36, ergo radix quadrata, siue numerus, qui in se ductus cõficit 36, erit latus eius quadrati, siue numerus medius proportionalis inter 4, & 9, nempe numerus 6.

Vide in Apiar. nostro 11, progym. 4, cap. 5, & sequentibus, egregia circa radicis quadratæ inuentiones, atque etiam cubicæ è miris numerorum progressionibus.

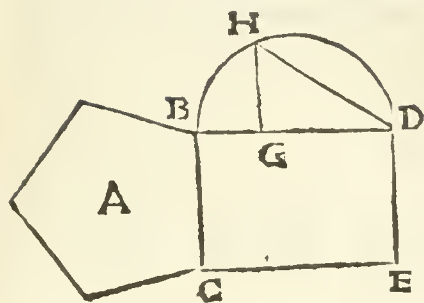
Ex his a nobis dictis constat modus, quo nos vsi sumus in inuentione mediæ lineæ proportionalis per circinum proportionum in Ap. nostro 12, in applicatione 34 ad lib. 6 Eucl num. 4. Vide ibi notata, vbi ostendimus non expedire in eo circino ea inuenire, quæ supponunt operationes alias arithmeticas, & prolixiores. &c.

§. IX.

PROBLEMA I.

Datum rectilineum quadrare ex hac 17. prop. apud Euclid.

SIt rectilineum A quadrandum, siue vertendum in illi æquale, quadratum. Per 45 propos lib 1. super vno latere BC dati A constituatur ad angulum rectum parallelogrammum, hoc est rectan-



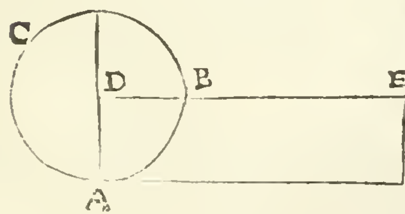
rectangulũ CD dato A æquale, & inter CB, BD inueniatur media proportionalis. Super qua excitatum quadratum erit æquale dato A. Nam, per hanc 17, quadratum super media trium proportionaliũ est æquale rectangulo sub prima CB, & tertia BD. Inuentio verò mediæ indicatur facilis in figura, descripto semicirculo BHD super latere BD, & secta DG æquali ipsi DE, & excitata perpendiculari GH, & iunctà rectà HD, quæ, per Corol. 8 propos. huius li. 6. est media inter BD, DG, idest DE. erit ergo HD latus quadrati æqualis ipsi A.

Dato rectangulo æquale aliud quodlibet rectilineum, figuræ etiam non quadratæ, constituere, pertinet ad 20, siue ad 25 propos. huius ibi vide inferius.

§. X.

PROBLEMA II,

Siue praxis quadraturæ Circuli, ex 17 hac prop.



Datus circulus ABC vertatur in æquale rectangulum AE, per ea, quæ docuimus ad 45 pri. § 5. mox inuenta media proportionalis inter AD, DE erit latus quadrati æqualis rectangulo AE, cui, cùm sit æqualis circulus ABC, erit idem quadratum æquale ipsi etiam circulo.

Dato circulo æquale rectilineum cuiuscunque figuræ, etiam non quadratæ, constituere, pertinet ad 20, siue ad 25 proposit. huius, ibi vide.

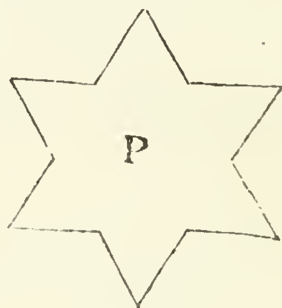
Quemadmodum ad easdem 20, vel 25 pertinet dato rectilineo cuiuscumq; figuræ circulum æqualem. &c. Videbis apud nos ad eas prop.

§. XI.

PROBLEMA III.

Curuilineum radiatum quadrare.





1 *SVpporo curuilineum factum esse ex figura rectilinea aliqua regulari iuxta artem, quam habes a nobis in Proteo Geometrico Apiario 1, prælib. 3; præsertim radios (velut in figura hic A radium BKDCEFM) factos esse ex oppositis æqualibus segmentis æqualium circulorum circa latera isoscelium triangulorum, vt vides circa occulta latera BC, CM isoscelis BCM, iuxta praxes in cit. Apiario.*

2 *Suppono Isoscelia ea, vt BCM, esse æqualia radijs, siue curuilineis cuspidibus, velut ipsi BKDCEFM radio facto circa isosceles BCM. Quod secundum hic suppositum demonstratum habes apud nos non solum in citat. Apiar. sed etiam in tom. 1. huius Aerarij, § 5 ad axioma 7. Ibi reuise figuram, & breuissimam demonstrationem ex eo axiomate 7.*

Itaq; iuxta hic supposita, figuræ radiosæ curuilineæ A finge radios esse sex, & singulos verte in æqualia isoscelia habentia, pro basibus

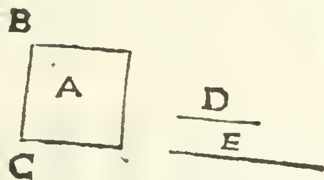
latera

latera regularis hexagoni, vt vides P. Vide cit. Ap. Curuilineo igitur A radiato transformato in æquale rectilineum P, & rectilineo P transformato in æquale rectangulum, per 45 pri. li 6 & super inuenta media proportionali inter latera rectanguli excitato quadrato, vt in antecedentibus duobus problematibus, erit curuilineum radiatum præcisè geometricè quadratum, sine vlla supposita propositione vel Archimedis (vt fit in quadratura circuli) vel alterius Authoris. Cùm tamen radiatum curuilineum A videatur magis distare à quadratura, quàm circulus, propter figuræ heterocleitatem. Vide cit. Apiarium.

§. XII.

PROBLEMA IV.

Dato quadrato æquale rectangulũ constituere.



Hoc problema ex 17 hac propositione non erit facile ad soluendum nisi illi, cui notum sit problema nostrum, quod est in antec. conuersum 13 propos. huius lib. 6. & aliter etiam ad 30. &c. scilicet: datæ rectæ duas extremas proportionales adinuenire. *Quo supposito ad eam 12 propos. a nobis peracto, & demonstrato, statim propositum hic problema soluitur.*

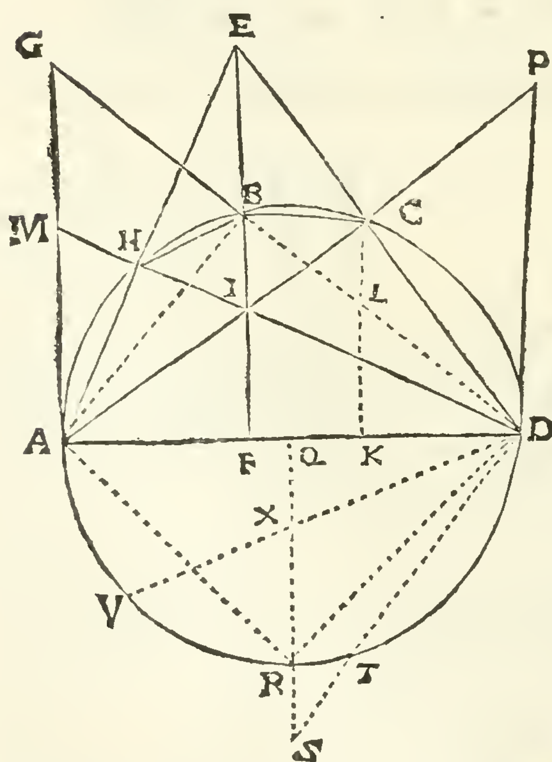
Nam dati quadrati A vni laterum BC inuentis duabus extremis proportionalibus in eadem proportione, vt D ad BC, ita BC ad E, conflatum ex duabus D, E rectãgulum erit æquale quadrato, per hanc 17.



§XIII.

THEOREMA I.

In ſemicirculo rectà perpendiculari erectà ex aliquo puncto diametri, & protractà etiam extra peripheriam, omnia rectangula comprehenſa ſub ſegmentis interceptis inter eundem terminum diametri, inter perpendicularem, & inter peripheriam, ſunt inter ſe ſe æqualia.



Haec propoſitio pluribus in Geometria ſpeculatiua inſeruire poteſt, vt in aliquo apud nos exemplo videre poteris.

Igitur à quocunque puncto F diametri AD erecta ſit perpendicularis FB protracta etiam extra ſemicirculum AHBCD vt lubet in E, & à termino D ducantur quot-

quotlibet rectæ DH, DC, quarum DH intercepta sit inter D, & inter peripheriam in H, & secans perpendicularem EF in I; DC vero intercepta sit inter D, & inter perpendicularem in E extra semicirculum, & secans peripheriam in C, quemadmodum & ipsa diameter est intercepta inter D, & A, & secans in F perpendicularem. Dico rectangula sub DH, DI, item sub DE, DC, quemadmodum & sub DA, DF, esse inter se æqualia. Pariq; ratione rectangula sub AD, AF, item sub AC, AI, item sub AE, AH affirmo esse inter se æqualia.

Iungantur enim AB, BD; patet è secundà parte corollarij post 8 propos. huius lib. 6, latus BD esse medium proportionale inter DA, DF, pariterq; latus AB esse medium proportionale inter AD, AF. Atqui BD est etiam medium proportionale inter DI, DH, itemque inter DE, DC; pariterq; AB est medium proportionale inter AC, AI, & inter AE, AH, per theor. 1 in § 37 ad 4 huius; ergo, per hanc 17 prop. Eucl. erunt rectangula DA, DF, & DE, DC, & DH, DI æqualia vni, eidemq; quadrato ex DB; ergo æqualia inter se. Pariter rectangula AD, AF; AC, AE; AI, AH sunt æqualia quadrato ex AB, & æqualia inter se.

Si perpendicularis etiam erecta sit ab alterutro diametri extremo A, sitq; ipsa AG, rectangula sub DM, DH, & sub DB, DG erunt inter se æqualia, quia sunt æqualia eidem quadrato ex AD, quod est latus adiacens, & eductũ ab eodem termino D in triangulis rectangulis DAG DAM, & medium proportionale inter DH, DM, & inter DG, DB.

§ XIV.

THEOREMA II.

Si ad diametrũ circuli in extremis punctis duæ perpendiculares excitentur, & ab eisdem extremis per vnum, idemq; punctum circumferentiæ due alię rectę circulum secantes ducantur occurrẽtes duabus perpẽdicularibus, erit rectangulum comprehensum sub vtralibet secantium, & eius segmento interiore, quadrato diametri æquale.

Hoc

Hoc theorema, quod proponit Cardanus lib. 16 de subtilitate, & Iohannes Baptista Benedictus demonstrat, sine alia demonstratione patet ex antecedentibus apud nos ad hanc 17 Eucl. Nam si, quemadmodum ab extremo A diametri AD erecta est perpendicularis AG, erigatur altera ab extremo D, puta DP, & quemadmodum ducta est ex D recta secans circumferentiam in B, & occurrens perpendiculari AG in G, sic etiam altera ducatur ab A secans peripheriam in C, & occurrens perpēdiculari in P, quoniam per coroll. prop. 8 huius lib. 6, & § 21 ad eam, diameter, siue latus AD in triangulis rectangulis ADP, DAG est medium proportionale inter AP, AC, & inter DG, DB, ergo, per hanc 17, ea gemina rectangula sunt æqualia quadrato eiusdem diametri.

§. XV.

THEOREMA III.

Si in circulo diametri ſeſe ad rectos angulos ſecent, & ab vnius extremo puncto recta ducatur vtcunque ſecans circumferentiam, & alteram diametrum ſiue productam, ſiue non productam; erit rectangulum comprehenſum ſub duobus ſegmentis huius lineæ ductæ, quorum vnum inter extremum punctum prioris diametri, & ſecundam diametrum, alterum vero inter idem punctum extremum, & circumferentiam interijcitur, æquale quadrato intra circulum deſcripto.

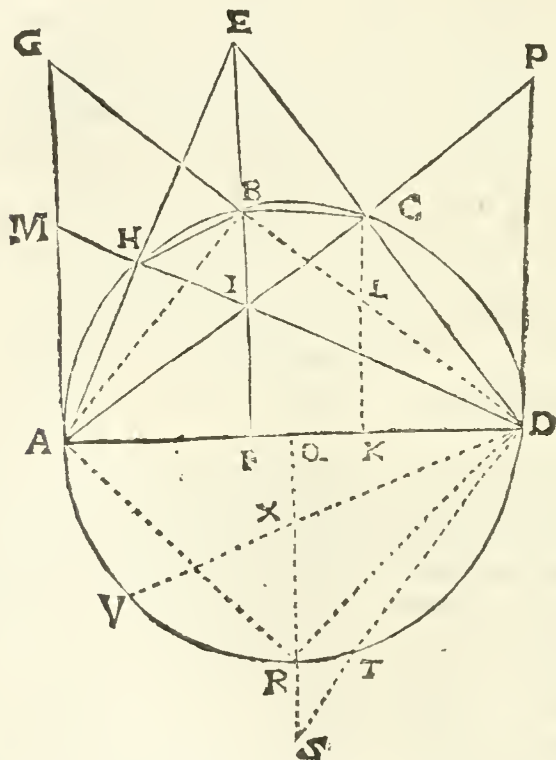
Hoc pariter theorema Cardani à Benedicto demonſtratum dupliciter apud Clauium in ſcholijs poſt propoſ. 33 ſexti, nobis pro corollario eſt, & patet ex antedemonſtratis tum ad 4 propoſ. huius, § 37, tum ad hanc 17. Si enim in circulo ABDR ab extremo diametri D ducta ſit recta vel DS ſecans circumferentiam in T, & ſemidiametrum QR productam extra circulum in S, vel recta DV, ſecans in X eandem ſemidiametrum QR non productam extra circumferentiam, & occurrens circumferentiæ in V; Quoniam recta DR ſubtendens angulum rectum quadrantis, eſt media proportionalis tam inter DS, DT, quàm inter DV, DX, per § 37 ad 4 huius; ergo per hanc 17, vtrunque rectangulum ſeorſim eſt æquale quadrato ex DR inſcribendo in circulo ABDR eodem prorſus modo, quo præmonſtratum eſt in antecedentibus ad hanc 17, æqualia eſſe rectangula ſub DE, DC, & ſub DH, DI quadrato ex DB. &c. Niſi quod FE non eſt ſemidiameter extra circulum producta, & DB non ſubtendit quadrantem, quemadmodum QS eſt ſemidiameter producta extra circulum, & DR quadrantem ſubtendit.

§ 15.

§. XVI.

THEOREMA IV.

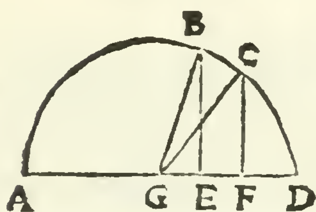
Quadratum coſtæ eſt æquale rectangulo ſub diametro, & ſemidiametro quadrati.



SI fingas quadratum ex DR in circulo ABDR inſcriptum, quoniam ex angulo recto ARD in ſemicirculo AVTD perpendicularis RQ demiſſa eſt in baſim AD, & per coroll. 8, propoſ. DR, vel RA, eſt latus medium proportionale inter AD, DQ, ergo per hanc 17, rectangulum ſub AD diametro, & ſub DQ ſemidiametro eſt æquale quadrato ex vtralibet coſta DR, vel RA quadrati ſub ijs &c.

§ XVII.
THEOREMA V.

Si curuæ lineæ recta ſubtendatur, & quæ à linea ad ſubtenſam perpendiculares ducũtur poſſint æquale ei, quod ipſius ſubtenſæ partibus continetur, dicta linea circuli circumferentia erit.



HOc theorema ad hanc 17 ſpectans vſui eſt in demonſtrationibus circa ſectiones, & theorias conicas, & cylindricas, & eſt apud Eutocium ad 5 propoſ. lib. 1. Con. Apollon apud Pappum lemm. 2. in l. 1 conic. eiuſdem Apollonij, & apud Serenum Antinſenſem Philoſophum lib. 1. de ſect. Cylin. propoſ. 4. Atq; Eutocius quidem, præter directam demonſtrationem, expedit etiam theorema demonſtratione indirecta ſic: Si enim circulus, qui circa AD diſcriptus eſt, non tranſit per B punctum, erit a rectangulum DEA æquale quadrato lineæ maioris, vel minoris ipſa EB, quod non ponitur. *Demonſtrationem verò directam vide apud Serenum citatum. Eam nos hìc omittimus, quia ſupponit aliqua è lib. 2 Elem. Quem Tyroni nos nondum ſuggeſſimus in hac noſtra compendiaria methodo. Nec in theorematibus tam facilis venia datur ſuppoſitionibus, quàm in problematum praxibus.* a 13. 6.

§. XVIII.
SCHOLION I.

Paradoxum de tribus rectis lineis inter ſe proportionalibus, quarum mediæ quadratum

non eſt æquale rectangulo ſub extremis,cõtra propoſ.17 huius.

AD 30 propoſ.huius inſertus § 9, in fine, vbi conſtat propoſiti paradoxi contra hanc 17 demonſtratio, & ſolutio ex occaſione ſectæ lineæ mediâ, & extremâ ratione, videbis id,quod hìc tantùm indicamus ex occaſione huius 17 propoſ. contra quam videtur paradoxum.Illuc ad 30 propoſ.te prouoco.

§. XIX.

SCHOLION II.

De quadrato medij numeri maiore, quam rectangulum ſub extremis in proportionalitate Arithmeticâ; minore verò in Harmonicâ,&c.

VIde nos ad 5 propoſ. lib. 2 Elem. vt ex ijs ornes cum paradoxis hanc 17.propoſ.

§ XX.

SCHOLION III.

Propoſitiones 16, & 17 hu. vniuerſaliſſimè demonſtratæ de toto genere quantitatis, &c.

SCilicet etiam de quantitate diſcretâ in arithmeticis,& non ſolum de figuris planis,ſed etiam de ſolidis, ac per notas vulgatas logiſticas, formatâ ſic vniuerſaliſſima propoſitione. Quatuor proportionalium quantitatum productum ab extremis eſt æquale producto à medijs; *vel:* trium proportionalium quantitatum

tum

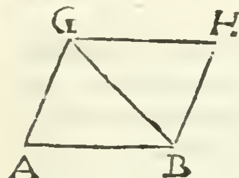
tum productum ex media est æquale producto ex prima, & tertia. *Ostensionem in notis arithmeticis habes in § 10 ad propos. 14 huius Quod enim ibi in numeris ostensum est de planis, & solidis, congruit cum hoc Scholio. Nam ibi numeri reciprocè proportionales 2, 6, 4, 12 producunt æqualem ex extremis 2, & 12, & ex medÿs, 6, & 4. Vide in Breuiario nostro Stereometrico, sect. 1. num. 3. Habes hic demonstratas simul cum 16, & 17 hu. etiam libri 7 propositiones 19, & 20 arithmeticas & libri 11 propositionem 36 solidam de parallelepipedis.*

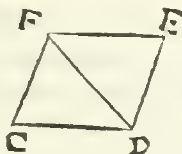
Propositio XVIII. Probl. VI.

Super data recta linea dato rectilineo simile similiterque positum rectilineum describere.



Porteat super data AB dato rectilineo CE simile, similiterque positum rectilineum describere. Ducatur DF, & [a] constituantur ad puncta A, B rectæ AB anguli GAB, ABG æquales angulis C, CDF; eritq; reliquus CFD reliquo AGB æqualis: triangula igitur FCD, GAB sunt æquiangula. [b] Est ergo, vt FD ad GB, ita FC ad GA, & CD ad AB. [c] Constituãtur rursus ad puncta B, G rectæ BG anguli BGH, GBH æquales angulis DFE, FDE; eritque reliquus E reliquo H æqualis: triangula ergo FDE, GBH æquiangula sunt; [d] est igitur vt FD ad GB, ita FE, ad GH, & ED ad HB. Ostensum autem est, esse vt FD ad GB, ita FC ad GA, & CD ad AB, [e] igitur vt FC ad AG, ita est CD ad AB, & FE ad GH; itemque ED ad HB. Et cum angulus CFD æqualis sit angulo AGB, & DFE ipsi BGH, erit totus GFE toti AGH æqualis. Eadem de causa





a propos. 23.1.

b propos. 4.6.

c propos. 23.1.

d propos. 4.6.

e propos. 11.5.

erit angulus CDE æqualis angulo ABH. Est verò & angulus C angulo A, & angulus E angulo H æqualis: æquiangula ergo sunt AH, CE, habentque latera circa æquales
f def. 6. angulos proportionalia. f Est igitur AH rectilineum simi-
1. le, similiterque positum rectilineo CE. Super data ergo recta linea, &c. Quod oportuit facere.

SCHOLION I.

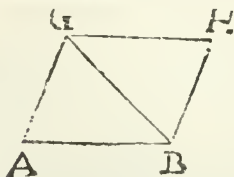
QVid sit figuras esse non solum similes, sed etiam similiter positas habes a nobis ad definit. 1 huius lib. 6.

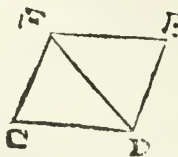
§. I.

SCHOLION II.

Hallucinatio, & variatio circa demonstrationem huius 18 propos.

CAmpanus quasi per neglectum expedire se satagit ad demonstratione circa hanc 18 propositionem, atq; affirmat: Polygonum polygono dato factum simile: Est enim æquiangulum dato polygono propter æqualitatem angulorum triangulorum in quos est vterque diuisus; sed & laterum proportionalium, propter proportionalitatem laterum ipsorum triangulorum ex 4 propos. huius, &c. *At esto, mi Campane, sint triangulorum partialiū æquales anguli, & latera eorum proportionalia, adhuc superest probare esse proportionalia etiam latera polygonorum ex ordine non interrupto.*





Nam facile quidem conceditur si partiales anguli (in figura Euclidis) AGB, & CFD, item BGH & DFE sunt inter se æquales, etiam totales AGH, CFE esse æquales, ac licet

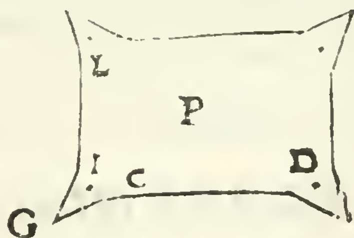
licet vt latus AG ad FB, ita sit CF ad FD, & vt BG ad GH, ita DF ad FE (sic enim sunt proportionalia latera triangulorum) non tamen inde statim apparet demonstratum esse vt AG ad GH, ita CF ad FE ex ordine, sine interpositione ipsorum GB, FD: nisi vtaris probationibus vel iuxta Euclidem, vel iuxta alios exactiores interpretes.

Euclides quidem vtitur 1. propos. lib. 5. At fortasse ad maiorem pro Tyronibus facilitatem Orontius, & Clauius vtuntur prop. 22, & argumentantur ex æqualitate sic. Quandoquidem est vt AG ad GB, ita CF ad FD, & vt BG ad GH ita DF ad FE, ergo ex æquali, vt AG ad GH, sic CF ad FE. &c sine qua probatione non constat demõstratio è sola laterum circa triangula æquiangula proportione, vt indicat Campanus.

§. II.

Vsus, & Praxis militaris proposit. 18 in circino proportionum.







Ppidi P formam maior sit transferẽda in minorem B, ita vt omnes partes, & latera, & totum rectilineum B sit in partibus, & in toto simile ipsi P. Vtere in circino proportionum eà facie, in qua diuisio est rectæ lineæ in partes æquales 100. Ad pr. 10, § 14. Longitudinem lateris, siue lineæ, puta CD oppidi P aptato in circini crure alterutro à centro A, verb. gr. ad 20. Deinde lineæ EF (super qua constituendum est B simile, similiterq; positum ipsi A) lõgitudinem, siue interuallum interpone, diducto circino ABC, inter 30, & 30. Atq; in immoto sic circino habebis (quod mire iucundum, ac vtile est) in quodam quasi promptuario reliqua omnia latera rectilinei B proportionalia, & homologa reliquis lateribus rectilinei P. Nam interuallo CG aptato ad A in circino vsq; ad, verbi gr. 10, interuallum inter 10, & 10 dat homologum EH, ac sic deinceps ex ordine GI, HK &c. Sic IL translatum sit in circinum ab A ad 20; interuallum

lum inter 20, & 20 dat homologum KN. &c. latera tamen FE, EH, HK, KN, &c. iunge in angulos ad E, H, K, N, &c. æquales angulis C, G, I, L, &c. iuxta praxes a nobis edoctas ad 23 propos. lib. 1.

2 *In qua tamen angulorum æqualitate conficienda non nihil operositatis est. Ac propterea, quod & alibi monui, vsus aliqui, & praxes in circino proportionum ingeniosi quidem sunt, sed non expediunt, quia geometricè fieri possunt eædem operationes expeditius, vt alibi apud nos vidisti, & mox in sequenti § videbis. Ad varietatem tamen ingeniosam, & condimentum eruditum Euclidianarũ propositionum apponuntur à nobis pro varijs Lectorum ingenijs variæ praxes.*

3 *Demonstratio huius vsus, & praxis tota est in 4, & 18 hac propos. huius lib. 6. Sunt enim omnia triangula æquiangula communem angulum in A vertice circini habentia. Et vt latera maioris rectilinei in circino, A 10, A 20, A 30, &c inter se sunt, in eadem proportione latera minoris rectilinei, siue interualla inter 10, & 10, inter 20, & 20, inter 30, & 30, &c. Sunt inter se, permutando, &c.*

Inuerso ordine praxis erit exercenda in translatione minoris formæ oppidi in formam maiorem; scilicet transferendo latera minoris in alterutrum latus circini AB, AC, & diducto circino ad interuallum primi lateris formæ maioris iuxtà terminos primi interualli translati inter A, & numeros in circino proportionum. Vsus aperiet tibi, mi Tyro, in exemplis hæc, & plura alia.

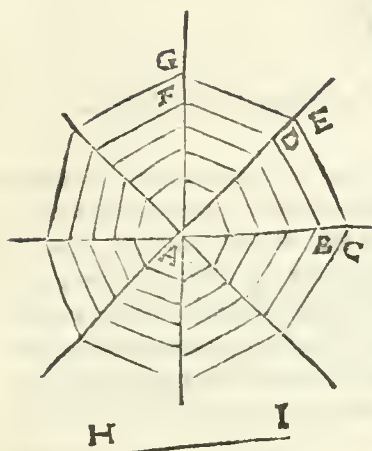
§. III.

PARADOXVM in-

eàdem Praxi, dum geometricè expeditior ab Aranea in Apiarijs nostris geometrizante docetur.

1 PEr simplicem ductum parallelarum modis pluribus a nobis edoctarum ad lib. 1. prop. 31, & per resolutionem rectilinei siue formæ oppidi datæ in triangula, expeditior fit operatio, & cura operanti eripitur angulorum æqualium constituendorum, vt docuit nos Aranea in Apiar. 1 Tr. lib 2. Vides eius animarculi telam proportionum esse pro circino proportionum, in qua

tela



telà fila parallela transuersa ducta sunt per centralia alia fila, ceu B-DF, CEG deducta per AC, AE, A-G. Quæ cẽtralia fila sũt instar crurũ circini proportionũ. Et fila parallela sunt pro interuallis acceptis inter numeros eiusdem formę. &c. Ac, si quadrangulo ABDF sit super data HI constituendum maius quadrangulum simile, similiterque positum, &c. ab vno quatuor angulorum A ducantur per reliquos F, D, B rectæ AG, AE, AC, & sumatur ipsi HI in latere vtrolibet AG, vel AC æqualis, verb gr. AC; à C agatur ipsi BD parallela CE, & ab E ipsi DF parallela EG, erit quadrangulum ACEG simile, similiterque positum dato ABDF, per simplicem ductum parallelarum expeditiùs etiã, quàm Euclides. &c. Similis erit ratio constituendi minus polygonum dato maiori simile. &c.

2 Hoc Araneæ exemplo oppidi aut munimenti bellici forma siue regularis, siue irregularis maior in minorem similem, & c. geometricè ac demonstratiuè transferri potest. Relinquo industriæ tuæ applicationem hanc, ne morosi videamur circà eadem, aut similia.

SCHOLION III.

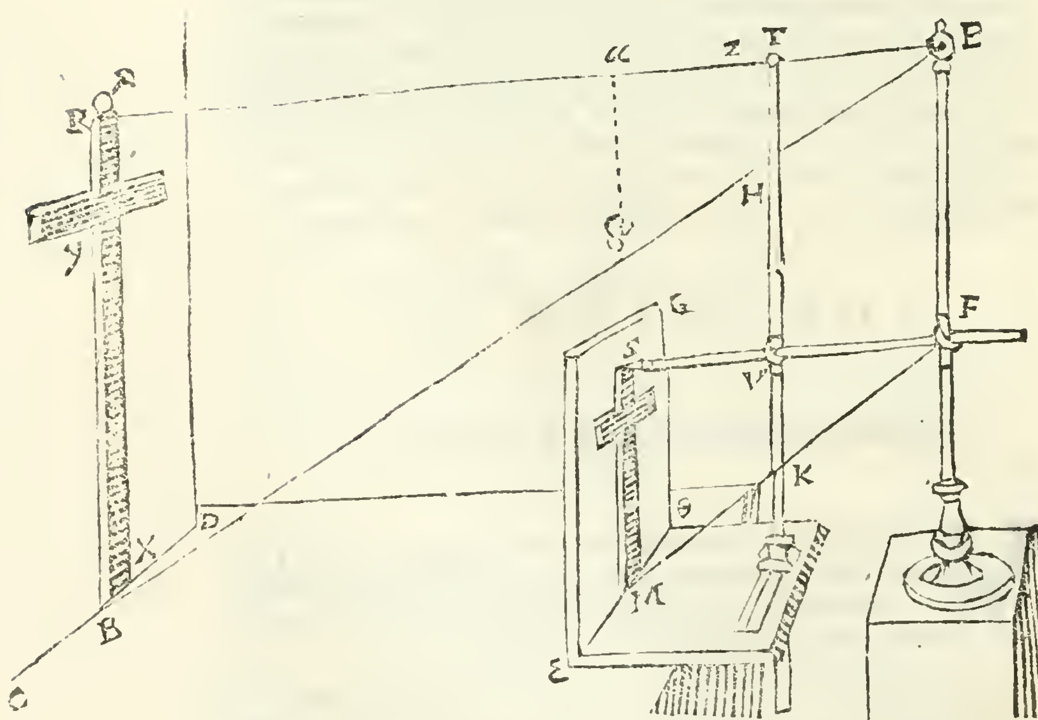
Ad ornandam erudite 18 propos.

VT Philosophus Mathematicus Tyronibus, atq; auditoribus suis ornet, & condiat propos. hanc 18 Eucl. afferat, præter geometrica, etiam eruditiones, quas ex Æliano, Plinio Vitruuio posuimus in cit. Pralib. 2. Ap. 1.

§. IV.

Vsus propos. 18 in Pictura scientifica.

SVppono constructionem, ac vsum instrumenti nostri scenographici, quo vtimur perpendiculariter ad imagines sciẽtificè pingẽdas quàm simillimas prototypis. Eius formam perfectiorem vide in Apiar. 5, prog. 2. cap. 4. & seq. Hìc vide schema vtcumq; in quo crux minor picta est maiori simillima. Agnosce igitur picturam crucis minoris nihil aliud esse, quam praxim problematis Euclidiani, quo ipsi polygono, siue cruci maiori datæ ponitur, describitur, pingitur polygonum, siue crux minor similis, similiterque &c. super recta FM. Sunt enim in planis perpendicularibus, ac parallelis



cruces

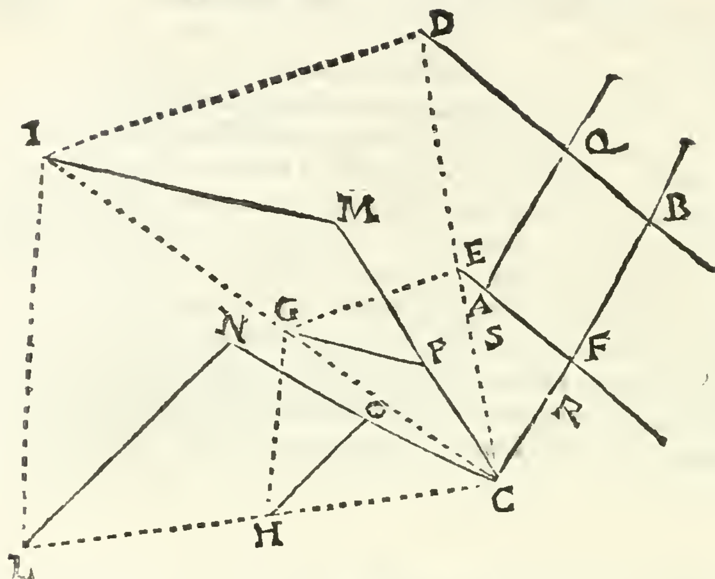
cruces parallelæ, & æquiangulæ, ac proinde argumentationes ex 18 huius concludunt similitudinem prototypi, & picturæ, & partium in pictura similiter inter se habentium, ac habent inter se partes in prototypo. Vide plura, & expressiora ad praxim, & theoricen ex hac 18. Eucl. in cit. Ap. 5. prog. 2. cap. 4. & cap. 5. num. siue § 5. In cap. quidem 4 ostenditur ETH æquale ipsi FVK. Sunt autem parallelæ, per constructionem, ipsæ TH, & RB, item ipsæ VK, SM, & super rectà ET ponitur simile, similiterq; ipsum ETH ipsi ERB, item super recta FV ponitur simile, similiterq; ipsum FVK ipsi FSM, &c. Cùm ergo eidem, siue æqualibus ETH, FVK sint similes, similiterq; positæ vtraque crux, erunt & inter se ipsæ similes, ac similiter positæ (vide & inferius q. lemma, 21 huius.) Quare 18 hæc propos. Eucl. præcipuus est fontium geometricorum, vnde scientifica, & scenographica pictura practicè, ac theoricè promanat. Vide praxim in cit. Apiar. 5. &c.

§. V.

Vsus, ac theorice organicæ picturæ, in eodem plano è 18 propositione Euclidis.

QVod nuper in exemplo Araneæ geometricè præstitimus, dum datam figuram maiorem, siue minorem in similem vel coarctauimus, vel ampliauimus, idque in eodem plano, licet idem etiam organicè præstare in plano eodem per instrumentum parallelogrammum plano ipsi parallelum, non autem perpendiculare, vt in antecedenti vsu ostendimus in planis inter se distantibus. Praxen, & theoricen prolixiores habes apud nos in citat. Apiar. 5. prog. 2. cap. 7, 8, &c. Hic tantùm pro scholij breuitate indico in apposita geometricà figura, in qua instar instrumenti est pa-

 ral-



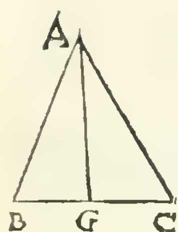
rallelogrammum CFAEBQD, cuius latera fixè mobilia sunt in angulis A, F, B, Q, & basta EC mobilis est circa C infixum tabulæ, in qua quadrangulum maius CDIL dum percurritur ab extremo D bastæ superioris, ac maioris BD, describitur eodem momento quadrangulum minus CEGH simile, ac similiter super rectà CE ab extremo E bastæ inferioris, ac minoris FE; & contra dum percurritur ab E datum minus EGH, describitur à D super CD maius DIL simile, ac similiter. &c. Plura vide etiam circa constructionem, & vsum eius instrumenti in cit. Apiar. 5. &c. Facilis est ex antepositis à nobis, & ab Euclide demonstratio. &c.

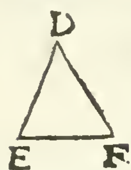
Propositio XIX. Theor. XIII.

Similia triangula inter se sunt in dupla proportione suorum laterum.

SInt ABC, DEF triangula similia habentia angulos B, E æquales, sitque vt AB ad BC, ita DE ad EF, vt latera BC, EF sint homologa. Dico triangulum A-

BC





BC ad triangulum DEF duplam habere proportionem eius, quam habet BC ad EF. [a] Sumatur enim ipsarum BC, EF tertia proportionalis BG vt sit quomodo BC ad EF, ita EF ad BG, ducaturque GA. Cùm igitur sit vt AB ad BC, ita DE ad EF, [b] erit permutando vt AB ad DE, ita BC ad EF, sed vt BC ad EF, ita est EF ad BG: ergo vt AB ad DE, ita est EF ad BG. Triangulorum ergo ABG, DEF latera circa æquales angulos reciprocantur. Quorum autẽ triangulorum vnum angulum vni æqualem habentium latera circa æquales angulos reciprocantur, illa æqualia sunt: [c] triangula ergo DEF, ABG æqualia sunt. Et quia est vt BC ad EF, ita EF ad BG; quando autem tres lineæ proportionales sunt, [d] prima ad tertiam duplam proportionem habere dicitur eius, quam habet ad secundam. BC ergo habet ad BG duplam proportionem eius, quàm habet ad EF. Vt vero BC ad BG, [e] ita est triangulum ABC ad triãgulum ABG: habet ergo triangulum ABC ad triangulum ABG duplam proportionem eius, quam habet BC ad EF. Est autem triangulum ABG æquale triangulo DEF: habet ergo triangulum ABC ad triangulum DEF duplam proportionem eius, quam habet BC ad EF. Similia ergo triãgula, &c. Quod oportuit demonstrare.

a *propos.* 15.6.
b *defin.* 10.5.
c *propos.* 15.6.
d *defin.* 10.5.
e *propos.* 1.6.

COROLLARIVM.

EX his manifestum est, si tres lineæ proportionales fuerint, esse vt prima ad tertiam, ita triangulum super prima descriptum ad triangulum super secunda simile, similiterq; descriptum. Ostensum est enim, vt est CB ad BG, ita esse triangulum ABC ad triangulum ABG, hoc est, ad triangulum DEF. Quod oportuit demonstrare.

SCHOLION I.

HAsce 19, & 20 propos. aliter facilè, ac euidenter demonstratas ex vsu geometrico centri grauitatis, vide in epilogo, seu Appendice in fine 3 par. hu. 2. To.

SCHOLION II.

QVam interpres ponit duplā intellige duplicatam proportionē. Sed dum addit: laterum, *indicat laterum quamcumq; proportionem duplandam, siue duplicandam.*

Griembergerus ad definit. 10 lib. 5 habet, inter cætera, quæ huc faciunt: ABCD: Quando omnes proportiones interiectæ sunt eædem; tunc ratio A ad C dicitur, per compendium, esse duplicata proportionis A ad B, eo quod èadem ratio sit bis continuata per communem terminum B. Et A ad D dicitur triplicata eiusdem, quia ter continuatur per terminos B, C, &c.

§. I.

SCHOLION III.

Hallucinatio circa duplicatam, &c. proportionem, &c.

Nota differentiam inter duplam, & duplicatam, inter triplam, & triplicatam. &c. proportionem.

ALiud est proportionem aliquam esse duplam alterius alicuius proportionis, aliud duplicatam. Sic aliud triplā, aliud triplicatam. &c. Qua in re vide hallucinationes aliquorum apud Clauium in schol. ad defin. 10 lib. 5. In numeris 2, 4, 8, 16, proportio 2 ad 8 dicitur duplicata proportionis 2 ad 4, quia èadem proportio dupla bis assumitur, siuè duplicatur, est enim proportio dupla inter 2, & 4, item dupla inter 4, & 8; ergo a 2 ad 8 bis sumpta est, siue duplicata èadem proportio. Non est autem proportio 8 ad 2 dupla proportionis 4 ad 2. nam proportio 4 ad 2 est dupla,

pro-

proportio autem 8 ad 2 est quadrupla ipsius 2, licet sit duplicata (nõ dupla) idest bis posita inter 2, & 4, & inter 4, & 8. &c.

Pariter proportio 16 ad 2 est triplicata (non triplex) proportionis, quæ est inter 2, & 4, quia tripliciter (non tripla) posita est proportio eadem inter 2, & 4, inter 4, & 8, & inter 8, & 16. Non autẽ tripla, sed octupla est proportio ipsius 16 ad 2. In exemplo geometrico de proportione quadratorum, quod paullo post subijciam ad sequentem 20 propos. Eucl. adhuc melius prædicta constabunt.

§. II.

Applicatio, & praxis duplicandæ, triplicandæ, &c. proportionis geometricæ ad maiores, & minores terminos.

1 *Datis duabus quantitatibus, siue numeris, si nescias quã inter se proportionem habeant, vt inuenias denominatorem proportionis quam maior numerus habet ad minorem, diuide maiorem per minorem, & quotiens dabit denominatorem proportionis. Inter 4, & 12 quænam est proportio maioris ad minorem? diuisis 12 per 4, quotiens est 3; ergo tripla est proportio inter 4, & 12. In maioribus numeris, verbi gratia inter 2432, 5521 quinam est numerus denominator proportionis maioris ad minorem? en diuisio maioris per minorem.*

2 3 5 3		33
5 5 2 1	(2399	——
2 4 3 2		2432

Quotiens ergo 2399 (neglectis minutijs $\frac{33}{2432}$) est denominator proportionis, quæ intercedit inter duas quantitates, siue numeros 2432, & 5521, conferendo maiorem cum minore.

2 *Inuento denominatore proportionis, si eum ducas in maiorem duorum numerorum, productũ, quod proueniet, erit tertius terminus proportionis, si tertium multiplices per eundem denominatorem, producetur quartus terminus, & sic deinceps multiplicando semper vltimum terminum per eundem quotientem, siue denominatorem, habebis duplicatas, triplicatas, &c. proportiones, &c. iuxta explicata in Scholijs antecedentibus.*

Si

Si denominatorem 3 proportionis inter 4, & 12, ducas in 12 fient 36, si in 36, fient 108, &c. qui sunt tertius, & quartus terminus proportionis triplæ, estque inter 36, & 4 duplicata proportio, inter 108, & 4 triplicata, &c.

In exẽplo maioris numeri, en ductus quotientis, siue denominatoris (neglectis minutijs) in maiorem. est igitur productum 13244879 tertius numerus proportionalis post primum 2432, & secundum 5521, & duplicata proportio tertij ad primum, &c.

5521
2399
49689
49689
16563
11042
13244879

3 *Hactenus ad inueniendos maiores, ac maiores terminos proportionalitatis Geometricæ. At vero ad minores, ac minores, per denominatorem proportionis, quam habet maior ad minorem (denominatorem, inquam, inuentum per modum nuper traditum) diuide minorem numerum duorum datorum, & quotiens dabit tertium terminum minorem proportionalem; dabit & quartum, & quintum, ac reliquos deinceps terminos minores in eadem proportione denominator diuidens singulos productos terminos. Exemplum: Denominator proportionis, quam habet maior numerus 16 ad 8, est 2, qui est quotiens ex diuisione maioris per minorem. Per denominatorem, siue quotientem 2 diuide minorem 8, & quotiens 4 dat tertium terminum minorem in eadem proportione dupla, Sic diuide per 2 tertium 4, & prodibit quartus terminus 2, &c. 16, 8, 4, 2, 1, &c.*

Vide plura, & egregia apud Clauium vbi de proportionalitate Geometrica in digressionibus ad definitionem 4 lib. 5 Eucl. Hic nostra satis nunc Tyronibus pro instituto, & pro inferius applicandis ad ornandas, ditandas, condiendas hasce 19, & 20 propos. Eucl. &c.

SCHOLION III.

Applicationes, & Vsus, &c. 19 propos. rectius ad prop. 20. translati.

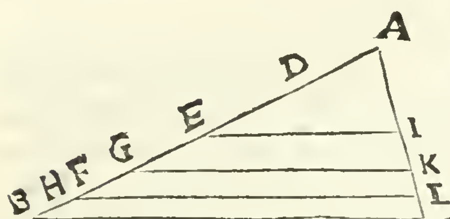
Vsus, & applicationes diuidendi, augendi, &c. similia triangula in data proportione, & plura alia curiosa, & vtilia vide ad sequentem 20 propositionem, in qua quod hic speciatim traditum est de triangulis, vniuersim demonstratur de omnibus rectilineis, siue polygonis similibus.

§ 3.

§. III.

PROBLEMA.

Datum triangulum per lineas vni lateri parallelas in quotlibet æquales partes diuidere.



SIt triangulum ABC diuidendum, verbi gratia in quatuor partes per lineas lateri BC æquidiſtantes. Secetur vtrumuis reliquorum laterum AB, in 4 partes æquales in tot videlicet in quot triangulum diuidendum eſt, in punctis D, E, F, & inter AB, AD inuenta media proportionali AE, atq; inter AB, AE media proportionali AG; ac deniq; inter AB, AF media proportionali AH; ducantur EI, GK, HL, lateri BC parallelæ. quas dico triangulum partiri in 4 partes æquales. *a* Quoniam enim triangulum ABC triangulo AEI ſimile eſt; *b* erit triangulum ABC ad triangulum AEI, vt AB, ad AD, quod tres AB, AE, AD ſint continue proportionales. Eſt autem AD quarta pars ipſius AB. Igitur & triangulum AEI quarta pars eſt trianguli ABC.

a *coroll.* 4 *ſexti.*
b *coroll.* 19 *ſexti.*

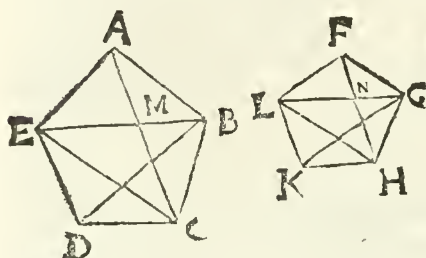
c Non aliter oſtendemus eſſe triangulum ABC ad triangulum AGK, vt AB ad AE, quod etiam tres AB, AG, AE ſint continuè proportionales. Quare cum AE contineat $\frac{2}{4}$ rectæ AB, continebit etiam AGK triangulum $\frac{2}{4}$ trianguli ABC. Ideoq; cum AEI ſit $\frac{1}{4}$ trianguli ABC, vt oſtendimus, erit EIKG $\frac{1}{4}$ eiuſdem trianguli ABC. Denique eàdem ratione erit triangulum ABC ad triangulum AHL, vt AB ad AF, quòd etiam tres AB, AH, AF ſint continuè proportionales, ac proinde triangulum AHL complectetur $\frac{3}{4}$ trianguli ABC; quemadmodum AF continet $\frac{3}{4}$ ipſius AB: ideoq, BHLC erit $\frac{1}{4}$ trianguli ABC, &c. *Clauius in Geom. Pract. &c.*

c *coroll.* 19 *ſexti.*

Pro-

Propositio XX. Theor. XIV.

Similia polygona in similia triangula diuidũtur & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum ad polygonum duplam habet proportionem eius, quam habet latus homologum ad latus homologum.



Sint similia polygona ABCDE, FGHKL, & sit latus AB homologum ipsi FG. Dico polygona ABCDE, FGHKL in similia triangula diuidi & numero æqualia, & homologa totis, & polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL duplicatam habere proportionem eius, quam habet AB ad FG. Iungantur enim BE, EC, GL, LH; & quia polygonum ABCDE simile est polygono FGHKL, erit angulus BAE æqualis angulo GFL; & est, vt BA ad AE, ita GF ad FL. Cum itaque duo sint triangula ABE, FGL vnum angulum vni æqualem, & circa æquales angulos latera proportionalia habentia, [a] erunt ipsa æquiangula; ideoq; & similia: æqualis est ergo angulus ABE angulo FGL; est verò & totus ABC toti FGH æqualis, propter similitudinem polygonorum; [b] reliquus ergo EBC reliquo LGH æqualis erit. Et quia, propter similitudinem triangulorum ABE, FGL, est vt EB ad BA, ità LG ad GF; sed & propter similitudinem polygonorum, est vt AB ad BC, ita FG ad GH: [c] ex æquali ergo est, vt EB ad BC, ita LG ad GH; latera ergo circa æquales angulos EBC, LGH sunt proportionalia; æquiangula [d] ergo sunt triangula EBC, LGH; quare

a propos. 6.6.
b ax. 3.
c propos. 22.5.
d propos. 6.6.

re & similia. Eadem de causa similia sunt triangula ECD, LHK. Similia ergo polygona ABCDE, FGHKL in similia triangula, & æqualia numero diuisa sunt. Dico & homologa esse totis, hoc est proportionalia, & antecedentia quidem ABE, EBC, ECD; consequentia verò ipsorum FGL, LGH, LHK; atque polygonum ABCDE ad polygonum FGHKL duplam habere proportionem eius, quam habet latus homologum AB ad latus homologum FG. Iungantur enim AC, FH. Et quia, propter similitudinem polygonorum, sunt anguli ABC, FGH æquales; estque vt AB ad BC, ita FG ad GH, *e* æquiangula ergo sunt triangula ABC, FGH: æquales igitur sunt tam anguli BAC, GFH, quam BCA, GHF. Et quia anguli BAM, GFN æquales sunt, ostensique sunt & ABM, FGN æquales, erunt & reliqui AMB, FNG æquales; sunt ergo triangula ABM, FGN æquiangula. Similiter ostendemus & triangula BMC, GNH esse æquiangula. Est ergo vt AM ad MB, ita FN ad NG. Et vt BM ad MC, ita GN ad NH; ex *f* æquali ergo est vt AM ad MC, ita FN ad NH: *g* sed vt AM ad MC, ita est triangulum ABM ad triangulum MBC, & AME ad EMC, sint enim ad se inuicem vt bases; & *h* vt vnum antecedentium, ad vnum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia; vt ergo triangulum AMB ad BMC, ita triangulum ABE ad CBE: *i* sed vt AMB ad AMC, ita est AM ad MC; Vt ergo AM ad MC, ita triangulum ABE ad EBC. Eadem de causa est vt FN ad NH, ita triangulum FGL ad GLH. Et est vt AM ad MC, ita FN ad NH; vt ergo triangulum ABE ad BEC, ita triangulum FGL ad GHL; *k* & permutando, vt ABE ad FGL, ita EBC ad GLH. Similiter demonstrabimus, ductis BD, GK, esse vt triangulum BEC ad LGH, ita ECD ad LHK: & quia est, vt ABE ad FGL, ita EBC ad LGH, & ECD ad LHK, *l* erit vt vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia: est ergo vt ABE ad FGL, ita ABCDE ad FGHKL; sed *l* ABE ad FGL duplam proportionem habet eius, quam AB latus homologum

e prop. 6.6.

f prop. 22.5.

g prop 1.6.

h prop. 12.5.

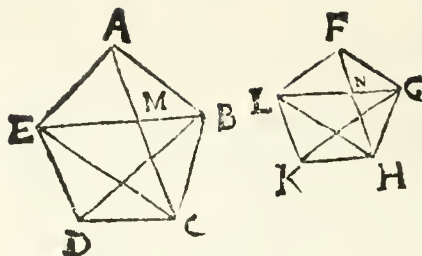
i prop. 1. 6.

k prop. 16.5.

l prop. 12.5.

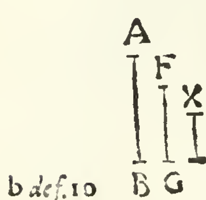
l prop. 19.6.

m *prop. 19.6.*



ad FG latus homologum; *m* ſimilia enim triangula in dupla proportione ſunt laterum homologorum: habet ergo & ABCDE polygonum ad FGHKL polygonum duplam proportionem eius, quam habet AB ad FG. Similia ergo polygona, &c. Quod oportuit demonſtrare. Eodem modo in ſimilibus quadrilateris oſtendetur in dupla illa eſſe pro-
a *prop. 19.6.* portione laterum homologorum. *a* Oſtenſum eſt autem & in triangulis.

COROLLARIVM I.



VNiuersè ergo ſimiles rectilineæ figuræ ad ſe inuicem ſunt in dupla proportione laterum homologorum; & ſi ipſarum AB, FG tertiam proportionalem ſumamus X,
b *def. 10* *b* habebit AB ad X duplam proportionem eius, quam habet ad FG. Habet autem & polygonum ad polygonum, & quadrilaterum ad quadrilaterum duplam proportionem eius, quam habet homologum latus ad
c *corol. prop. 19. 6.* homologum, hoc eſt AB ad FG. *c* Oſtenſum eſt autem hoc in triangulis.

COROLLARIVM II.

Corol. prop 19. 6. VNiuersè ergo manifeſtum eſt, ſi tres fuerint rectæ, eſſe vt prima eſt ad tertiam, ita figuram à prima propor. deſcriptam, ad figuram à ſecunda ſimiliter deſcriptam. Quod oportuit demonſtrare.

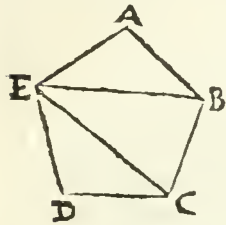
Oſtendemus etiam aliter, & expeditius triangula eſſe homologa. Exponantur rurſus polygona ABCDE, FGHKL, ducanturque BE, EC, GL, LH. Dico eſſe vt triangu-

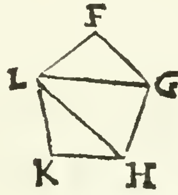
lum

lum ABE ad triangulum FGL ita EBC ad LGH, & CDE ad HKL. Cùm enim triangula ABE, FGL similia sint, *a* habebit ABE ad FGL duplam proportionem eius, quam habet latus BE ad GL. Eadem de causa habebit triangulum BEC ad GLH duplam proportionem eius, quam habet BE ad GL. Est ergo vt ABE ad FGL, ita EBC ad GLH. Rursus cum triangula EBC, LGH similia sint, habebit EBC ad LGH duplam proportionem eius, quam habet CE recta ad HL. Eadem de causa habet triangulum ECD ad LHK duplam proportionem eius, quam habet CE ad HL. Est ergo vt EBC ad LGH, ita CED ad LHK. Ostensum autem est esse vt EBC ad LGH, ita ABE ad FGL; ergo vt ABE ad FGL, ita est BEC ad GLH, & ECD ad LHK; *b* vt ergo vnum antecedentium ad vnum consequentium, ita omnia antecedentia ad omnia consequentia, & reliqua vt in priori demonstratione. Quod oportuit demonstrare.

a propos. 19.6.

b propos. 12.5.





VSVS

— Militares, Musici, Machinarij, Optici, seu Pictorij, Geometrici, Astronomici è 20 Propositione Eucl.

§. I.

Corollarium Practicum, seu

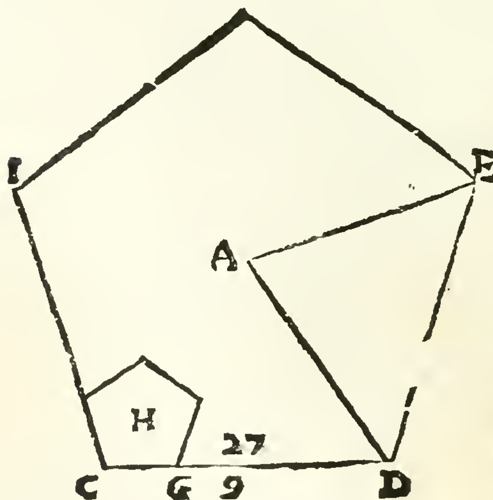
PROBLEMA I.

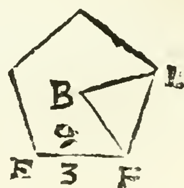
Datis duobus rectilineis similibus quam inter

se proportionem habeant statim ac facillimè inuenire in circino proportionum.

Abusus aliquorum in circino proportionum.

Licet è § 6 ad primam huius deduci possit praxis in circino proportionum, quam hic subijciemus, tamen pro Tyronibus, hic singillatim applicandam censemus. Antequam praxim, indico abusum, quem aliqui addiderunt (præter alios, abusus eius instrumenti, alibi à nobis indicatos) circino proportionum. Nam inuexerunt in id instrumentum diuisiones implicatissimas plurium linearum, (præter duas a nobis positas) pro soluendis varijs problematibus geometricis, præsertim circa superficies; at nos (quod illi faciunt per difficiliores lineas) ad soluendum hic propositũ problema in eo circino vtemur simplici diuisione lineæ rectæ in æquales partes 100. Ac quoniã ex hac 20 prop. Eucl. facile deducitur hoc, & aliqua alia problemata, quæ hic subijciemus, ideo quædam quasi coroll. denominamus.





Igitur data sint similia duo rectilinea. verb. gr. Pentagona A, B. Quamnã habent inter se proportionem? Accipe latus EF minoris pentagoni B, & eius lateris interuallum interpone inter numerum circini partium æqualium, in quas velis diuisum EF, v. gr. inter 3 & 3, vel inter 9, & 9, scilicet, diducto circino proportionum ad interuallum EF inter 9, & 9. Deinde accipe quantitatem lateris CD maioris pentagoni A, & immoto circino proportionum, vide inter quos numeros laterales aptetur, verb. gr. inter 27, & 27. Diuiso maiore numero 27 per 9, quotiens 3 dabit denominatorem triplæ proportionis

9 ad

9 ad 27. Accipe iam in circino proportionum tertiam proportionalem duobus lateribus 9, & 27, & vtere modo, quem docuimus ad prop. 4 huius § 9, probl. 1. ex Apiarijs. Quo modo inuenies tertiam maiorem proportionalem esse partium 81 ex interuallo inter numeros 81, & 81 in cruribus circini proportionum.

Siue etiam hic aliter: multiplica 27 per 3, & productum 81 erit numerus partium tertiæ proportionalis ad latera 9, & 27. Igitur ex corollar. 2 huius 20 propos. habebit pentagonum B ad pentagonum A proportionem, quam 9 ad 81 siue 3 ad 9. Diuide iam 81 per 9, prodibit 9 quotiens denominator proportionis duplicatæ ipsius 9 ad 81. Vel progrediendo ad minores terminos, & ad tertiam proportionalem minorem, diuide 9 primum numerum per denominatorem proportionis inter 9, & 27, idest diuide 9 per 3, & prodibit quotiens 3, qui habebit ad 27 duplicatam proportionem. Quam vt scias, diuide rursus 27 tertium per 3 primum, & quotiens erit pariter 9, vt fuit ex diuisione ipsius 81 per 9. Vel aliter iuxta defin. 5 huius lib. 6, non diuidendo, sed multiplicando scilicet duos denominatores 3, & 3 proportionis triplicæ inter 9, 27, 81, vel inter 3, 9, 27. Igitur ductus inter se 3 dat 9. &c.

§. II.

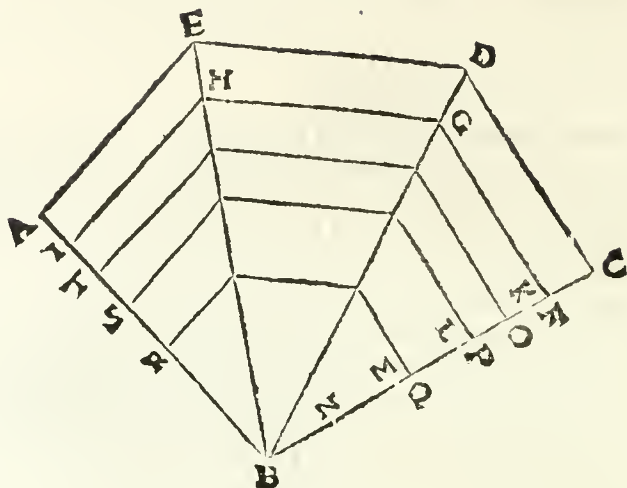
Corollarium Practicum, seu

PROBLEMA II.

Datum rectilineum diuidere in partes æquales per lineas duo latera contigua secantes, & reliquis lateribus parallelas; seruata figuræ similitudine.

M*Aluimus hoc problema proponere ad hanc 20 prop. Eucl. quàm ad anteced. 19, quia hic vniuersale est, & potest applicari etiam triangulis, quemadmodum 20 hæc prop. Euclid. vniuersalem facit antecedentem particularem de triangulis.*

Sit



Sit pentagorum etiam non regulare ABCDE diuidendum, puta, in partes quinque æquales, per lineas ſecantes duo latera contigua, ſeu AB, BC, & parallelas reliquis lateribus AE, ED, DC. Diuidatur alterutrum laterum contiguorum ſecandorum, verb. gr. AB, in quot proponitur figura diuidenda, ſcilicet in 5 partes æquales, in punctis K, I, M, N, & inter BC, BK inueniatur media proportionalis BF; inter BC, BL media BO; inter BC, LM media BP, inter BC, BN media BQ; & per F, O, P, Q agantur parallelæ lateribus CLEA, eritq; pentagonum diuiſum in 5 partes æquales.

Nam inuentæ illæ mediæ proportionales nihil aliud ſunt, quàm ſecundæ trium proportionalium, ſuper quibus rectilinea deſcripta habent proportionem ad rectilinea ſimilia deſcripta ſuper primâ lineâ proportionalium, quam linea prima ad tertiam proportionalem, iuxta corollar. 2 Eucl. poſt 20 huius prop. Igitur, in exemplo figuræ, quoniam BQ ſumpta eſt media proportionalis inter BC, BN, erit ſuper BQ deſcriptum rectilineum ad ſimile deſcriptum ſuper BC, vt BN ad BC; ſed BN eſt ſecta quinta pars ipſius BC, ergo & rectilineum ſuper BQ erit quinta pars rectilinei ſuper BC. Rurſus quoniam BP eſt media proportionalis inter BM, BC, erit rectilineum ſuper BP ad rectilineũ ſuper BC, vt BM prima ad BC tertiam; ſed BM continet duas quintas ipſius BC, ergo, etiam rectilineum ſuper BP continebit duas quintas

re-

rectilinei super BC; est autem probatum rectilineum BQR quinta pars rectilinei BCA, ergo & spatium inter QTRS erit quinta pars rectilinei super BC.

Eodem modo super BO rectilineum continebit tres quintas rectilinei super BC, sicut recta BI continet tres quintas rectæ BC, eritq; spatium inter PO T tertia vna quinta pars, &c. Sic inter OFTI quarta quinta, inter FCIA vltima quinta. Diuisum est ergo rectilineum ABCDE in partes æquales per parallelas reliquis lateribus AE DC, & secantes contigua latera AB, BC. Quod erat faciendum.

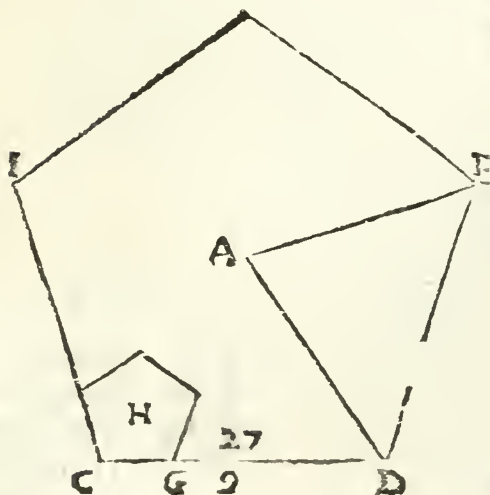
Et seruata est figurarum similitudo, quæ facile probari potest è 18 prop. & è schol. ad eam, & è nostra Aranea geometrizante in Apiar. 1. prælib. 2. Applica quod indicamus, & exerce te geometricè, mi Tyro.

§ III.

Corollarium Practicum, siue

PROBLEMA III.

Dati rectilinei aream metiri per similia minora; siue inuestigare quot rectilinea similia minora contineat datum rectilineum in mensurà dati lateris.



Rectilineum A, vno latere, verb. gr. CD, diuiso in quotlibet partes æquales, verb. gr. in 4, & excitato super vnà CG rectilineo H, simili, similiterque posito ipsi A, scire aueo quot recti linea ipsi H æqualia contineantur in rectilineo maiore toto A. Ipsis CG, CD inueniatur tertia proportionalis, sitq; vt CG 1 ad CD 4 partes, ita 4 ad ...

tium, ideſt ad 16. Dico in rectilineo A contineri 16 rectilinea H; ſiue dimenſione facta areæ maioris rectilinei A in menſuris rectilinei H, quantitatem areæ rectilinei maioris eſſe 16 rectilineorum H minorum.

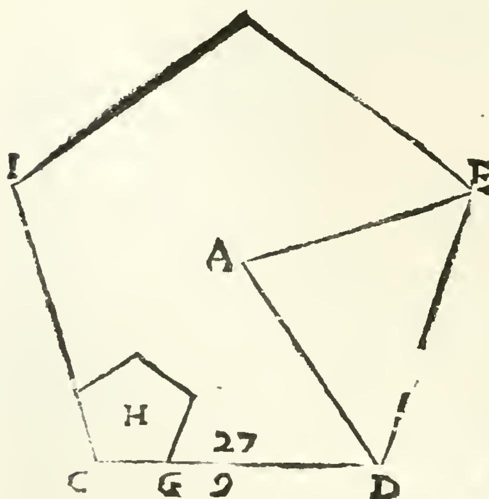
Patet è coroll. 2 huius 20 prop. Nam rectilineum H ſuper prima, proportionalium CG ſe habet ad rectilineum A ſuper ſecunda CD, quemadmodum prima CG ſe habent ad tertiam quæ eſt 16. Siue, ex 20 propoſ. habent rectilinea H, & A inter ſe proportionem duplicatam laterum CG, CD, quæ eſt in proportione quadrupla horum numerorum bis ſumpta, 1, 4, 16, vt 1 ad 16.

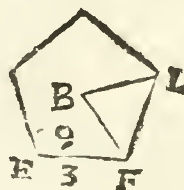
§. IV.

Corollarium Practicum, ſiue

PROBLEMA IV.

Datum rectilineum augere, vel imminuere in data proportione, ſeruata figuræ ſimilitudine.







Rectilineum M ſit augendum in proportione rectæ NO ad

ad rectam CD: inueniatur inter NO, CD media proportionalis EF, super qua excitato rectilineo B simili, similiterq; posito ipsi M, erit B auctum in proportione rectæ NO ad rectam CD. Scilicet ex corollar. 2 sæpius citato ex hac 20, siue ex ipsa 20 propositione. Habent enim M, B proportionem duplicatam laterum NO, EF, quæ est ipsius NO ad rectam CD. Similem in modum si rectilineum A sit imminuendū in proportione lateris CD ad rectam NO, inuentâ media EF, & super eâ excitato simili, similiterq; &c. B, erit A imminutum in B proportione lateris CD ad rectam NO. &c. Datum ergo rectilineum auximus, & imminuimus in data proportione, seruata figuræ similitudine. Quod erat præstandum.

§. V.

Corollarium Practicum, siue

PROBLEMA V.

Dato rectilineo, simile similiterq; positum in datâ aliâ proportione constituere.

NOn differt operatio à præcedenti problemate, à quo deducitur. Nam rectilineum auctum, vel imminutum in data proportione idem est quod constituitur ad aliud simile in data proportione. Applica praxim huius corollarij problemati, seu potius problema præcedens praxi huius corollarij.

Hinc patet quid sit agendum, cum dicitur —.

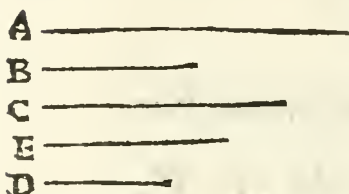
—Vt recta ad rectam, ita constituere rectilineum ad simile rectilineum.

A ————————
B ————
C ——————
E ————
D ——

VT A ad B, ita fiat (exēplum esto, facilitatis maioris gratia, in quadrato) ad quadratum ex C aliud quadratum. Lateri enim tetragonico C inuenienda est D in eadem proportione ipsius A ad B.

Mox inter C, D inuenienda est media proportionalis E, super qua quadratum erit ad quadratum super C, vt B ad A. Nam quadratum C ad quadratum E habet duplicatam proportionem, per corollar. ex 20, sicut recta C ad D, quæ est proportio rectæ A ad B. Sic conuerso modo, —

— *Vt rectilineum ad rectilineum simile, sic facere rectam ad rectam.*



SI conuersim, vt quadratũ super C ad quadratum super E, velis efficere vt sit recta A ad aliam; accipe lateribus C, E tertiam proportionalem D, & vt C recta est ad D, sic fac sit A ad B. Nã quadrati C ad quadratum E est duplicata, idest proportio rectæ C ad D, cui proportioni cùm eadem proportio sit A ad B, erit vt quadratum C ad quadratum E, ita recta A ad rectam B.

SCHOLION I.

Problemata præcedentia etiam de rectilineis non similibus.

SI rectilinea data non sint similia, redigendum alterum erit, iuxta propos. 18 huius, ad alterius similitudinem, similemq; positionem, ac deinde operandum erit vt in præcedentibus similibus. Circa quæ posuimus exempla prout exigit præscriptum huius 20 propos. Eucl. de similibus; quam tamen propositionem hic etiam vniuersaliorem, idest etiam ad non similia, traducimus.

§. VI.

SCHOLION II.

De quadrato quadruplo quadrati super dimidio latere excitati.

DEducitur ex corollarijs Euclidis, & ex problematibus hic nostris antecedentibus. Nam tribus datis in eadem proportione, verb. gr. in dupla proportione sic: 1, 2, 4. Quadratū ex latere 1 primo proportionali ad quadratum ex latere 2 secundum proportionale habet proportionem primi 1 ad tertium proportionale latus 4, (hoc est duplicatam lateris 1 ad 2) ideoq; quadratum ex latere 2 est quadruplum quadrati super dimidio latere 1. Poteratq; hoc corollarium theorematicum problematicè, ac vniuersaliter proponi, vt antecedens problema, scilicet sic: quadratum augere ad datam proportionem, verbi gratia quadratum quadruplare. Quod fieret sumptà medià inter 1 augendum, & inter 4, idest inuento 2; & super latere partium 2 excitatum quadratum esset quadruplum quadrati ex 1.

§. VII.

SCHOLION III.

Indicata aliqua de proportione etiam circulorum inter se duplicatà ex diametris.

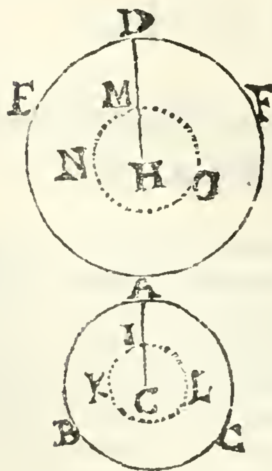
EX prædictis etiam discis, mi Tyro, quid sit apud Euclid. lib. 12 prop. 2. Circuli inter se sunt, quemadmodum a diametris quadrata. *Demonstrationem in seq. § 8 dabo aliterq; quā Eucl. Iuxta terminos hic vsurpatos idem est ac si dicas Quemadmodum ex hac 20 prop. quadrata duplicatam habent proportionem laterum homologorum, sic circuli duplicatam diametrorum. Exempli gratia datis duobus circulis, & duabus eorum diametris, inuenta tertia proportionali, circuli dati habent inter se proportionem, quam vtrius libet diameter ad tertiam proportionalem inuentam.*

§. VIII.

THEOREMA I.

Circuli habent inter se duplicatam proportionem semidiametrorum, ex vsu geometrico centri grauitatis demonstratam.

IN varijs vsibus & ad hanc 20 propos. & ad alias in hoc Aerario pro Machinariâ, Astronomiâ. &c. (ac præsertim pro praxibus, & problematibus ad extremum propositionis 47 lib. 1. à nobis positis) ne supponas sine demonstratione geometricà proportiones circulorum, atq; etiam sphærarum inter se, nèue egeas ad hæc posteriorum Euclideorum librorum demonstrationibus, accipe paucis demonstratas eas proportiones hìc à nobis ex vsu geometrico centri grauitatis.



Itaq; affirmo, ac breuitèr demonstro circulos ABC, DEF habere inter se proportionem duplicatam semidiametrorum AG, DH. Quoniam enim fiunt ex gyratione semidiamrtrorum GA, HD, altero eorum extremo fixo in centris G, & H, & circularium arearum quantitas habetur ex ductu earũdem semidiametrorum in peripherias IKL, MNO designatas à centris grauitatis I, M, habebunt prædicti circuli ABC, DEF inter se proportiones & semidiametrorum AG, DH, & peripheriarum minorum IKL, MNO. At vt peripheriæ, sic inter se sunt & earum diametri, ac semidiametri (per citata ex Pappo ad propos. 45. lib. 1. § 3 in 1 tom. huius Aerarij) ergo habent inter se circuli bis proportionem semidiametrorum, id est duplicatam.

§9.

§. IX.
COROLLARIVM VI.

Propositio 2. lib. 12 Eucl. demonstrata ex antecedenti theoremate.

C*Ongruit demonstratum theorema antecedens ex vsu geometrico centri grauitatis cum propositione 2. lib. 12 Euclidis, quæ est :* Circuli inter se sunt, quemadmodum à diametris quadrata . *Quemadmodum enim quadrata à diametris circulorum habent inter se duplicatam proportionem laterum; siue diametrorum, è quibus fiunt, iuxtà hanc 20 propos. sic & circuli habēt inter se duplicatam proportionem diametrorum , siue (quod in idem rècidit) semidia metrorum, vt nos in antecedenti theoremate facillimè, ac breuissimè demonstrauimus, ac alitèr, quàm Euclides, qui prolixà, & indirectà demonstratione, &c.*

§. X.
COROLLARIVM VII.

Semicirculi, quadrantes, &c. circulorum, habent inter se duplicatam proportionem semidiametrorum.

F*Iunt enim etiam illæ partes circulares ex ductu semidiametrorum in dimidiam peripheriam, vel quartam partem peripheriarum signatarum à centris grauitatis , ac vt partes peripheriarum sunt inter se, sic sunt & semidiametri, à quibus describuntur &c. Ad confirmationē aduoca huc propos. 15 lib. 5. Eucl. qui etiam facit pro his, & alijs demonstrationibus apud nos ex centro grauitatis, vbi partes peripheriarum, vel diametrorum pro totis accipimus &c.*

§. XI.

SCHOLION IV.

Hallucinatio vitanda Tyronibus in circulorum inter se proportionibus.

ALiud eſt, mi Tyro, (tui ſimiles expertus ſum hic falli) philoſophari geometricè de proportionibus inter ſe peripheriarum, aliud de proportionibus inter ſe circulorum. Circulus enim, iuxta eius definitionem, appellat non ſolum ambitum, ſiue peripheriam, ſed aream ſub ambitu circulari, ſiue peripheriâ comprehenſam. Atq; alia eſt proportio inter ſe peripheriarum, alia arearum. Habent quidem circulorum peripheriæ eandem inter ſe proportionem, quem diametri (quod Pappus præ alijs demonſtrauit lib. 5, prop. 11) ſed ea ſimplex eſt proportio, non autem duplicata. Quã quidem duplicatam diametrorum proportionem habent inter ſe areæ circulorum, ex dictis in Schol. anteced. 2. Quare ſi exploranda ſit proportio duorum circulorum in peripherijs, aut augendus alter duorum circulorum circa peripheriam, ſatis eſt ſpectare, & accipere proportionem ſimplicem, quam optas, in diametris, & habebit, verb. gr. alter duorum circulorum, cuius duplo maior eſt diameter, quàm alterius, habebit, inquam, peripheriam alterius peripheriâ duplo maiorem; & ſi ſit alter augendus peripheriâ duplâ, duplicanda erit diameter, ſeu ſemidiameter, eiuſq; interuallo ducta peripheria erit aucta in duplum.

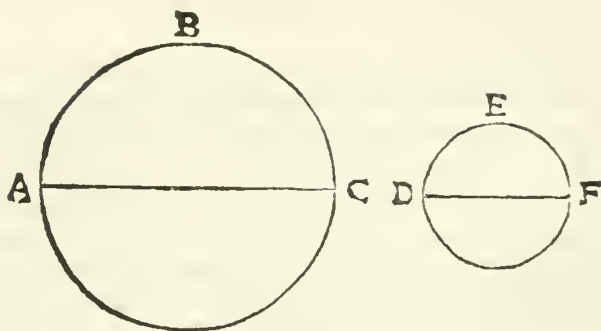
§XII.

SCHOLION V.

Quæſtiunculæ curioſæ, ac praxes Harmonicæ, Militares, &c. in proportionibus peripheriarum, & circulorum.

1 *Ac-*

1 *Accipe luculentum exemplum, & praxim proportionis peripheriarum, & circulorum in re musica; quo exemplo palam fit quid intersit, etiam ad sensum, inter vtrãque in circulis proportionem. Finge primo duas peri-*



pherias ABC, DEF esse æreas, ac sonoras, & diametros AC, DF esse duas fides harmonicas æqualiter tensas æqualis crassitiei, similisque materiæ; quarum diametrorum maior sit dupla longitudine minoris, & consequenter etiam, ex prædictis, peripheria maior dupla minoris. Pulsatæ vtraq; diameter edent consonantiam, quæ est in lineæ harmonicæ diuisionibus (reuise praxim nostram in § 8 ad 9 proposit. & in Apiar. 10, Progym. 1. propos. 1.) totius ad dimidiam, vocaturq; consonantia diapason, suauissima. Quam ergo consonantiam reddent peripheriæ vtraq; pulsatæ ABC, DEF? eandem scilicet, quam diametri, diapason; quia eadem prorsus, ac simplex proportio diametrorum quæ peripheriarum est.

Laminæ duæ circulares diametrorũ in dupla proportione, pulsatæ reddent consonãtiã disdiapason, &c.

Finge secundo eosdem circulos ABC, DEF esse duas laminas æreas, & sonoras eiusdem qualitatis, & æquabilitatis in materia. Quamnã eæ laminæ suspensæ è B, & E, ac æqualiter pulsatæ edent consonantiam? Iuxta prædicta ex hac 20 propos. quoniam sit quæstio, & comparatio superficierum circularium, non peripheriarum, edent consonantiam, non simplicem 1, ad 2 quæ inter diametros, sed duplicatam proportionis diametrorum, nempe eam, quæ in diuisione lineæ harmonicæ est 1 ad 4, & appellatur disdiapason, suauis inter acutas. Si æquales, & cætera pares sonoræ superficies, seu laminæ vnisonæ sunt, pro-

profectò quartà parte altera facta minor quartam è primis consonã-tium edet. Vt ex dictis etiam sensus aurium distinguat proportionem simplicem diametrorum, & peripheriarum à proportione duplicatà circulorum &c

2 In proximè antecedenti problemate progressio quæstionis facta est à diametris, & peripherijs, quarum altera sit dupla alterius, & ex diapaso diametrorum, & peripheriarum itum est ad disdiapason circularium laminarum, quarum altera, iuxta hanc 20 propos. est alterius quadrupla.

Duarũ laminarũ arearum circulariũ in dupla proportione diametri, & peripheriæ sunt dissonæ.

At hic ego nunc contrariâ ratione, datâ circulari lamina alterius duplà, & cum alterà reddente consonantiam diapason, quæro, eorum circulorum peripheriæ quam inter se proportionem habebunt, & in qua erunt inter se consonantia? Affirmo earum peripheriarum consonantiam nullam futuram, quia non habent proportionem inter se rationalem Vide nos in Apiar. 10, progym. 2 quæst. 3. Quoniã enim, cõstituto isoscele rectãgulo, circulus diametri, siue lateris, quod opponitur angulo recto, est duplus vtriuslibet circuli descripti circa vtrũlibet laterum constituentium angulum rectum, iuxta ea quæ ad finem prop. 47. lib. 1. demonstrauimus; atq; vt diametri sunt inter se, sic & peripheriæ; diameter autem, siue basis trianguli isoscelis rectanguli, est incommensu[illegible]tium angulum rectum, iuxta 0 15 ad 47 propos. lib. 1, & iuxta alibi à nobis circa hoc probata; ideo & peripheria circuli, qui sit alterius duplus, &c. est incommensurabilis cum peripheria circuli subdupli; ac proinde non consonantes sunt eæ peripheriæ. Vide nostra in fine proposit. 47. lib 1. & alicui figuræ ibi hæc applica, vt apertiora videas.

Cõsonãtias oculis percipere.

3 Ex antedictis disce modum cognoscendi, etiam sine auditu, quas consonantias edituræ sint propositæ alquæ etiam extra circularem figuram, similes, ac sonoræ laminæ. Acceptà enim quantitate, ac proportione laterum homologorum, & duplicatà, pronuntiabis iuxta eam, (seruatis tamen cæteris paribus in vtraq; lamina, &c.) eaendas consonantias, pro variâ earum specie, diuisione, ac numero in harmonicæ lineæ diuisione apud nos in citatis ad 10 propos. huius, & in Ap. 10, seruatâ figurarum similitudine. Pariter iuxta diametrorum duplicatas proportiones, laminas augebis, aut imminues, atq; instrues tibi ex hac 20 proposit. copiosam, & demonstratam harmoniã.

Fistulas pro varijs consonantijs geometricè aptare.

4 Quam prædictis modis etiam efficies augendo, vel imminuendo ora circularia fistularum iuxta proportionẽ diametrorũ duplicatã, ad aquas pro lubita proportione effundendas è fontibus ad harmoniam hydraulicam, dum proportionatis quantitatibus cadunt lymphæ;

phæ; iuxta inuenta in Ap.nostro 10.progym.2.prop.3.

At vero viri militares pro cognoscenda proportione, quam habēt, aut ad quam fusili arte augenda, vel minuenda sunt ora bombardarũ maiorum, vel minorum, non egent duplicatà, sed simplici proportione diametrorum, iuxta quam sunt & inter se peripheriæ concauæ in oribus earum militarium machinarum. *Tormēta bellica pro variâ proportione geometricè conflare.*

§.XIII.

COROLLARIVM VIII-

— Vniuersale ad 2 propos. lib. 12 Eucl.

DVm Geometra demonstrat circulos esse in proportione quadratorum ex diametris, & non solum quadrata ex diametris, sed etiam qualibet rectilineæ figuræ similes, similiterq; super diametris excitatæ duplicatam habeant proportionem laterum homologorum, iuxta hanc 20. prop huius lib.6, an non ex 2 prop.lib. 12. rectè etiam inferas circulos habere inter se proportionem, non solum quadratorum ex diametris, sed etiam similium rectilineorum super diametris? nempe duplicatam diametrorum.

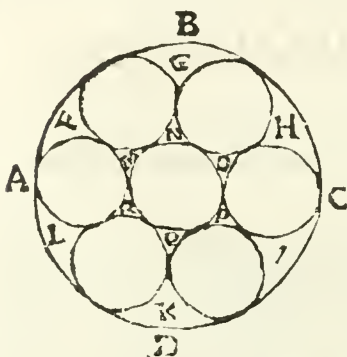
§XIV.

THEOREMA II.

Intra figuram rectilineam, vel circulum descriptis minoribus, & inter se se æqualibus quotcunq; capere potest, similibus rectilineis, vel circulis, facilè, ac demonstratiuè cognoscere quot rectilineis, vel circulis minoribus ęqualia sint spatia quantumuis irregularia ab ip-

sis rectilineis, vel circulis minoribus non occupata.

EXemplum esto in circulis, a quibus fit vt spatia non occupata sint quam maximè irregularia, & sub curuis concauis, & conuexis lineis, & angulis mixtis comprehensa, ideo apparenter difficiliora ad certam eorum mensuram. Esto circulus ABCD, & diuisa diametro AC, verb. gr. in tres partes æquales, semidiametro vnius sextæ partis descripti sint circelli minores, quorum tres, se mutuo, & peripheriam maioris circuli cõtingentes, occupabunt diametri A C longitudinem, reliqui verò infra, & supra diametrum mutuis cõtactibus inter se, & cum reliquis, & cum maiore circulo bini erunt; atq; omnes in dato exẽplo trifariatæ diametri, erunt 7 circelli inter se æquales, nec plures integros in ijs contactibus capit ambitus circuli maioris Quero ex te, mi Tyro, spatia curuilinea nõ occupata à circulis minoribus, atque inter eos, & ambitum maioris circuli intercepta (qualia sunt F, G, H, I, K, L & M, N, O, P, Q, R) quot circulis minoribus sunt æqualia? Hæres? Ego verò affirmo esse omnia illa curuilinea spatia æqualia duobus circellis minoribus intra maiorẽ descriptis, in exemplo hìc dato proportionis diametrorum 1 ad 3. Ac faciliè ab antecedentibus, & ex hac 20 prop. huius lib. 6 demonstratur.



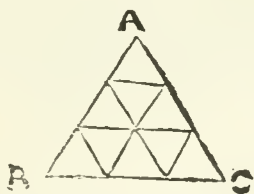
Quoniam enim etiam circuli sunt in duplicata proportione suarum diametrorum, & diameter circelli cuiuslibet in nostro exemplo ad diametrũ circuli maioris est vt 1 ad 3; si duplicetur proportio, fiatq; 1, 3, 9, erit proportio vnius circelli ad maiorem, vt 1 ad 9. Ergo circulus maior aream habebit æqualem 9 circellis minoribus. At inscripti circelli, iuxta conditiones constructionis, sunt tantùm septem; ergo reliqua spatia in maiore circulo à circellis non occupata sunt reliquum areæ ad complimentum 9 circellorum, quibus ea est æqualis, ergo sunt æqualia ea spatia duobus circellis. Quod erat demonstrandũ.

Simili ratione geometricè philosophandum erit in omni alia propor-

portione datà diametrorum; simili, inquam, non eàdem. Sed pro varia diametrorũ proportione, à qua variatur numerus inscriptorum integrorum minorum circulorum mutuò se, ac maiorem circulum contingentium.

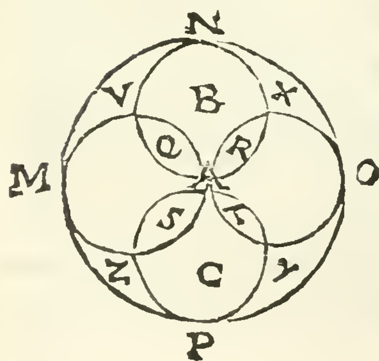
Simili etiã ratione demõstrabitur de quacunq; rectilineà figurà, intra quã ad datã laterum homologorum proportionem inscribentur figuræ similes minores inter se æquales, quæ habebunt aliqua latera cõmunia, seu congruentia tam inter se, quàm cum latere maioris rectilinei, tamen aliquando, propter varietatem figurarum aliquarum spatium planè totum non implentium se totis, ac integris, ac relinquent aliquas intercapedines. Quæ semper erunt æquales tot minoribus rectilineis, quot desunt numero ex proportione duplicata laterum homologorum.

Aliquando, dixi, non semper, quia sunt aliquæ figuræ similes, quarum minores maioribus inscriptæ, (siue maiores per minores diuisæ) totum spatium maioris figuræ absumunt, nec quidquam superest intercepti, vel intercisi inter integras minores inscriptas, & inter maiorem. Reuise nos de triplici genere angulorum, & figurarum spatium per se implentium ad prop. 15. lib. 6. Eucl. & in Ap. 1 prælib. 1.

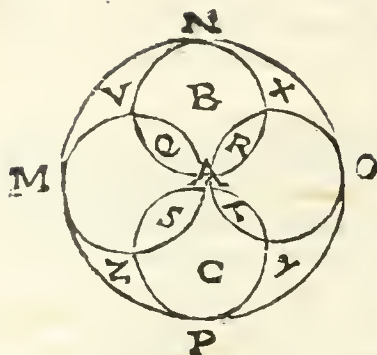


Vide hìc exemplum in triãgulo æquilatero ABC, in quo 9 minora æquilatera implent aream totam, factà proportione laterum 1 ad 3, & duplicatà 1 ad 9.

§. XV.
COROLLARIVM IX.



SI quis velit etiam inscribere, verbi gr. in circulo maiori MNOP omnes minores circulos, quibus area maioris æqualis est, circuli minores contingent quidem maiorem, se tamen eorũ aliqui mutuo secabunt. Vt vides in apposita figura, in qua proportio diametrorum est 1 ad 2, & duplicata fit 1 ad 4, hoc est, ex antedictis, maioris circuli



area est quadrupla minoris. Ex inscriptorum circulorum intersectionibus mutuis spatia Q, R, S, T bis occupantur ab æqualibus circulis, vacant verò, nec occupantur spatia V, X, Y, Z.

Facile erit Tyroni ex antedictis, & dicendis demõstrare curuilinea Q, R, S, T esse æqualia curuilineis V, X, Y, Z. Spatia enim vacãtia sunt ea, quę debentur circulis sectis, vt cõpleant maioris circuli totam aream, cui sunt æquales. Accipiantur bini integri circuli minores, verbigr. M V Q A Z, A X O Y, quorum alteruter cùm sit quarta pars maioris, ergo bini simul occupant dimidium maioris; reliquum dimidium areæ maioris erit sub duobus circulorum minorum segmẽtis B, C, & sub spatijs vacantibus V, X, Y, Z, & alterutrum segmentum; verbi gratia B, cum suis adiacẽtibus spatijs V, X ponetur conficere quartã partem areæ maioris circuli. Igitur circulus minor A N, hoc est segmentum B cum segmentis Q, R est quarta pars areæ circuli maioris; idem segmentum B cum spatijs vacantibus V, X positum est etiam quartam occupare partem areæ eiusdem circuli maioris, ergo, ablato communi segmento B, remanent æqualia inter se V, X, & Q, R.

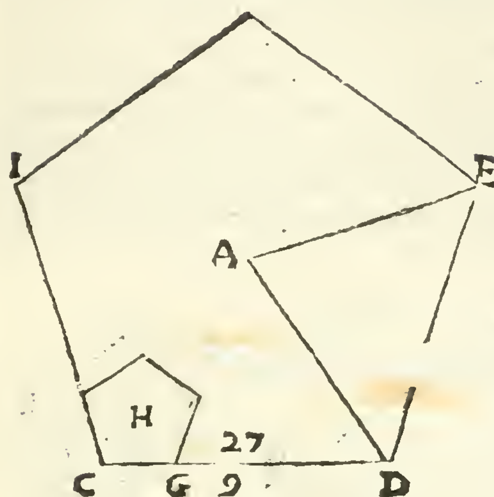
§. XVI.

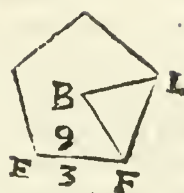
PARADOXVM I.

Quod est contra 20. propos. solutum de rectilineis cylogonijs, quæ non videntur habere inter se proportionem duplicatam homologorũ laterũ. Atq; inde alia paradoxa soluta.

1 *OPponat fortasse quispiam Geometricarum veritatum non superficiarius perscrutator: Cilogonię, siue cauiangulæ figuræ rectilineæ quemadmodum apud nos inuexerunt*

runt



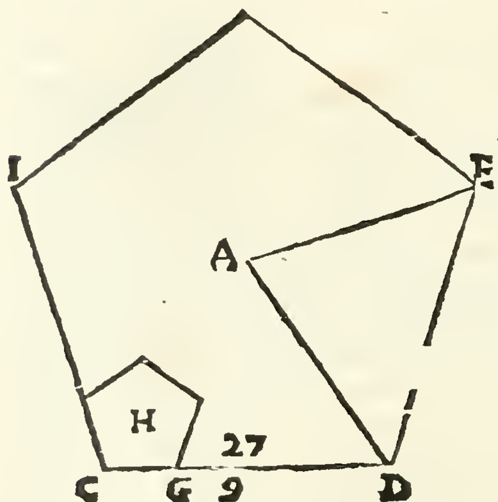


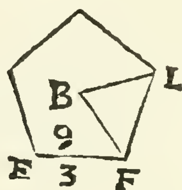
runt alia noua paradoxa in Geometricā Philosophiam, (vt habes in Apiar. 3. & in tom. I. huius Aerarij varijs in locis) an non & in hanc 20 prop Eucl. inuehunt hoc paradoxum, quòd cylogonia rectilinea eximunt se ab huiusce propos. 20. sanctione, nec habent laterum homologorum duplicatam proportionem inter se, licet similia sint, similiterque descripta? Patet paradoxum in apposita figura. Nam in vtroq; pentagono rectilineo A, B, quasi vno latere introrsum infracto, siue ductis duabus à punctis D, E, F, L (angulos æquales facientibus in A, & B cauos externos) atq; ablatis lateribus DE, FL, vides rectilineum vtrumq; A, B constitutum super ijsdem lateribus CD, EF, quę tamen rectilinea cùm imminuta sint quantitate vtràq; comprehensà sub D A E, & sub F B L, non possunt habere inter se eandem proportionem, quam antea habebant sub lateribus DE, FL. Sub quibus, ac reliquis lateribus quoniam ex hac 20 propos. comprehendunt quantitates, siue areas habentes inter se proportionem duplicatam rectarum CD, EF, ideo, imminutis areis, an non habent inter se proportionem minorem duplicatà laterum?

2 Atq; hinc alia consequentur paradoxa. Scilicet, quam proportionem habeant cylogonia similia rectilinea scire non licebit per inuentionem tertiæ proportionalis; nec ope eiusdem tertiæ inuestigare, licebit quot rectilinea minora similia contineantur in maiore; nec pariter licebit cigolonia rectilinea augere, vel imminuere secundùm datam proportionem mediæ proportionalis, &c. Neq; enim, vt prædixi, cilogonia rectilinea sequuntur proportiones laterum secundum mediam, vel tertiam proportionalem, sed deficiunt ab ijs proportionibus, propter imminutas areas; &c. vt prædictum est.

3 Op-

3 *Oppositioni debeo, & affero non solum responsionem, sed etiam occasionem luculentioris veritatis, & doctrinæ in hac propos. 20 latentis, quæ (sine exceptione monstruosarum figurarum cauiangularum) planè vniuersalissima est de omnibus figuris planis, & rectilineis similibus, similiterq; descriptis, quarum mutua proportio in areis est duplicata laterum homologorũ. Cùm ergo cauiangulæ planæ figuræ sint rectilineæ, si etiam sint similes, similiterq; descriptæ etiam ipsæ comprehenduntur lege geometrica duplicatæ proportionis laterum homologorum.*





4 *At enim eadẽ latera sunt CD, EF, & imminutæ sunt areæ, ablatis triangulis DAE, FBL, quomodo ergo minores, siue imminutæ areæ possunt habere eandem laterum non minutorum proportionem? Quidni, mi Tyro? An non duæ rectæ, vel duo numeri, quorũ est, v. g. proportio quadrupla in maioribus numeris, vel in palmis, imminui tamen possunt intra terminos eiusdem proportionis? V. g. imminutis proportione lineis, habent eæ inter se quadruplam proportionem digitalem, sicut antea habebant quadruplam palmarem. Pari modo cilogonia rectilinea, modò sint, ex præscripto huius 20 proposit. similia, similiterq; descripta, etiam ex vi eiusdem 20 prop. habebunt duplicatam laterum proportionem.*

Quemadmodum è duplicatà laterum CG, CD proportione, demonstratum est contineri in pentagono A sexdecim pentagona minuscula H, sic, eodem pentagono A facto cauiangulo per ablationem triãguli DAE, si pentagonum H minusculum simili ratione efficias cauiãgulum, atq; imminuas triangulo minusculo, quod sit simile ablato maiori DAE, continebũtur in pẽtagono cylonogonio maiori pariter 16 pen-

pẽtagona cylogonia minuſcula ex vi demõſtrationis in hac 20 prop.

4 *Hinc facilis eſt ſolutio reliquorum paradoxorum in oppoſitionibus ſub num. 2 huius paragraphi. Nituntur enim illa omnia eà hallucinatione, quam iam ſoluimus, ac proinde negantur omnes illæ illationes. Itaq; etiam licebit ſcire quam proportionem habeant data duo cylogonia rectilinea, per inuentionem tertiæ proportionalis, & imminuentur, vel augebuntur per mediam proportionalem eodem prorſus modo, quo reliqua rectilinea non cylogonia. Quare propoſitio hæc 20 ſibi conſtat etiam in rectilineis cylogonijs ſimilibus. &c.*

§. XVIII.

PARADOXVM II.

Rectilinea, & circuli, quorum proportio duplicata laterum, vel diametrorum cognita eſt, ac neſcitur. Et alia paradoxa.

S*I cognita eſt duplicata laterum proportio, quomodo neſcitur? Ideo paradoxum eſt, mi Tyro: lege, ac intellige ſequentia. Huic paradoxo anſam, & veram cauſam præbet doctum ſcholion antiquum in fine li. 10 Elem. & in exemplaribus græcis; quod etiam apud Zambertum, Campanum, Commandinum, & Clauium extat. Cuius quidem ſcholij prima pars ex verſione Commandini ſic habet*: Inuentis longitudine incommenſurabilibus rectis lineis A, B, inuenientur & aliæ quamplurimæ magnitudines ex duabus dimenſionibus, nimirum ſuperficies incommenſurabiles inter ſe ſe. Si enim ipſarum A, B mediam proportionalem ſumamus rectam lineam C, erit vt A ad B, ita figura, quæ fit ex A ad eam, quæ ex C ſimilem, ſimiliterq; deſcriptam; ſiue quadrata, ſiue alia rectilinea ſimilia, ſiue circuli, qui circa diametros A, C deſcribantur, quandoquidem circuli inter ſe ſunt vt diametrorum quadrata. Inuenta igitur ſunt ſpatia plana inter ſe incommenſurabilia.

A ————————
C ——————
B ————

Itaq; rectilinea ſimilia, &c. quæ ſunt deſcripta ſuper lineis incommenſurabilibus, (quarum plura genera apud Eucl lib. 10) erunt & ipſa inter ſe areis incommenſurabilia, id eſt quorum areas nulla communis menſura metiri poterit, iuxta defin. 2. lib. 10; proportionem

tamen

tamen habebunt duplicatam laterum homologorum ex vi huius 20 *propos. At quoniam ea proportio est irrationalis, quæ in partium numeris nec exhiberi, nec agnosci potest, ideo constat sibi veritas propositi à nobis paradoxi de rectilineis, quorum proportio duplicata laterum cognita est, ac nescitur. Quare nec sciri poterit quam inter se proportionem habeant data duo similia rectilinea, quorum alterum, exempli gratia, sit excitatum super diametro alicuius quadrati, alterum vero super vno laterum eiusdem quadrati, licet, inuentà tertià proportionali ipsis diametro, & lateri quadrati, sciatur rectilinea ea duo habere inter se proportionem, quæ est lateris quadrati, tamquam primæ lineæ proportionalis ad tertiam inuentam.*

Ratio ex antedictis est quia proportio inter eas lineas, licet sit primæ ad tertiam duplicata, est tamen in partium numero ignota, quia irrationalis, ideoq; & proportio rectilineorum super primà, & secundà similium licet sciatur esse duplicata, tamen ignota erit, quia & ipsa rectilinea sunt incommensurabilia, idest habent proportionē ignotam in numeris partium. &c.

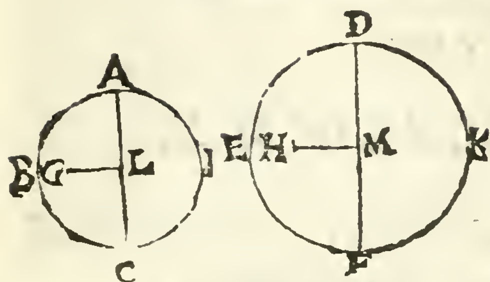
Paria intellige de circulis, quorum diametri sint lineæ incommēsurabiles.

§. XVIII.

THEOREMA III.

Sphæræ habent inter se proportionem triplicatam semidiametrorum demostratam ex vsu geometrico centri grauitatis.

ELeuemus huius 20 *propos. duplicatam, & producamus etiam ad triplicatam in exēplo luculento. Pro quo suppono in semicirculari plano inuentionem centri grauitatis, pro qua vide schol. in seq. Itaque quod ad propositum theorema pertinet, finge semicirculos ABC, DEF, inuentis eorum centris grauitatis in G, H, circulariter rotari circà diametros AC, DF, & factas esse geminas sphæras BI, EK; dico eas habere inter se proportionem triplicatam semidiametrorum. Quoniam enim sphericæ soliditatis quantitates constantur ex ductu semicirculorum ABC, DEF in peripe-*



pherias signatas à centris grauitatis G, H in rotatione semicirculorũ circa diametros, habebunt sphæræ BI, EK inter se proportionẽ & semicirculorum, & peripheriarum signatarũ à centris grauitatis. At proportio semicirculorum per § 8, & 10 ad hanc propos. 20. Eucl est duplicata semidiametrorũ (& proportio peripheriarũ à centris grauitatis est vt earum semidiametri GL, HM) ergo additâ hâc tertiâ semidiametrorum GL, HM proportione duabus, siue duplicatæ proportioni semidiametrorum in semicirculis, conflatur proportio triplicata semidiametrorum, quæ est inter soliditates vtriusq; sphæræ BI, EK; quod erat demonstrandum.

SCHOLION VI.

Ad facilitatem praxis pro anteced. theor. & de quadratura circuli e centro grauitatis in semicirculo.

NE alibi à nobis dicta hìc iterentur, ac vt ad praxim scias necessaria pro antecedenti theoremate, accipe sequentia indicata. Scilicet vt scias ipsos ambitus rotationũ à cẽtris grauitatis G, H, scire opus est vbi nã in semicirculis ACB, DFE sint centra grauitatis G, H, vnde procedunt rotationum semidiametri, hoc est quantitates ipsarum LG, HM. Quam ad rem vide indicata apud nos in Analectis ad quartam editionem nostrorum Apiariorum in analect. 7. nu. 3, vbi de conflatione, & dimensione sphæricæ soliditatis. Ac præterea quomodo quadratura circuli prodeat ab inuentione centri grauitatis in semicirculo, vide ibid. Analectum 6.

§.XIX.

COROLLARIVM X.

Euclidis 13 propositio lib. 12 ex antecedenti theoremate demonstrata.

Congruit veritas antecedentis theorematis de triplicatà proportione semidiametrorū inter sphæras demonstratà ex vsu geometrico centri grauitatis, cum 18 propos. lib. 12 Euclidis, quæ est de triplicatà proportione diametrorum inter sphæras Vt enim semidiametri apud nos, sic diametri apud Euclidem. Ac, quod pretium fuit operæ, id, quod Euclides prolixà, & indirectà demonstratione prosequitur, nos breuissimà, & facillimà sumus assecuti.

SCHOLION.

Potest etiam formari propositio sic. Sphæræ habent inter se proportionem triplicatam peripheriæ circuli maximi. Vt enim semidiametrorum, vel diametrorum proportiones, sic & peripheriarum ab ipsis descriptarum. &c.

§XX.

COROLLARIVM XI.

Sphæræ inter se sunt vt à diametris cubi.

Vemadmodum circuli inter se sunt vt diametrorum quadrata, idest in duplicata proportione laterum & c. sic, quoniam similia solida parallelepipeda (qualia sunt & cubica)

ca) inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum, per demonstrata facillimè ex eorum ortu à nobis in sect. 1. Breuiarij stereometici, in fine huius 2. to. & per propos. 33. li. 11. Eucl. Ergo dum sphæræ, per demonstrata in anteced. habent proportionem triplicatam diametrorum, habent eandem cum proportione cuborum à diametris. Vides apud nos consonantiam 2 propos. lib. 12 cum vltimà, idest 18 eiusdem libri. Potes & huc aduocare proposit. 12. eiusdem lib 12, de triplicata ratione diametrorum in basibus inter similes cylindros, & conos. &c. Vide citat. Breu Stereom.

§. XXI.

COROLLARIVM XII.

Dimensiones facillimæ solidorum ex antedictis, Auctiones, &c.

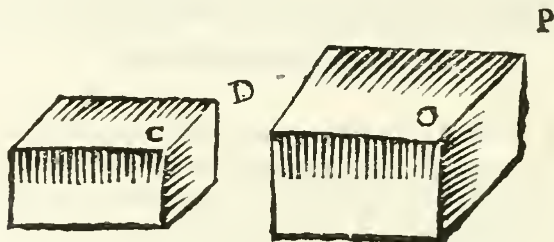
AD finem li. 2, & 3 in 3. parte huius Aerarij, & in Breuiar. stereom. docebimus in aliquibus exemplis facillimam dimensionem superficierum, etiam curuarum, & soliditatum corporum rotundorum ex vsu geometrico centri grauitatis. Hic tantum indico ex demonstratis ad 14, 15, ad hanc 20, & inferius ad 23, § 16, 17, 18, 19, 20 elici posse dimensiones superficierum, & soliditatum conicarum, cylindricarum, sphæricarum; scilicet habitis quantitatibus per numeros tam linearum, quàm superficierum, quæ rotantur, & peripheriarum rotationis à centro grauitatis, ex quibus conflantur superficies, & soliditates illæ, vt habes in demonstrationibus à centro grauitatis. &c. Ex antedictis etiam deduci possunt auctiones, iminutiones solidorum, &c. de quibus vide nos in fine hu. 2 To. in Breuiar. Stereometrico.

§. XXII.

PARADOXVM III, & Corollarium 13 machinarium, & militare, scilicet —

Solidi, sphæræ, vel parallelep. propter molem vel nimiam grauitationem imponderabilis, occultam grauitatem geometricè, sine mechanica ponderatione, prodere ex hac 20 propos.

Finge vel sphæram immensæ molis, vel materiæ grauitantis vltra facilem vsum machinarum grauia attollentium, vel finge alicuiuscunque figuræ sub planis parallelis solidum, cuius vnum saltem latus rectilineum metiri liceat. Ponamus pro Tyronibus, & pro exemplo faciliori, parallelepipedum O, quod finge vel mole, vel materiâ esse tuis saltem viribus imponderabile. Qui fiat vt geometricè, ac demonstratiuè ex hac 20 propos. sine pon-



deratione, noris quantum ponderet O? Audi: Effinge tibi minusculum solidum aliud simile C, deinde accipe proportionem laterum homologorum CD, OP, finge duplam 1 ad 2: ea proportio dupla fiat triplicata, seu triplicetur, sintque quatuor termini proportionis duplæ triplicatę sic 1, 2, 4, 8. Quoniam omnia parallelepipeda similia. (Vide in sect. 3. B. eu Stereom.) sunt inter se in triplicata proportione laterũ homologorũ, pariter erunt non solũ quãtitates sub ijs figuris, sed & põdera quantitatũ in ijs physicarum in triplicatâ proportione. Igitur parallelepipedo C ponderante, verb. gr. vnam libram, inde disces parallelepipedum O ponderaturum libras 8. Si fuerit proportio tripla 1, 3, 9, 27, ponderabit O 27, ex cognito 1 in C. Talique modo in qualibet alia proportione triplicata infiniti numeri, & grauitatis circa quæcunq; alia solida similia parallelep. &c.

Atque

Atq; hinc habes quanã arte geometricà, ex vnius solidi parallelep. ponderati vnico homologo accepto latere, discas pondera etiam aliorũ numero infinitorum solidorum similium, &c. sine eorum mechanicà ponderatione, seruatis tamen semper cæteris paribus in materia.

Ex vnico solido scire põdera omnium similium solidorũ.

Ex antecedentibus patet ars scientifica geometricè inueniendi quãtum materiæ sit opus pro conflanda pila ærea, quę apta sit datę bombardæ. Nam acceptà diametro concaui oris bombardæ, & comparatà cum alià diametro æreà pilæ, si lubeat, minusculæ, earum diametrorum proportio triplicanda est, dabitque numerum ponderationis materiæ (respectu ponderis pilæ minoris) pro maiore pila necessariæ. Tanti ergo ponderis accipiatur materia, & ex ea conflet ur pila ęrea, quæ erit apta bombardæ datæ.

Nota pro militaribus.

Vide & de triplicata proportione aliorum aliquot similium solidorum, in sect. 1. Breu. Stereom.

§. XXIII.
COROLLARIVM XIV.

De physica demonstratione è sonis, & ponderãtijs pro circulorum, & similium planorum duplicatà, & sphærarum à diametris, & similium aliquorum solidorum ab homologis lateribus triplicatà proportione.

1 *ETiam sine venia anticipationis habes, mi Tyro, ab antedictis v de tibi physicè interim constet ab effectibus, & experimentis nunquam fallentibus (modo cætera semper paria seruentur in materijs) circulos habere inter se duplicatam diametrorum proportionem, scilicet a consonantijs in duplicata diametrorum proportione editis, &c. vt docuimus in § 8, sphæras verò habere inter se triplicatam diametrorum proportionem ex earũ grauitationibus, quæ se produnt in triplicata diametrorũ proportione. Quemadmodũ & alia aliqua solida similia grauitant in triplicata laterũ homologorũ proport. de quibus vide in sec. 1 Breu. Stereom.*

Quinimmo in circulorum diametris, peripherijs & areis ponderatio ipsa congruet cum proportionibus geometricis. Nam vt lignea, si-

ne ærea diameter alterius dupla ponderabit duplo pondere, quàm alterius, sic & duplæ diametri ærea peripheria duplo erit ponderosior, quàm peripheria ex dimidia diametro. Aereæ verò laminæ circularis area ex dupla diametro ponderabit quadruplo magis, quàm superficies ærea circularis ex dimidià diametro, seruatâ semper, (vt iam non semel dixi) paritate in crassitie, æqualitate, qualitate materiæ, ac cæteris alijs ad castigatum experimentum necessarijs. Quod dictum est de sonoris, & ponderosis circulis, idem intellige etiam de similibus cuiuscunq; figuræ planis sonoris, & ponderosis.

Coniectura vnde innotuerit proportiones planarũ, & solidarũ inter se figurarũ.

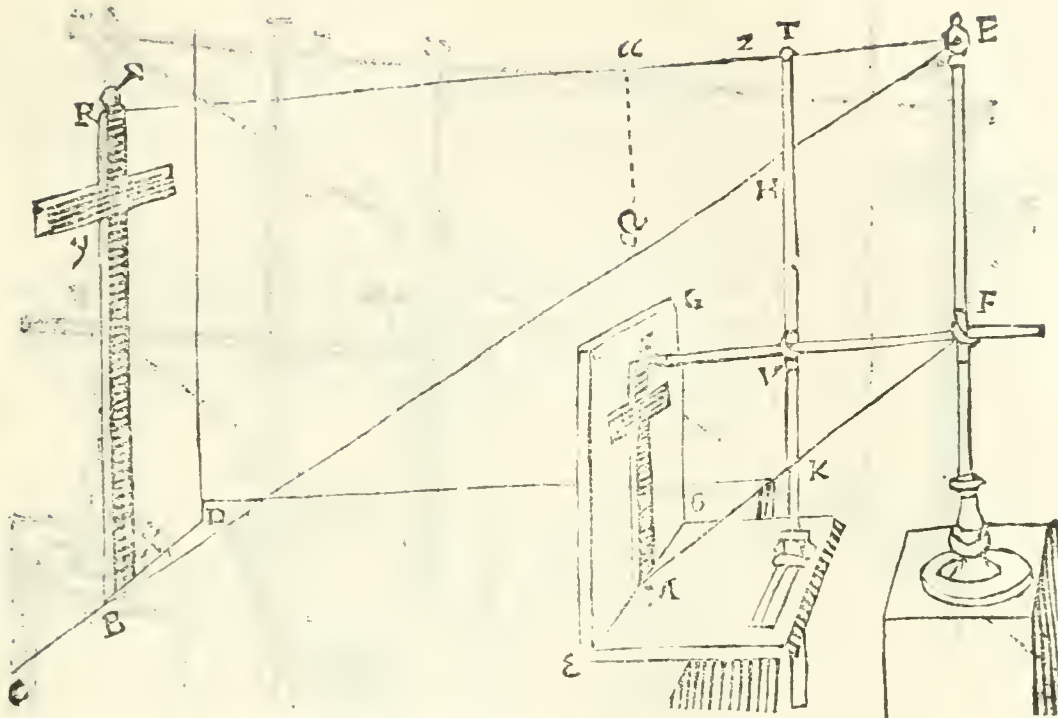
3 Ac quis scit an veteres philosophi Geometræ aliquam occasionem habuerint ab ijs experimentis, & effectibus physicis inuestigandi eas diametrorum duplicatas, & triplicatas proportiones? Vnde enim venerint in cognitionem arcanarum earum proportionum in similibus figuris planis, & solidis circa quantitatem, nisi ex aliquibus qualitatibus physicam quantitatem consectantibus? &c.

§. XXIV.

VSVS scenographicus propos. 20. in picturà scientificà, nempe —

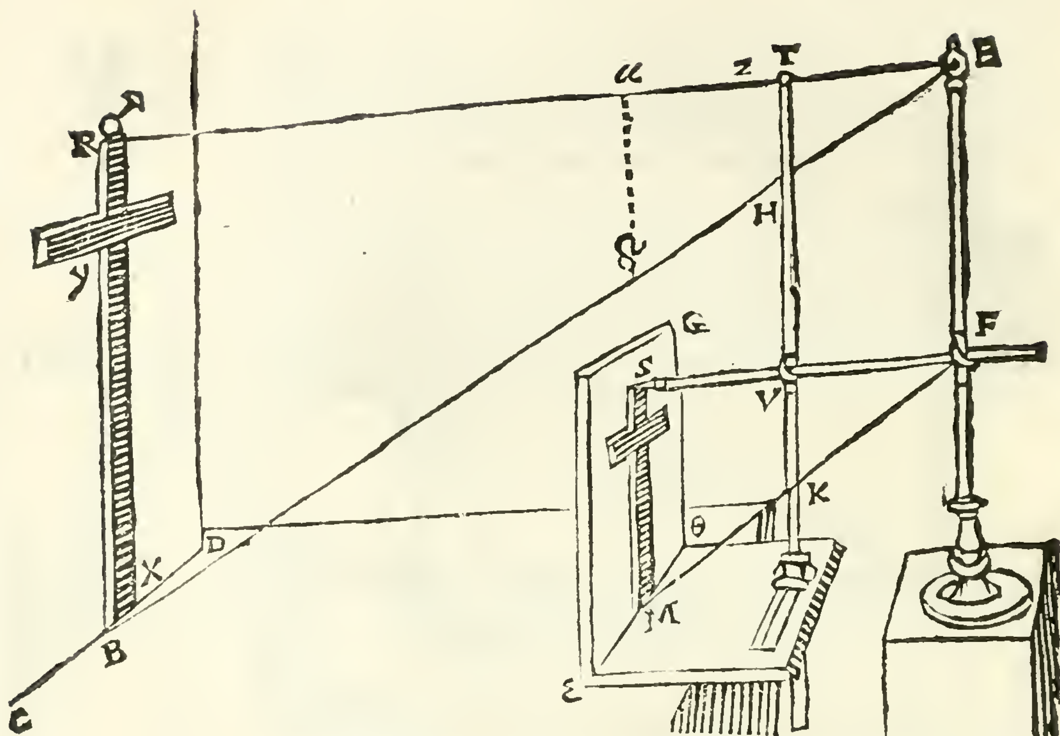
— Dato prototypo etiam procul posito, & inaccesso similem imaginem in data proportione delineare.

AD eam partem Philosophiæ Opticæ, quæ Scenographice appellatur, quæque philosophatur circa obiectorum visiones in distantia determinatà, & moderatà, pertinet ars pingendi, quæ tamen scientificè transferat prototypa in similes imagines. In ea scientificà picturà problema hic a nobis propositum non paucos torsit, ac pro planè arcano habitum est. Nos tamen huic arcano aditum satis apertum (a nemine tamen, quem viderimus hactenus reseratum) arbitramur ab hac 20 propos. Euclid. Data sit in pauimento horizontali (nos in figura vtimur rectà imaginarià visuali ER parallelà horizonti, & quod de ER dicimus, intellige de



de horizontali linea) distantia ER à prototypo RB. Libitum sit delineare crucem minorem SM similem, similiterque positam maiori cruci RB in ea proportione, vt SM sit quadruplo minor quam RB. Fiat dimensio in pauimento distantiæ ER, ac, si quidem etiam sit innaccessa distantia, per modum aliquem geometricum è nostris in Apiar. 2, vel ad 4 propos. huius in paradoxo nostro, & § 21. Acceptæ deinde distantiæ ER quarta pars notetur, verbi gr. in Z Mox inter ER, EZ accipiatur media proportionalis E α. Si ad distantiam Eα collocaris tabellam pictoriam prototypo RB parallelam, atque in ea tabella delinearis crucem minorem SM (ea arte scenographica, & geometricè opticà, quam explicamus in vsu hastarum FE, FS, TK, &c. in Apiar. nostro 5) affirmo delineatam SM esse quadruplo minorem, quam RB. In Apiar. cit. 5 demonstramus æquiangula, & æqualia esse triangula Eαδ, FSM, ac proinde quæ de E α δ pronuntiantur, probant etiam de FSM.

Quo-



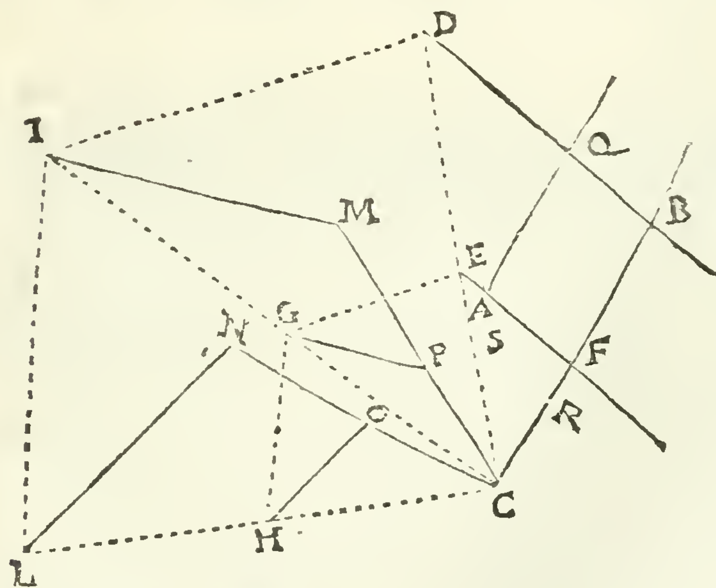
Quoniam igitur, imaginatâ aδ parallelâ prototypo RB, triangula Eaδ, ERB sunt æquiangula, & est vt Ea, ad aδ, ita ER ad RB, erit & permutādo vt Ea ad ER, ita aδ ad RB, at Ea est media inter quartam partem EZ, & inter totam ER, ergo & aδ erit media inter totam RB, & inter quartam eius partem. Vt ergo prima EZ ad tertiā, sic rectilineum super Ea secundâ ad rectilineum super ER tertiâ simile, similiterque descriptum, è 2 corollar. huius 20 propos. Pariq; atione permutatâ, rectilineum, siue crux delineata super aδ media, siue secunda, erit ad RB super tertia, vt est prima, idest quarta pars ipsius RB, ad totam RB; at prima, idest quarta pars ipsius RB, est quadruplo minor, quàm tertia RB, ergo & delineata forma super aδ erit quadruplo minor, quàm RB, hoc est crux SM æqualis (demonstrata in Apiar. 5) ipsi aδ, erit subquadrupla ipsius RB.

§ 25

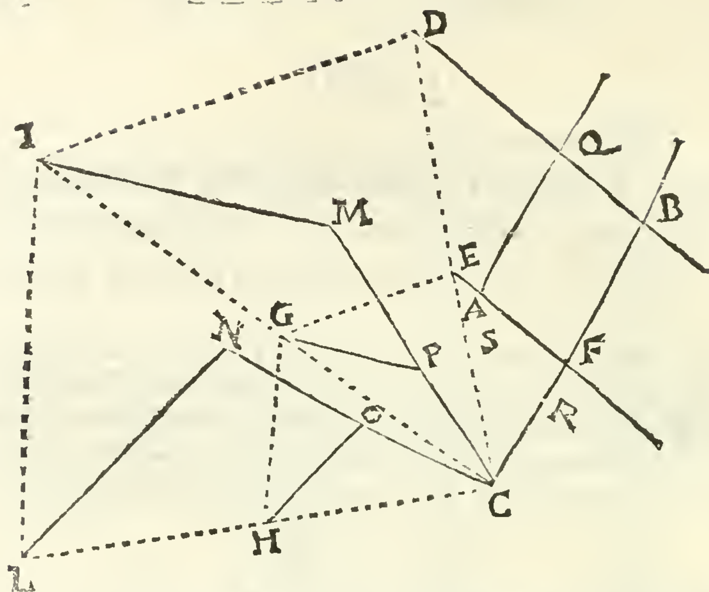
§ XXV.

Aliter, ac facilius idem problema pictoriũ absoluere ex 20 propos. quando prototypum, & imago delineanda sunt in eodem plano.

1 *SVppono ea, quæ habes in citat. Ap. 5, & in antecedentibus ad propos. 18 huius, § 4 de scenographici, siue pictorij instrumenti vsu, & formà pro traducendo prototypo in maiorem, vel minorem imaginem in eodem plano, in quo sint prototypum, & eius simulacrum, quod lineatur. Hìc instar parallelogrammi*



mi pictorij est figura geometrica AB, cuius hastæ geminæ DB, EF productiles, & fixè gyratiles sunt in Q, B, F, A, atq; etiam in C fixo, & gyratili in plano, vbi fit delineatio, iuxta plura, & expressa, quæ habes in cit. Ap. 5. vbi etiam in primis præcipitur vt semper in eadem recta sint D, E, & C, propter rationes ibi allatas, & propter neruum præcipuum hìc indicandæ demonstrationis.



Igitur ſi rectilineo CDIL ſit delineandum alterum minus CEGH in data proportione, verb. gr. quod ſit triplo minus dato maiore rectilineo, iubeatque minus intra maius deſcribere; fixo extremo haſtæ BC in C communi puncto, & angulo prototypi, & imaginis delineandæ, accipiantur in haſta BC tres partes æquales, ſitque vna tertiarum CR, accepta media proportionali inter CB, CR, (quam finge eſſe CF) ad F adducatur haſta EF parallela haſtæ DB, ſintq; E, D in recta cum C. Dico, collocato graphio in E, dum cuſpis in D percurrit latera maioris rectilinei DILC, à graphio in E delineari ſimile, ac triplo minus rectilineum EGHC.

Nam in triangulo CDB, propter EF parallelam baſi BD, eſt vt CF ad FB, ſic CE ad ED, per 2 propoſ. huius lib. 6. Atq; ideo, vt CF eſt media proportionalis inter totam CB, & inter CR æqualem vni tertiæ eiuſdem CB ſic & CE erit media proportionalis inter totam CD, & inter lineam æqualem vni tertiæ partis totius CD, quam finge, verb gratia, CS. Igitur rectilineum deſcriptum ſuper CE habebit ſe ad rectilineum ſuper CD, vt prima CS ad tertiam CD, per corollar. 2 huius propoſ. 20 Eucl. At CS eſt tertia pars ipſius CD, ergo rectilineum ſuper CE erit tertia pars maioris rectilinei ſuper CD.

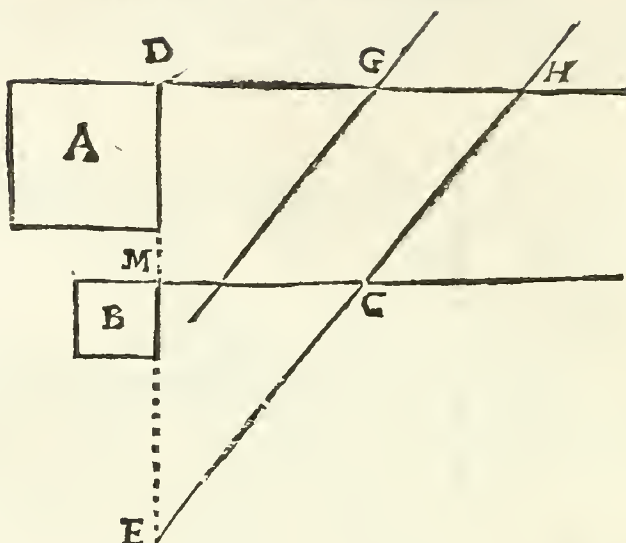
2 Hactenus ſi quando rectilineum minus deſcribatur ſuper parte communi lateris, quod ſit maioris rectilinei, in quo caſu expeditiſſi-

ma

ma est operatio, & perfacilis demonstratio. At quid agas si quando (quod fermè assolet) effigies in eodē plano cum prototypo delineanda est extra prototypum, in data tamen proportione ad prototypum? I i

exemplo geometrico duorum quadratorum A, B, sit instar prototypi, & imaginis maioris ipsum A, cui, pro simili similiterq; positâ effigie delineandâ, sit ipsum B, v.gr. triplo minus, quàm A delineandum. Fiat in parallelogrammi scenographici CG latere EH diuisio in C mediæ proportionalis inter 1, & 3 partes, &c. vt factum est in antecedentis figuræ latere ad F; & cuspis in D, & graphium in M, in eadem linea imaginariâ DE cum latere quadrati A, operationes suas peragent, quemadmodum in antecedenti figura. Eritq; B similis, & tertia pars ipsius A. In quo quidem vsu, & casu quoniam nihil ab ijs dictum est, qui plura alia (hoc, quod est præcipuum, omisso) commenti sunt circa instrumentum id scenographicum, ideo consultò hîc demonstrationem dissimulo casûs à me propositi, atq; operationis (vt vides in figura hic apposita) institutæ. Exerceant se saltem in excudenda demonstratione qui casum, & operationem dissimularunt. Quamquam ex antedictis, & demonstratis à nobis in duobus antecedentibus vsibus instrumenti cum perpendicularis, tum paralleli plano pictorio facile est idem hîc demōstrare de B subtriplo ipsius A, vt in antecedentibus est à nobis demonstratum ex hac 20 propos. Eucl.

Confer hanc secundam figuram cum prima, in qua cruces, & agnosce quæ ibi in diuersis planis, & perpendicularia sunt, hic esse in eo-



dem plano, & abiecta parallelas cum ijsdem angulis. A instar maioris crucis, B minoris in plano pictorio, non opposito, sed subiecto cruci maiori. Et instar radij visualis ipsa DH, quæ erat perpendicularis ad crucis maioris planum, hìc facta est parallela eidem plano. Sic CM instar graphij, non vt ibi perpendicularis, sed paralleli plano in quo B. &c.

§. XXVI.

SCHOLION VII.

Solutio dubitationis in figura, & exemplo crucis delineatæ.

AT enim, inquiet Tyro, in § 16 ad hanc 20 propos. Eucl. paradoxum attulisti de cylogonijs figuris, quæ deficiunt a demonstratione huius 20 propos. Cruces illæ sunt & ipsæ cauiangulæ, vt vides in Y, &c. Igitur etiam datis homologis lateribus B, & M, non inde potest inferri ipsam SM esse in subquadrupla proportione cum ipsa KB, vt demonstrasti de cæteris cauian-

riangulis similibus, &c. Respondeo. Acceptæ sunt rectæ RB, SM quasi continuata latera parallelogrammorum, itemque transuersa latera, &c. nec facta est illatio à lateribus homologis ad areas, quæ excedant terminos laterum parallelorum. In rectilineis verò cylogonijs verb. gr. in exemplo pentagonorum, § 16, à lateribus homologis illatio fiebat ad areas comprehensas lateribus non fractis, quæ tamen fracta in angulos intra figuram incauatos, imminuunt areas. &c.

Valet tamen demõst. ab hac 20. prop. ẽt in cylog. & hic. Relege § 16.

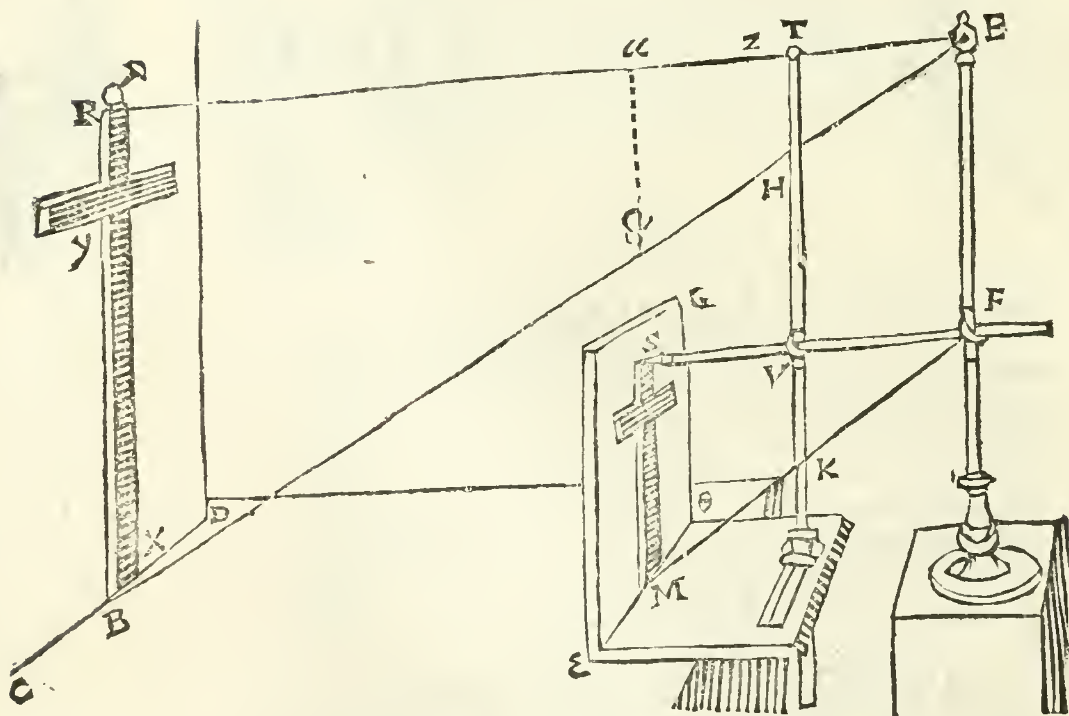
§. XXVII.

COROLLARIVM XV, ac eximium militare.

In

In delineatione geometricâ oppidi procul dissiti agnoscere veras mensuras mœniorum, turrium, & areæ totius oppidi prototypi, ad vsus magni momenti militares.

1 *Finge in apposita figura (sine multiplicatione non necessaria plurium nouarum figurarum) instar oppidi procul dissiti esse crucem maiorem, & instar oppidi delineati in tabellâ delineatoriâ εG esse crucem minorem. Accipe CD pro longitudine, seu latitudine partis oppositæ, cui similiter delineata sit εθ: finge ipsam BR pro turri, & pro ei simili delineatâ ipsam MS. &c.*



Igi-

Igitur si quispiam vir militaris vtens ritè nostro instrumento scenographico VE iuxta instructiones, & vsus, quos in Ap. 5 docuimus, & oppidi oppositi, ac procul dissiti hac arte, seu picturà scientificà geometricà formam minusculam delinearit in plano pictorio 9 G, facillimo negotio poterit in partibus & in tota forma minusculi oppidi agnoscere veras mensuras partium, & totius ambitus, & totius areæ oppidi prototypi.

2 *Nam in æquiangulis triangulis eandem habent inter se proportionem distantiæ ER, FS ad bases, idest ad prototypũ oppidum (pro quo hic stat BR) & ad effigiem MS; permutando vt distantia ER ad distantiam FS, ita bases, siue oppidum prototypum RB ad effigiem MS. Licet autem cognoscere distantias per modos a nobis positos in Ap. 2, & ad antecedentes hic propositiones 1, 4, 8, &c. Ergo in eisdem mensuris distantiarum dabuntur & mensuræ prototypi ex effigie. In exẽplo, ipsi passus distantiæ (finge in pauimento) ab E ad R (quibus passibus respondent totidem digitales mensuræ in FS) produnt in digitalibus mensuris ipsius SM mensuras passuum ipsius RB; ac si fingas RB pro turri, eius veram altitudinem habes in SM digitaliter dimensà. [S]ic mœniorum longitudinem CD in passibus habes ex ε9 notam per digitos. Ac vt partes oppidi tamquam bases maiorum triangulorum se habent ad partes formæ delineatæ tamquam bases minores triangulorum æquiangulorum, sic totus ambitus ad totum; ac proinde habebis in mensuris minusculis delineationis in tabella ε G totũ ambitum in [m]eris, & maioribus mensuris oppidi prototypi. Sic enim in altitudine turriculæ [S]M [h]abitur vera maioris, ac dissitæ RB; sic & mœniorum altitu[d]o. &c.*

3 *Q[u]ibus altitudinibus habitis habebit vir militaris sine periculoso access[u] ad hostilia mœnia, vnde prouideat, & instruat scalas aptæ longitudinis mœnibus inscendendis, iuxta ea quæ docuimus in Ap. 2, in fin prælogi[i] e vmbris, & ad 1[7] propos lib 1. Eucl. in tom 1 huius Aerarij. H[ab]ebit & vnde aptè sciat e[le]uare bellica tormenta ferienda turri eti[a]m non visa, &c. vt docuimus ad eandem 17 lib. 1.*

4 *At verò (quod propriè spectat ad hanc 20 prop. E[t]c) quì liceat aream scire opp[id]i prototypi? Facillimè ex dictis. Nam si, exempli gratia, dili[ge]nti per antecedenti quantitatem partis mœniorum CD, & illi homologam delineasti ε9 accipe in numeris mensurarum vtriusq; lateris CD, ε9 tertiam proportionalem, & quam proportionem habebit prima, verb. gr. CD ad tertiam post secundam ε9 eandem habebũt inter se proportionem areæ oppidi prototypi, & oppiduli delineati, per coroll. 2 huius propos. 20. Habent enim similia, similiterq; posita*

pro-

prototypum, & delineata effigies laterum homologorum duplicatam proportionem, per hanc 20 propos.

5 *Atq; hoc est quod in Apiar. 5 sub finem non tam apertè, vt hìc ediximus, quia hìc debebatur cognitioni, & vsui huius propositionis. Quamquam in corollarijs ex aranea nostra geometrizante innuimus hanc duplicatam proportionem. &c. In Ap. 5. satis nobis visum est è scenographici nostri instrumenti vsu indicare modum accipiendi è distantijs proportiones, & mensuras prototypi, & delineatæ figuræ, atq; etiam vtrorumq; ambitum. Quare, mi Tyro, caue alterum pro altero accipias, quemadmodum prædiximus in circulo aliam esse proportionem diametrorum ad circumferentias, aliam diametrorum ad areas, illa enim est simplex, hæc duplicata. Sic & hìc alia est proportio laterum, & partium ad totum ambitum, alia laterum ad areas; est enim hæc duplicata. &c. Fruere, mi Tyro, corollario isto nostro ex vsu huius propos. 20, quæ plurifariæ vtilitatis est in artibus pacatis, & bellicis.*

§.XXVIII.

Corollaria, & paradoxa eximia vniuersalia Astronomica indicata de cœlorum, & cœlestium sphærarum inter se, & cū terra proportionibus. &c. Ex antedictis ad hanc 20 propos. de duplicata, & triplicata, &c.

Elemēta Geometrica quēadmodum ad cælestia, & altissima scibilia eleuentur.

QVoniam, præter geometricas demonstrationes ex 12 lib. Elem. habes ex antedictis hìc etiam ab effectis euidentiam duplicatæ proportionis diametrorum in circulis, & triplicatæ in sphæris, vt dictum est in § 8, 18, 23 ex centro grauitatis in antecedentibus, ideo non erit alienum, aut extra scientiam, & condimentum pertinens ad hanc 20 propositionem saltem indicare quàm altè attollant animum ad cælestia cum admiratione cognoscenda geometricæ elementares propositiones. Itaque ex hac similium planarum figurarum duplicata proportione à lateribus homologis, & præcipuè à duplicata diametrorum in circulis, triplicata in sphæris proportione, (quæ orbiculatæ figuræ planæ,

ac

ac solidæ omnes sunt inter se similes) habes, o Tyro, unde tibi auferas admirationem, quam astronomicarum sublimitatum ignorantia rudioribus solet afferre, scilicet vndenam, & quanam è scientia humani ingenij industria comprehenderit amplitudines, & proportiones cœlestium circulorum, & globorum, quas Astronomi tam copiosè, & confidenter exponunt. Scilicet a figuris geometricis circulorum, & sphærarum, atq; ab earum proportionibus geometricè demonstratis. Nam vniuersè loquendo (paullo post exemplum aliquod peculiare afferam) quanto cælum aliud alio sit amplius norunt à proportione duplicatà diametrorum, siue distantiarum à terra ad singulos planetas, & astra. Quas distantias venati sunt varijs modis, quorum aliquos habes apud nos in Ap.8. Quanto verò Planeta quispiam, vel astrum sit alio maius, vel quanto sit terræ globo minus, aut maius demostratiuè agnoscunt e triplicata proportione diametrorum. Quas diametros didicerunt ijs modis, quorum aliquos habes etiam apud nos in cit. Ap.8.

Vndenam Astronomi norint cœlorum magnitudines, ac differentias. Vnde eorum à terris distantias. Vnde Planetarũ, ac terræ magnitudines, ac differentias.

Habitis igitur diametris cælorum, tamquam circulorum, (Planetarum, Astrorum, Terræ, tamquam sphærarum) geometricè deinde, iuxtà antedicta, demonstrant æquè, ac de geometricis figuris planis circulorum, de solidis sphærarum. &c. Duo saltem exempla indico, èaq; paradoxa vulgo.

§. XXIX.

THEOREMA IV, ac Astronomicum.

Circellus cæleſtis à ſtella polari circa mundi axem, & polum deſſignatus longè maior eſt circulo cœli ſolaris.

IVxta Clauij sententiam in cap. 1. sphæræ Sacroboschi, Stella polaris nostri poli arctici abest hoc æui à polo grad. ferè $3\frac{1}{2}$, & motu suo circa polum describit circellum, cuius diameter est 7 grad. Ille tamen oculis nostris appareas minimus circellus tantæ immensitatis est, vt non modo Sole ipso, sed etiam solaris cæli cir-

culo longe longe sit maior. Hoc astronomicum paradoxum demõstratur non sine vsu huius 20 propos. Eucl. ac suppositis ijs, quæ à nobis præmissa sunt in antecedentibus scholijs, & Applicationibus.

Nam diameter circuli, quem signat stella polaris motu suo diurno, & nocturno circa polum continet, ex citato Clauio, semidiametros terræ 5521, diameter verò circuli maximi solaris motùs continet semidiametros terræ 2432. Ac facillimũ quidẽ est nosse maioris diametri, nempe 5521 maiorem esse peripheriam, siue orbitam motùs circularis à stella polari signatam; atque in eadem proportione diametrorum orbitam cursus solaris esse minorem. At vero loquendo de circulis, & ethereis eorum superficiebus, quas orbita solaris, & orbita polaris astri comprehendunt, quæque centrum habent in axe mundi, quæro quanto maior est circulus ille polaris circulo cæli, siue motùs solaris? Reuise quæ habes ad anteced. prop. 19, §2, atque ibi agnosce non temerè esse positum illud exemplum numerorum, quorum alter pro polaris, alter pro solaris celi diametro est, nẽpe 2432, 5521. Quibus tertium numerum proportionalem appone 13244879. Tanto ergo maior est circulus ille polaris circulo cæli solaris, quãto maior est tertius numerus 13244879 numero primo 2432. Nam ex cit. 2. prop. 12. Eucl. circuli habent inter se proportionem quadratorum ex diametris, idest iuxta explicata in anteced & iuxta hanc 20 propos. Eucl. habent duplicatam proportionem diametrorum. Hoc autem paradoxum astronomicum (cui oculus videtur contradicere dum solaris ambitùs amplitudinem, & polaris circelli angustias contemplatur) hallucinationem sensuum corrigat ratiocinationibus petitis ab immensa syderum, & polaris stellæ distantià, ac longissimè maiori, quàm sit distantia Solis à terra, &c. Qua de re vide eos, qui astronomicas institutiones perscripserunt.

§.XXX.

THEOREMA V.
item Astronomicum.

Sphæra Solis (quæ terrà lunge minor oculis apparet) est maior terræ sphærà plusquam centies, & quadragies.

Re-

Recentiorum Astronomorum sententia est, iuxta inscriptionem huius § 30, in quam sententiam inducuntur ratiocinationibus probatis geometricè iuxta à nobis antedicta ad hanc 20 propos. Nam ex Apiar. 2 apud nos constat modus inueniendæ diametri terrenæ molis. Ex ijs, atque alijs modis Astronomi compererunt diametrum Solis ad diametrum terræ esse vt 5 $\frac{1}{5}$ ad 1, hoc est diametrum solis esse diametro terræ maiorem quinquies, & præterea vna quinta parte. Quoniam verò didicisti ab antedictis, etiā physicè ex grauitationibus sphærarum, sphæras habere inter se proportionem triplicatam diametrorum; triplicetur hæc proportio diametrorum 5 $\frac{1}{5}$, 1: facilitatis gratià transferatur in aptiores numeros eiusdem inter se proportionis, sitq; 26, 5, quibus in eadem proportione appositi duo alij numeri conficiunt hanc seriem proportionis 703, 135 $\frac{1}{2}$, 26, 5. erit igitur proportio corporis solaris ad terræglobum quæ est numeri primi ad quartum 703 ad 5, hoc est triplicata. At 5 in 703 continetur centies, & quadragies, & tribus quintis partibus, vt constat diuidenti numerum maiorem 703 per minorem 5, quotiens enim erit 140 $\frac{3}{5}$, Tyroni en schema operationis arithmeticæ.

2
703 (140 $\frac{3}{5}$
555

Ergo Solis sphæra terræ sphærà maior est centies quadragies, & tribus quintis terræ partibus; licet nobis è terra prospectantibus infinitis partibus terrà minor Sol videatur.

En, Tyro, quas alas ad tam sublimia, & arcana tibi commodat Geometrica Philosophia elementaribus suis propositionibus demonstratis.

§. XXXI.

SCHOLION VIII.

Figurarum transmutationes etiam ex hac 20 proposit.

QVæcunq; pertinent ad 25 propoſ. huius, ex eaq; fiunt, vel demonſtrantur, (exemplorum aliquorum gratià) figuras datas in quaſcunque alias æquales transformare; dato rectilineo cuiuſcunque figuræ æqualem circulum, vel dato circulo æquale cuiuſcunque figuræ rectilineum conſtituere; proportionalia rectilinea exhibere. &c. nos ſoluimus ope huius 20. Nã ſuper inuenta media proportionali inter latera datæ, & fictæ figurarũ in rectangula translatarum, figura ſimilis, per 18, factæ deſcribitur, èaque æqualis probatur datæ per 1, & hanc 20 propoſ. & iuxta nos, per 9 quinti. Itaque licet iure ſuo hæc propoſitio 20 videatur poſtulare a nobis hìc indicata in hoc ſcholio, & plura alia problemata (quorum copia, & aliorum antecedentium oſtendunt fæcunditatem, & vſus pene infinitos huius 20 propoſitionis) tamen ne hìc audiamus: Ohe, iam ſatis eſt, *cenſuimus reponenda ad 25 ea præcipue, quę ad transformationes geometricas pertinent; vt à vigeſimæ copia dicetur etiam 25 propoſitio.*

SCHOLION.

EX duplicata proportione, de quà in hac 20 propoſitione, habes vnde intelligas in libro 8 propoſitiones 11, & propoſitiones arithmeticas in ſcholijs poſt propoſitionem 10, vbi ac duplicata, triplicata, quadruplicata, & vlterius multiplicatis proportionibus in eodem genere inter numeros. Sed quod ibi aliter, licebit facilius oſtendere in exemplis expoſitis per ſimplices notas vulgatæ Logiſticæ.

Habes & lucem ad propoſ. 33 lib. 11, & ad prop. 8, 12, 18 l. 12.



Tro-

Propos. XXI. Theor. XV.

Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia.







SIt vtrumque rectilineorum A, B ipsi C simile. Dico & A ipsi B simile esse. Cum enim A ipsi C sit simile, erit & æquiangulum illi, habebitque latera circa æquales angulos proportionalia. Rursus cum B simile sit ipsi C, æquiãgulum illi erit, habebitque circa æquales angulos latera proportionalia. Vtrumq; ergo ipsorum A, B æquiangulum est ipsi C, & habet circa æquales angulos latera proportionalia: erunt ergo & A, B æquiangula, habebuntq; circa ęquales angulos latera proportionalia: similia ergo sunt. Quod oportuit demonstrare.

SCHOLION.

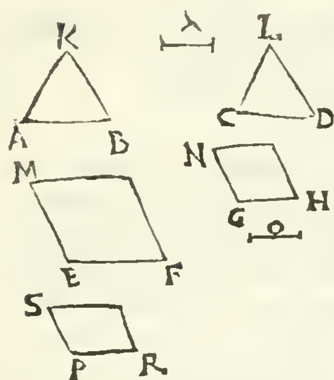
Imago per instrumentum nostrum scenographicum scientificè delineata, etiam prototypo simillima demõstratur ex hac 21 propos. Eucl.

HIc tantùm indico ad ornamentum, & vsum aliquem curiosum huius 21 proposit id, quod expressius habes in Apiar. 5, progym.

gym. 2. Aio MS omnino ſimilem, ſimiliterq; poſitam ipſi RB. Nam in parallelogrammo EK duo triangula EHΓ, FKV ſunt æqualia per 4 propoſ. lib. 5. vt demonſtrauimus in cit. Æpiar. 5 propter angulos æquales ad Γ, & V, & latera æqualia ET, FV, & TH, VK. Præterea ijſdem triangulis æqualibus EHT, FKV ſunt æqualia triangula EBR, FMS, per 4 propoſ. huius lib. 6, ac ſimilia, ac latera etiam homologa habent; ergo ſunt & inter ſe ſimilia, per hanc 21 propoſ. Eucl. & ſimiles inter ſe habent baſes RB prototypum, & SM imaginem delineatam.

Propoſ. XXII. Theor. XVI.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, erunt & rectilinea ab ipſis ſimilia, ſimiliterque deſcripta proportionalia. Et ſi rectilinea ſimilia, ſimiliterque ab ipſis deſcripta proportionalia fuerint, erunt & ipſæ proportionales.



SInt quatuor rectę AB, CD, EF, GH proportionales. Vt AB ad CD, ita EF ad GH, [a] deſcribanturque ſuper AB, CD ſimilia, ſimiliterque poſita rectilinea KAB, LCD, ſuper EF, GH ſimilia ſimiliterq; poſita MF, NH. Dico eſſe vt KAB ad LCD, ita MF ad NH. [b] ſumatur enim ipſarum AB, CD tertia proportionalis X, ipſarum vero EF, GH tertia proportionalis O. Et cùm ſit vt AB ad CD, ita EF ad GH, & vt CD ad X, ita GH ad O; [c] erit ex æquali vt AB ad X, ita EF ad O: [d] ſed vt AB ad X, ita eſt KAB ad LCD, & vt EF ad O, ita [e] MF ad NH: ergo vt ABK ad CDL, ita eſt MF ad NH. Sed ſit vt KAB ad LCD, ita MF ad NH; dico eſſe vt AB ad CD, ita FE ad GH. Fiat [f] enim vt AB ad CD, ita EF ad PR, [g] deſcribaturque ſuper PR rectilineum SR ſimile, ſimiliterque poſitum ipſis MF, NH. Cùm ergo ſit, vt AB ad CD, ita EF ad PR, deſcriptaque ſint ſuper AB, CD rectilinea KAB, LCD ſimilia, ſimiliterque poſita; ſuper EF, PR verò ſimilia ſimiliterq; poſita MF, SR; erit vt KAB ad LCD,

a propoſ. 18.5.
b propoſ. 11.6.
c propoſ. 22.5.
d propoſ. 19.6.
e cor. prop. 26. 6.
f propoſ. 12.6.
g propoſ. 18.6.

LGD, ita MF ad SR: ponitur autem vt KAB ad LCD, ita MF ad NH. Habet ergo MF ad NH, & ad SR eandem proportionem; *b* æqualia ergo sunt NH, SR; sed sunt similia, similiterque posita; æquales ergo sunt GH, PR. Et quia est vt AB ad CD, ita EF ad PR, suntq; PR, GH æquales, erit vt AB ad CD, ita EF ad GH. Si ergo quatuor rectæ, &c. Quod oportuit demonstrare.

b propos. 9.5.

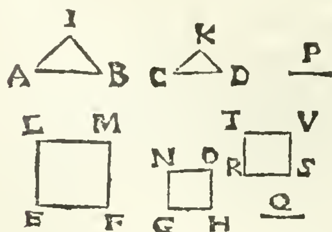
§. I.

SCHOLION I.

Aliter, ac breuius demonstrationem propositionis 22 expedire ex Clauio.

TYronum labori, & molestiæ parcentes libenter, cum se occasio dat, demonstrationes geometricas aliquando prolixiores breuius, sine detrimento facilitatis, expositas proponimus. Vnum hic, præter alibi apud nos alia, exemplum esto a Clauio, qui demonstrationem huius 22 propositionis in modum sequentem expedit: Ponatur primum esse vt AB ad CD, ita EF ad GH. Dico esse quoq; vt ABI, ad BDK, ita EM ad GO. a. Cùm enim sit proportio rectilinei ABI ad CDK duplicata proportionis AB ad CD; item proportio rectilinei EM ad rectilineum GO duplicata proportionis EF ad GH; erunt proportiones ABI, ad CDK; & EM ad GO æquales; quandoquidem duplicatæ sunt proportionum æqualium AB ad CD, & EF ad GH. Quod est primum.

a 19, vel 20 sexti



b 19, vel 20 sexti.

Ponatur deinde esse vt ABI ad CDK, ita EM ad GO. b Dico esse quoq; vt AB ad CD, ita EF ad GH. Cùm enim sit proportio ABI ad CDK duplicata proportionis AB ad CD; item proportio EM ad GO duplicata proportionis EF ad GH; erunt proportiones AB ad

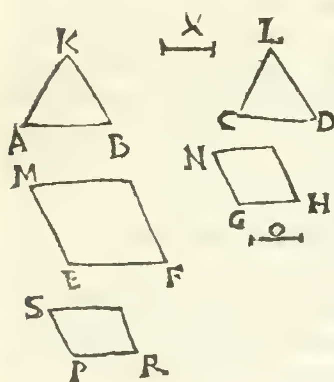
CD, &

& EF ad GH æquales, quandoquidem earum proportiones duplicatæ ABI ad CDK; & EM ad GO æquales ponũtur. Quod est secundũ.

§ II.

SCHOLION II.

Ampliatio Propos. 22 & eius vniuersalitas.



1 *INtellige ea rectilinea quatuor similia inter se proportionalia non solum in proportione interrupta, ita vt bina ABK, CDL sint in eadem proportione, in qua sunt bina MF, NH, nec tamen sint CDL MF in eàdem, & connectente duas similes proportiones ipsorum ABK, CDL, & MF, NH; sed intellige etiam si quatuor rectæ AB, CD, GH sint in continuata, & connexa inter se eàdem proportione, immò & si sint tres connexæ in eàdem proportione etiam rectilinea super ijs rectis esse in continuatà eàdẽ inter se proportione, modò tamen sint rectilinea continuatæ illius proportionis similia omnia inter se. Sic enim postulat hæc propositio 22. & antecedens 20; neq; enim dissimilium rectilineorum est proportio laterum duplicata.*

2 *Quod affirmatum, & demonstratum est in* 1 *propos. huius, hic vniuersale est. Nam in* 1 *propos. ostensum est speciatim de triangulis, & parallelogrammis intra easdem parallelas, siue altitudinis eiusdẽ, ea esse inter se vt bases, scilicet esse inter se proportionalia iuxtà basium proportionem, si tres, vel quatuor bases sint inter se proportionales, esse & super illis proportionalia triangula; & parallelogrammata. At in hac* 22 *propositione fit egressus extra easdem parallelas, & extra triangula, & parallelogrammata, & vniuersaliter de quibuscunq; figuris (modo sint similes) in quacunq; sint altitudine, eas esse inter se in proportione linearum trium, vel quatuor proportionalium super quibus sint constitutæ, &c.*

Ss §3.

§. III.

SCHOLION III.

In qua proportione sint rectilinea similia super proportionalibus lineis.

INtellige de proportione, de qua in antec. 20 proposit. scilicet rectilinea super proportionalibus lineis similia, esse etiam ipsa proportionalia inter se, non proportione ipsa simplici laterum sed duplicata. &c. Ceu quadrata super lineis habentibus, verb. g. inter se duplam, sunt inter se in proportione bis dupla laterum; idest quadruplà, siue duplicatà, &c. Et datis tribus lineis in dupla proportione, primà 4, media 2 extremà 1, rectilinea (v. g. quadrata) super ijs sunt in eàdem, sed duplicatà proportione; scilicet quadratum super linea 4 est 16, super 2 est 4 minorum æqualium quadratulorum, qualium est quadratum super extremà 1. Vt latera 4, 2, 1 sunt in duplà proportione. sic ex ijs lateribus quadrata 16, 4, 1 sunt in dupla duplicatà, idest in quadruplà; & vt latus 2 est medium inter 4, & 1, sic quadratum 4 est medium proportionale inter quadratum 16, & 1. &c.

§. IV.

SCHOLION IV.

Prop. 22 fons constituendorum rectilineorum proportionalium.

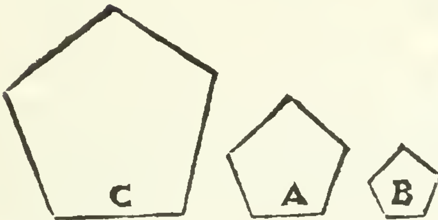
QVemadmodum de lineis proportionalibus inueniendis Euclid agit in propositionibus 11, 12, 13, ac visus est aliquibus defecisse in inuentione etiam rectilineorum proportionalium; sic oculos geometricè acutos habenti tacitè in hac 22 propos. obijcit semina rectilineorum proportionalium, quæ sapienti possunt producere vberem segetem proportionalium recti-

ctilineorum similium, & dissimilium figurà, tertij, medij, quarti, proportionalis. &c. vt puta hic partim dum in quatuor proportionalibus lineis quartum proportionale rectilineum tribus datis appositū ostentat, partim etiam nos magis explicitè ad 25 propos. inferius (quæ egent, iuxta aliquos) problemata exercebimus de inuentione proportionalium rectilineorum. Vides ergo in Geometricis hisce elementis nihil esse quod iure possit desiderari, & (iuxta dicta ex Proclo in Prolegomenis, & ad 1 propos. lib. 1 de conditionibus elementorum geometricorum) alia expressa esse, alia quasi tacita, quæ facile deduci possint ab expressis. &c.

§. V.

PROBLEMA.

Dato rectilineo duo extrema proportionalia, & similia adiungere.

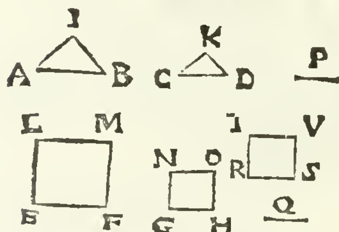


Hoc nostrum problema, quia non eget vsu propositionis 25, & solui potest ad hanc 22, ideo hic id accipe. Sint rectilineo A adiungenda duo similia rectilinea extrema proportionalia ita, vt datum A sit medium proportionale inter duo inuenienda. Per nostrum problema ad 13 propos. huius, rectæ A inueniātur duæ aliæ rectæ extremæ proportionales, ita vt recta A sit media proportionalis inter duas inueniendas, quæ sint B, C, ac super ijs excitentur rectilinea B, C similia, similiterque descripta, per 18 huius; eruntque super rectis B, A, C proportionalibus rectilinea B, A, C proportionalia B, & C extrema dato medio A in eadem proportione adiuncta; per hanc 22, & Schol. nostrum 1 ad eam.

§. VI.

PARADOXVM.

Super quatuor rectis lineis proportionalibus quatuor rectilinea inter se proportionalia sunt, & tamen inter se non similia. Cum vsu in Musicis, & in Ponderosis.

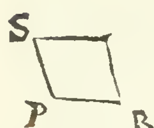


Erit & hoc auctarium ad hanc 22 prop. Eucl. quẽadmodum, & aliqua antecedentium. Affirmat Geometra super quatuor rectis proportionalibus rectilinea similia esse inter se proportionalia; quid si & dissimilia demonstrem super ijs lineis proportionalia? nam in figura hic posita si vt recta AB ad rectam CD, sic recta EF ad rectam GH, ergo & permutando sunt proportionales, nempe antecedentes inter se, & consequentes inter se, idest, ergo vt AB recta ad rectam EF, sic recta CD ad rectam GH', & triangulum super AB est ad parallelogrammũ super EF, vt triangulum super CD ad parallelogrammum super GH. Ac patet. Nam si fiat triangulum simile ipsi AIB, & æquale parallelogrammo LF, (per praxim, quam docuimus in To. 1. § 19 ad 47 lib. 1. mox inferius demonstrandam in propos. 25 huius) erit id triangulum, per hanc 22, proportionale ipsi ABI; ergo & parallelogrammum LF æquale illi triangulo possibili, erit & ipsum proportionale eidem ABI. Eodemque modo probari potest CDK, & NH, licet figurarum dissimilium, esse proportionalia inter se. Videbis exempla inferius ad 25, vbi de rectilineis proportionalibus inueniendis agemus. Quam verò inter se proportionem habeant ABI, LF, & CDK, NH inuestigare licet eo modo facillimo, quem nos docuimus, ac demonstrauimus ad 1 huius, § 6.

Hinc appone ad ea, quæ ad 20 propositionẽ applicauimus materijs se-

sonoris, & ponderosis, & agnosce laminas etiam dissimilium figurarum, quales hic triangulares, & quadrangulares edere consonantias commensurabiles, & easdem quas ederent, si essent in figuris similibus eiusdem quantitatis; pariterque etiam solida dissimilium figurarum habere posse inter se commensurabiles proportiones ponderũ, &c. Quales autem sint eæ proportiones sonorum, vel ponderum inuestigabis, vel (quod ad planas) ea arte, quam modò dixi de figuris geometricis ex 1. huius, vel ex 20 propos. Nam si fingas geometrica plana, & solida figuris dissimilibus laminarum, & grauium corporum, eaque commutes in similes inter se figuras tum planas, tum solidas, & laterum homologorum duplices in planis, triplices in solidis proportiones, dabunt ex quantitatem ponderositatis, & qualitatem consonantiæ, &c. Relege ad 20. Hìc satis esto indicare, & applicare propositum paradoxum etiam vsibus sonoris, & pōderarijs.

LEMMA EVCL.





QVod autem quando rectilinea æqualia similia fuerint, ipsorum latera homologa æqualia sint, sic ostendemus. Sint NH, SR æqualia, & similia; sitque vt HG ad GN, ita RP ad PS. Dico RP, GH æquales esse. Si non, erit vna maior. Sit maior RP. Cùm ergo sit vt RP ad PS, ita HG ad GN, [a] erit permutando vt RP ad GH, ita PS ad GN. maior est autem PR, quàm GH, maior ergo etiam erit PS, quàm GN. Quare & RS maius erit, quàm HN: sed est illi æquale, quod fieri non potest. Non est ergo PR maior, quàm GH. Quod oportuit demonstrare.

[a] propos. 16.5.

§. VII.

SCHOLION:

Ta-

Lēmata ante, & post propositionē principalē ponūtur.

P*Ariter post propos.4 lib.5.habes Lemma.Lemmata fermè apud Geometricos Philosophos præmitti solent demonstrationibus principalibus,tamen etiam aliquando (vt apud Euclidē) postponuntur propositioni, ac demonstrationi principali, si quando aliquid inter plura alia demonstranda videatur egere probatione, quæ interposita demonstrationi principali, præsertim prolixiori (vt hic saltem non admodum breui) videretur posse interturbare progressum demonstrationis,ac seorsim post demonstrationem facilius, & expeditius probari possit. Habes hìc, & alibi exempla apud Euclid. Relege, mi Tyro, quæ de lemmate habes in tom. 1 huius Aerarij ad propos. 1 lib. 1 Elem.§ 3.*

Lēma, seu sumptio latè, & pressè quid sit, & differat.

Lēma axioma, petitio quid differant.

Apud Proclum sub nomine sumptionis ab interprete accipe sequētia, ad eruditionem,& cognitionem geometricam, lib.3. ad propos.1. Sumptionem de omni etiam propositione,quæ in alius Propositionis constructione sumitur,sæpe numero prędicari dicunt, ex tot sumptionibus demonstrationem ipsius factam esse dicentes. Propriè autem apud eos, qui in Geometria versantur sumptio,& propositio fide indigent. Cùm enim in constructione, vel in demonstratione aliquid sumimus eorum, quæ ostensa non sunt, sed ratione indigent, tunc id quod sumptum est, vel per se ambiguum, inquisitione dignum esse arbitrati, sumptionem ipsum appellamus, a petitione,& pronuntiato quatenus demonstrabilis existit; cum illa absq; demonstratione ad aliorum fidem faciendam per se sumantur. In sumptionum autem inuentione optimum quidem est cogitationis ad hoc aptitudo; multos enim est videre acutos in solutionibus,nullisq; methodis hoc facientes, quemadmodum & Cratistus noster, qui idoneus quidem erat ad venandum Quæsitum ex primis, & breuibus quo ad fieri poterat: vsus autem fuit natura ad inuentionem. Traduntur tamen methodi optima quidem illa, quæ per resolutionem ad exploratum principiū reducit &c. *Qua de re habes satis multa ad primam prop.lib.1.Elem. in tom.priori huius Aerarij.*

§ VIII.

SCHOLION.

Propos. 22 ampliata ad numeros, & ad solida.

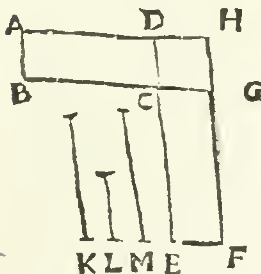
Po-

Poteſt hæc 22 propoſitio demonſtrari & in numeris, & de parallelepipedis pro propoſit. 37 libri 11. Sint 2, 4, & 3, 6 in dupla proportione, fiant ſingulorum quadrata 4, 16, & 9, 36. vt quadrati 4 eſt quadruplum quadratum 16, ſic quadrati 9 quadruplum quadratum 36.

Fiant cubi 8, 64, & 27, 216. vt cubi 8 eſt octuplus cubus 64, ſic cubi 27 octuplus eſt cubus 216. Itaque formetur propoſitio vniuerſalis ad totum genus quantitatis: Si quatuor quantitatum binæ ſint proportionales, binarum ſimilia producta ſunt proportionalia.

Propoſ. XXIII. Theor. XVII.

Aequiangula parallelogramma inter ſe proportionem habent è lateribus compoſitam.



Sint æquiangula parallelogrãma AC, CF æquales angulos BCD, ECG habentia. Dico illa porportionem habere ex proportione laterum compoſitam, ex illa nimirum quam habet BC ad CG, & quam habet DC ad CE. Ponatur BC ipſi CG in directum; [a] erit ergo & DC ipſi CE in directum, & compleatur parallelogrammum DG. Exponatur quædam recta K, [b] fiatque vt BC ad CG, ita K ad L, & vt DC ad CE, ita L ad M. Proportiones ergo K ad L, & L ad M eędem ſunt quæ laterum BC ad CG, & DC ad CE. [c] Sed proportio K ad M componitur ex proportione K ad L, & L ad M; habet ergo & K ad M proportionem ex laterum proportione compoſitam. Et cùm ſit vt BC ad CG, [d] ita AC parallelogrammum ad CH: & vt BC ad CG, ita K ad L, [e] erit vt K ad L, ita AC ad CH. Rurſus [f] cum ſit vt DC ad CE, ita pa-

a propoſ. 14.5.
b propoſ. 12.6.
c def. 5. 6.
d propoſ. 1.6.
e propoſ. 11.5. 6.
f propoſ. 1.6.

parallelogrammum CH ad CF; & vt DC ab CE, ita L ad M, g erit vt L ad M, ita CH ad CF. Cùm igitur ostensum sit vt K ad L, ita esse AC ad CH; vt verò L ad M, ita CH ad CF, h erit ex æquali vt K ad M, ita AC ad CF. At K ad M proportionẽ habet cõpositam ex lateribus, ergo & AC ad CF proportionem habet compositam ex lateribus: æquiangula ergo parallelogramma, &c. Quod oportuit demonstrare.

g propos. 1.5.
h propos. 22.5.

SCHOLION I.

Hanc 23 aliter, ac facilè demõstratam ex vsu geometrico centri grauitatis vide in Epilogo planimetrico in 3 par.hu.2. Tomi.

§. I.

SCHOLION II.

Expositio, & cõstructio, quibus Euclides vtitur in demonstranda 23 propositione, dissipant hallucinationes circa compositam proportionem Geometricam, velut laterum in parallelogrammis. &c.

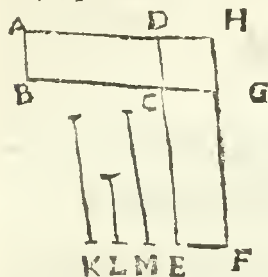
1 *DVm aliqui nimis abstractè versantur in Geometricis, nec ea quæ in aliquibus definitionibus prolata sunt applicatè inquirunt in exẽplis peculiarium demonstrationum, aberrant à vera cognitione locutionum geometricarum, cum detrimento magni momenti circa physicas materias, quas informant fallacijs geometricis. Exemplo sunt prauæ aliquorum interpretationes circa proportiones duplicatas, triplicatas, compositas. & c. Quarum fallax interpretatio inducit fallaciam in mensuras quantitatum planarum, & solidarum. Quid igitur sit verè ratio, siue pro-*

Detrimenta abstractè ab exẽplis, & figuris, philosophantiũ.

por-

portio composita in Geometricis videndū est, sine pluribus ambagibus, in huius propos. 23 exemplo, ac demonstratione. In qua vides ab Euclide fieri, & vocari proportionem compositam lineæ K ad lineam M, quia componitur ex proportione K ad L, & L ad M. Quid nitidius, ac simplicius?

Composita proportio quænam sit.



2 Itaque quemadmodum si K, L, M essent in eadem proportione verb. gr. dupla, diceretur proportio prima K ad tertiam M duplicata, iuxta definitionem 10 lib. 5. & iuxta à nobis explicata ad prop. 19 huius; ita quoniam proportiones ipsarum K ad L, & L ad M in hac propositione 23 supponuntur esse diuersi generis, non vocatur proportio primæ K ad tertiam M duplicata, idest bis vsurpata, iterata in eodem genere, sed vocatur composita, & ex diuersi generis proportionibus producta.

Composita proportio est præcipuè ex proportionibus diuersi generis.

3 Producta inquam (ne hic etiam fallare cum aliquibus) iuxta definitionem quintam huius lib. 6, scilicet quæ producitur, & manifestatur in numero denominatore, ac producto per multiplicationem inter se denominatorum intermediarum proportionum. Nam si aueas scire in specie quænam sit proportio primæ K ad tertiam M, denominatores duarum proportionum diuersi generis intermediarum inter K, L, & inter L, M, inter se multiplicati producent denominatorem compositum, qui indicat proportionem compositam è duabus K ad L, & L ad M. Doctè enim demonstrat Clauius ad finem lib. 9 element. compositionem proportionum esse non additionem, sed multiplicationem denominatorum intermediarum proportionum.

Modus sciendi datam proportionem compositā. &c

4 Caue etiam ab alia fallacia, ac scito proportiones intermedias inter primum, & extremum terminos (quorum mutua proportio componitur ab intermedijs) esse non solum diuersi generis, sed maioris, & minoris inæqualitatis, & maiores etiam proportione primi & vltimi extremorum. Qua de re vide cit. Clau. ad fin. lib 9.

Composita proportio est etiā ex maioris, & minoris inæqualitatis proportionibus

5 Animum aduerte etiam ad proportiones laterum in parallelogrammis, ac scito nō esse ex reciprocis ita, vt in vtroq; sint antecedentes, & consequentes termini proportionum, verbi gr. vt BC ad CG, ita EC ad CD, sed Euclides vult in altero parallelogrammo intelligi antecedentes, in altero consequentes, atque: Dico parallelogrammata BD, CF proportionem habere ex proportione laterum compositam, ex illa nimirum, quam habet BC ad CG, & quam habet DC ad CE. Hanc animaduersionem habes etiam à Clauio. Cui rationem ego ad-

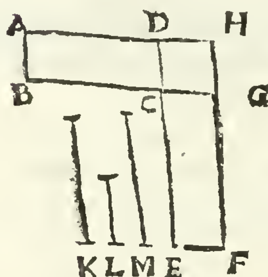
Composita proportio ex lateribus nō reciprocè sūptis intelligitur in hac 23 prop.

do, quia cùm laterum proportio est reciproca, tunc patet, ex 14 huius, esse arearum proportionem solius æqualitatis. In hac autem prop. 21 docet proportiones etiam alias arearum ex lateribus, &c.

§ II.

LEMMA.

Datæ rectæ lineæ aliam adiungere in data proportione per circinum proportionum.



INspice figuram Euclidis, & sit, vt ille iubet, recta L adiungenda recta M, ad quam ipsa L. habeat proportionem, quã habet latus DC ad latus CE. Vide quam proportionem habeãt inter se DC, CE in partibus acceptis ex circino proportionum, iuxta lẽma ex vsu eius circini ad 1 propos. huius, § 6, sitq; v. gr. DC 2, CE 8.

Accipe interuallum rectæ L, & diducto circino proportionum, colloca interuallum rectæ L inter lubitos numeros, verb gr. inter 10, & 10, & quoniam CE 8 est quadruplum ipsius DC 2, accipe (immota perstante circini partium diductione) interuallum inter 40, & 40, qui numerus quoniam est quadruplus numeri 10, erit & recta accepta inter 40, & 40, (finge ipsam M) quadrupla ipsius L; accepta scilicet, & adiuncta datæ rectæ in data proportione. Quod erat faciendum.

§. III.

Praxis geometrica pro inueniendâ proportione compositâ innuitur in constructione, quâ vtitur Eucl. dum demonstrat hanc 23 proposit. Additis à nobis duabus alijs praxibus arithmeticis.

In-

1 *INnuit, inquam, Euclides in Geometrica praxi, & constructione praxim, quà vtare, mi Tyro, etiam in numeris. Nam dum ait :* exponatur quædam recta K, fiatq; vt BC ad CG, ita K ad L; & vt DC ad CE, ita L ad M. *& paullo inferius.* Proportio K ad M componitur ex proportione K ad L, & L ad M. *ostendit datis, verb.gr. quatuor numeris 2, 4, 3, 9 quorum primus, & secundus habent inter se proportionem duplam, tertius, & quartus triplam, vt inuenias, & scias numerum, ad quem primus habet compositam proportionem, redigendos esse ad tres, & faciendum vt secundus 4 habeat ad tertium proportionem, quam habet 3 ad 9, fiatque, vt Euclides in tribus lineis, ita: 2, 4, 12, habeatque 12 ad 4 triplam proportionem, & ex diuisione tertij 12 per primum 2 dabitur 6 quotiens, & denominator proportionis sextuplæ, quam habet 12 ad 2, quæq; erit composita ex proportionibus 2 ad 4, & 4 ad 12. Vtere praxi; & eam applica, quam habes ex circino proport. in lemmate antecedenti.*

Modus inueniendi denominatorem compositæ proportionis.

2 *Iuxta vero definitionem 5 huius lib. 6, non diuisione, sed vtendo multiplicatione, si quantitates, idest denominatores proportionum inter 2, & 4, inter 3, & 9, siue inter 4, & 12, hoc est 2, & 3 multiplicentur (ecce compositam esse proportionem ex multiplicatione, non ex additione) inter se, atq; ex 2 in 3 fiat productum 6, est id denominator proportionis compositæ, ac productæ ex duabus inter 2 & 4, inter 3, & 9, & quam habet primus numerus 2 ad tertium 12.*

Modus alter eundem denominatorem inueniendi.

3 *Vel aliter tertiò, iuxta definitionem a nobis additam in § 4 ad defin. 5 huius lib. 6, eodem ordine seruato numerorum 2, 4, 3, 9, numeri proportionum antecedentes 2, & 3 multiplicentur, & productum esto 6, item consequentes 4, & 9 multiplicati producant 36: diuiso 36 per 6, quotiens 6 dat denominatorem compositæ proportionis, &c. Huius tertiæ praxis theoricen etiam geometricè demonstratam habes in § 14, Corollar. 6 ad hanc 23 propos. Eucl.*

Modus 3 eundē denominatorem cōpositæ proportionis inueniēdi.

Datis igitur duobus parallelogrammis, & in partes æquales, eiusdemque mensuræ diuisis binis vtriusq; lateribus circa angulum æqualem, habes duplicem praxim, quarum altera est connectendo, & exponendo numeros iuxta exemplum Euclidis in lineis, vt inuenias denominatorem ex proportione primi ad vltimum: altera praxis est per multiplicationem denominatorum intermidiorum, & productum denominet, & indicet proportionem quantitatum arealium inter ipsa parallelogrammata.

§. IV.

SCHOLION III.

Adiumenta, & firmamenta praxeωn antecedentium a nobis, & ab alijs.

Modi cognoscẽdi proportiones inter datos numeros.

1 NEque verò est quod hæreas in inueniendis, & cognoscendis proportionibus inter datos duos numeros, itemq; in inueniendo numero, ad quem alter datus habeat lubitam proportionem. Nam per diuisiones, & multiplicationes inueniuntur ij numeri iuxta praxim, quam tradidimus ad 19 propo. huius, quæ non est hìc iteranda. Illam illic relege, & applica ad compositam proportionem vt ibi habes pro dupla, tripla, &c.

Vbi nã doceatur modus redigendi datos numeros ad minimos in eadem proportione.

2 Et quoniam expedit, ad faciliorem cognitionem, & praxim, redigere numeros proportionum aliquando maiores in minimos eiusdem proportionis, habes ab Euclide lib.7 propos.35, & lib.8 propos.4. & in schol. ad eas, modum, quo datis numeris. &c. reperiantur minimi omnium in eadem ratione. &c.

3 Fieri verò denominatorem compositæ proportionis ex multiplicatione denominatorum intermediarum proportionum habes demonstratum ab Eutocio apud nos ad defin quintam huius, & ibi indicatas alias aliorum demonstrationes. Itemq; probationes hallucinationum, quas indicauimus in antec. § 1. Vide apud Clauium ad 5 defin. huius, & ad finem lib.9, & ad 10 defin lib. quinti.

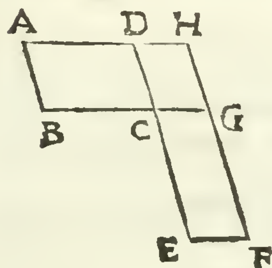
Plura geometricè, & arithmeticè circa multiplicationes, subtractiones, &c. proportionum vide apud Orontium, defin. 5 huius, & apud Regiomontanum in Epitome Magnæ constructionis Ptolemæi, propos. 18 lib. 1.

§. V.

SCHOLION IV.

Ali-

Aliter, ac breuius demonſtrare hanc propoſ. 23. Eademq; in numeris demonſtrata.



HAbes apud Clauium breuiorem, pro imminuenda moleſtia Tyronibus, demōſtrationem huius propoſ 23 in hunc modum. Coniunctis parallelogrammis, vt prius e. Cum ſit vt AC ad CH, ita BC, ad CG, & vt CH, ad CF, ita DC, ad CE. Proportio autem AC, ad CF componatur, per definitionem, ex intermedijs proportionibus AC ad CH, & CH ad CF, componetur quoq; eadem proportio AC ad CF ex proportionibus BC, ad CG, & DC ad CE, quæ illis intermedijs ſunt æquales. Quod eſt propoſitum. *e 1 ſexti.*

In numeris verò hanc eandem propoſitionem demonſtratam vide apud Euclidem lib. 8, propoſ. 5, vbi : plani numeri rationem inter ſe habent ex lateribus compoſitam.

§ VI.

PROBLEMA.

Proportiones parallelogrammorum inter ſe facillimè, ac variè inuenire etiam extra hanc 23 propoſitionem.

1 modus. *DAtis duobus parallelogrammis æquiangulis, etiam ſine inueſtigatione, & ambagibus compoſitæ proportionis laterum circa vnum angulum, ſcire licet quam intra ſe proportionem habeant, per § 6 noſtrum, & Problema vniuerſaliſſimum ad primam propoſ. huius,*

ſci-

scilicet applicando alterum datorum parallelogrammorum ad vnum latus alterius dati parallelogrammi, & basium proportiones dabunt proportionem parallelogrammorum. Vel etiam aliter, vt ad eam 1 propos. docuimus, super æqu libus duabus rectis, quasi basibus, constituendo parallelogrammata (licet altitudinum inæqualium) æqualia datis rectilineis, & altitudinum proportiones dabunt proportiones rectilineorum.

2 modus. Ex dictis in 1 tomo huius Aerarij, de dimetiendis areis parallelagrammorum ex ductu in se laterum circa vnum angulum. Nam ex ea multiplicatione productum vtriusq; parallelogrãmi ostendet proportionem arearum vtriusque, diuidendo scilicet alterum productorum maius per minus.

Atq; in hac arearum dimensione in parallelogrammis ex ductu laterum inter se latet (quam paucis indico) theorice, ac ratio praxis arithmeticæ, qua vsi sumus ad defin. 5 huius, & hic in antec. § 3, & in sequentibus corollarijs vtemur. Vide hic figuram Euclidis, & in ea agnosce antecedentia proportionum esse parallelogrammi BD latera BC, CD, consequentia CG, CE in parallelogrammo EG.

Ratio praxis arithmeticæ pro inueniẽdo denominatore compositæ proportionis.

Multiplicare numeros antecedentes proportionum inter se, & sequentes inter se nihil aliud est, quàm ex ductu duorum laterum vnius parallelogrammi, & duorum alterius conficere quantitates, seu summas areales, & earum in numeris proportiones cognoscere.

3 In antecedenti num. 2 dixi: circa vnum angulum, *non exprimendo æqualitatem omnium angulorum, quam in parallelogrammis Euclides innuit in hac 23 propositione, dùm parallelogramma æquiangula proponit. Dummodo enim vnum angulum æqualem vni alterius habeant data parallelogrammata, sunt etiam æquiangula, & reliquos tres reliquis tribus alterius æquales habent angulos, iuxta à nobis demonstrata in tom. 1 huius Aerarij ad prop. 34, § 15. Itaque per eam ibi demonstrationem liberaris à cura cæterorum angulorum, modo vnum vni æqualem ponas, eaque sola positione facillimum habes negotium geometricum.*

§. VII.

Vsus Geometrici, Corollaria, Ampliationes propositionis 23.

Quod

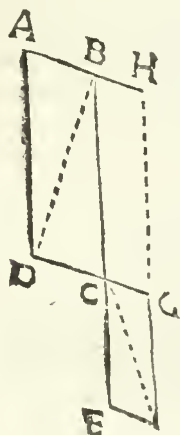
1 QVod ad ampliationes attinet inspice oculogeometricè illustrato, mi Tyro, in nomine parallelogrammi generico doceri etiam cognitionem proportionum, quam habent inter se rhombi, rhomboidea, rectangula, quadrata tam inter se in eadem specie, quam in diuersà comparata, modò figuræ illæ habeant vnum vni alterius æqualem angulum, iuxta indicata in fine § 6 antec. Adde ijs etiam parallelogrammata plurilatera, velut sexagonum, octogonum regularia &c. Ratio patet à propos. 23, quia eæ omnes figuræ sunt parallelogrammata, & æquiangula. Inferius videbis aliqua exempla.

Adde prædictis & triangula aliqua, quorum proportio inuestigatur ex hac 23, vt in 19 propos. ostendit Euclides etiam in triangulis similibus proportionem laterum homologorum.

Adde & aliqua plurilatera non parallelogramma, &c. de quibus omnibus inferius in seqq. corollarijs.

2 In propositione 1. comparauit Euclides inter se triangula, & & parallelogrammata eiusdem altitudinis; in 20 propos. comparauit inter se similia polygona. Hìc comparat parallelogrammata etiam diuersæ altitudinis, & non similia, idest etiam non habentia circa æquales angulos latera proportionalia.

3 Ac nota pariter ad ampliationem, (quod & notauit Clauius) proportionem hanc è lateribus compositam in prædictis omnibus figurarum formis fieri (inspice figuram Euclidis) comparando latera non solum, BC, CG, & DC, CE, sed etiam comparando BC cum CE, & DC cum CG, & à composita ex eorum proportionibus proportione indicari proportionem arearum.



Quæ animaduersio magnifacienda est, si non ob aliud, saltem ob theorema inferius ponendum in § 14. Veram verò esse hanc animaduersionem non solum indicio est quòd vniuersaliter ab Euclide proponitur comparatio ea laterum, sed etiam patere affirmo si parallelogrammata componas, vt hìc vides, & compares parallelogrammi AC latus BC cum parallelogrammi GE latere CE, & DC cum CG; addito enim tertio parallelogrammo CH, fiet eadem demonstratio Euclidis.

Alia ex prædictis in hoc § 7, tibi, mi Tyro, constabunt magis in sequentibus corollarijs. At-

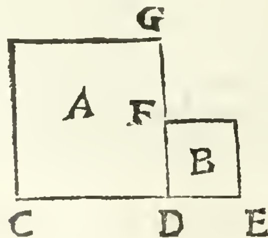
que ex prædictis, & sequentibus videbis quàm ampla doctrina, ampliq; vsus sit hæc 23.

§. VIII.

COROLLARIVM I.

Aliter tertio demonstrare etiam ex 23 propositione quadratum, cuius latus sit duplum lateris alterius quadrati, esse quadruplum alterius.

HOc theorema, quod apud alios demonstratum extat primo è 4 propos. lib. 2, & secundo è 20 lib. huius etiam apud nos, nos hic tertio etiam ex hac 23 propos. Euclid, & ex nostris praxibus ad eam demonstratum per modum corollarij expediemus. Nam quadrata cùm sint æquiangula, & parallelogrammata, habent & ipsa inter se proportionem ex lateribus compositam. Sit ergo quadratum A, cuius CD sit duplum lateris DE, & iuxta Euclidis exemplum geometricum in hac propos. 23, fiat pro latere DE 1, pro CD 2, quæ est prima proportio duorum laterum in vtroq; quadrato circa angulum æqualem; rursus exponatur secunda proportio lateris DF 1, & lateris DG 2; nectantur, & fiant tres numeri in prædictis proportionibus sic, 1, 2, 4; vides proportionem compositam ex 1 ad 2, & ex 2 ad 4, quæ est 1 ad 4, esse quadruplam. Vel, denominatoribus vtriusq; proportionis 2, & 2 inter se multiplicatis, productum est 4 denominator compositæ proportionis: ergo A est ipsius B quadruplum.



Vel deniq; multiplicentur antecedentes inter se numeri proportionum 1 in 1, & productum est 1, scilicet quantitas areæ quadrati minoris B; multiplicati inter se consequentes 2 producunt 4 aream maioris quadrati A; ergo proportio maioris A ad B est 4 ad 1, ergo quadruplum A ipsius B.

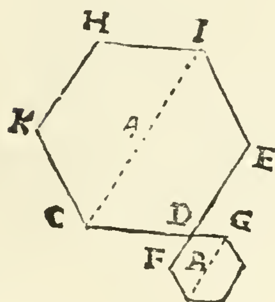
§ 9.

§. IX.

COROLLARIVM II.

Omnes figuræ regulares habentes latera numeri paris opposita parallela, inter se proportionem habent ex lateribus compositam.

HExagona, octogona, decagona, dodecagona, &c. (omissis regularibus figuris, quarum latera sunt numeri imparis, nec habent latera parallela, pentagonum, heptagonum, &c.) veniunt sub hoc corollarium. Exemplum affero in Hexagonis A, B, quæ assero habere inter se proportionem ex lateribus compositam. Et quoniam sunt similia inter se, habentq; ex defin. 1 angulos æquales, & latera circa eos proportionalia, finge latus CD esse triplam lateris DG, erit & ED triplum ipsius DF. Fiũt igitur hi numeri 1, 3, 1, 3, quos connecte vt docuit Euclides, ita vt inuenias secundo tertium in ea proportione, in qua est tertius ad quartum Sic: 1, 3, 9; erit proportio 1, ad 9 composita ex proportionibus laterum 1 ad 3, & 3 ad 9. Igitur erit B nona pars ipsius A. Vel ex definitione quinta huius, multiplicatis denominatoribus proportionum 1, 3, 1, 3, idest ducto 3 in 3, prosilit denominator 9 proportionis cõpositæ, &c.



Vel deniq; multiplicatis antecedentibus 1, in 1, fiet 1, consequentibus 3 in 3 fiunt 9, ergo proportio est 1 ad 9, &c. Firmantur prædicta ex 20 propos. nam similes figuræ hexagonicæ A, B habent proportionem laterum homologorum duplicatam (quæ iuxta dicta ad defin. 5 huius, & ipsa composita est ex intermediis) idest dato minoris hexagoni B latere DG pro 1, & maioris A latere CD pro 3, si continuetur tripla proportio, prodit tertius numerus 9 denominans proportionem inter A, & B duplicatam; vt etiam eandem denominabat in compo-

ſitione laterum CD, DG, & ED, DF. &c. ergo. &c.

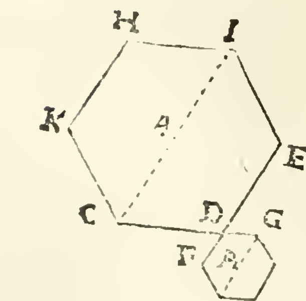
Eodem modo corollarium erit de alijs regularibus figuris plurilateris, & parallelogrammis, iuxta determinationem in inſcriptione huius corollarij. Nam eæ habent conditiones propoſitionis 23, ſunt æquiangulæ, & parallelogrammata.

§. X.

PARADOXVM, & COROLLARIVM III.

Rectilinea plurilatera non parallelogrammata, quæ habent inter ſe proportionem ex lateribus compoſitam.

Propoſitio hæc 23 Euclidis eſt de figuris parallelogrãmis, quomodo ergo ſint aliquæ figuræ non habentes latera parallela, & tamen ſint habentes proportionem ex lateribus compoſitam, vt docet propoſ. 23 de parallelogrammis æquiangulis?



Facilimè, ac breuiſſimè confirmatur noſtrum paradoxum, vt & inferius in corollar. 5 de triangulis. nam, exempli gratia, in duobus hexagonis A, B, ducta diametro per angulos oppoſitos, in duas æquales partes diſpeſcuntur hexagona, vt demonſtratum habes in 1 tom. huius Ærarij ad propoſ 34. & fiunt bina quadrilatera ICKH, ICDE, itemq; in minori hexagono B bina alia æqualia minora quadrilatera. Atque in maiori Hexagono duo latera HI, KC, & CD, IE non ſunt parallela, quippe continentia angulos ad K, & H maiores duobus rectis, iuxta demonſtrata à nobis ad propoſ. 32. lib. 1. & in Apiar. 1, Prælibam. Sic & quadrilatera bina in minore Hexagono B non ſunt parallelogramma in binis oppoſitis lateribus; tamen quadrilaterorum

rorum maiorum alterutrum ad alterutrum minoris habent proportionem compositam ex lateribus circa angulos hexagonorum æquales; quia dimidia ad dimidia sunt vt tota A, & B inter se, quæ ex antec. coroll. 2 habent proport. ex later compos.

Paria intellige de plurilateris alijs quibuscunque, quæ fieri possunt ex bifariatione quarumcunq; plurilaterarum figurarum regularium habentium latera numeri paris, octogonorum, decagonorum, &c. hoc est habentium bina opposita omnia latera parallela.

Vide confirmatorium huius paradoxi in paradoxo, seu corollario 5 paullo inferius.

§ XI.

COROLLARIVM IV.

Quadratum ad rectangulum altera parte longius quamnam habet proportionem? comparauimus similes figuras in antec. coroll 1, & 2, quadrata inter se, plurilatera parallelogramma, hexagonum cum hexagono, &c. comparentur etiam dissimiles quadratū, & rectangulū non quadratum. Habent eæ figuræ compositam proportionem ex lateribus circa angulum rectum, &, si iungantur, vt Euclides facit in duobus parallelogrammis, eadem Euclidis demonstratio prorsus concludit etiam de hisce.

Proportio inter quadratum, & rectāgulum est composita ex lateribus.

Immo vniuersaliter etiam de alijs figuris inter se dissimilibus, modò sint angulorum æqualium, & laterum parallelorum.

§ XII.

PROBLEMA.

Datis quibuscunq; & quotcunque rectilineis, quam inter se proportionem habeant facilè inuestigare ex hac 23 propos. Euclid.

Nostris corollarijs hoc etiam problema nostrum appono antequam aliqua etiam alia ab alijs. Quod proposuimus, ac soluimus ad 1 propos. huius in § 6,7, hic aliter, ac maiori cum libertate absoluimus. Nam hic (vt ad 1 propos. huius) non est necesse vti parallelogrammis intra easdem parallelas, siue eiusdem altitudinis, ac formæ, nec (vt videbis ad 25 propos.) est necesse seruare figurarum similitudinem. Explico, & expedio. *Datis quibuscunq; ac cuiuscunq; irregularitatis rectilineis, vt quam inter se proportionem habeant inuestiges, transfer ea in parallelogrammata per 45, & 46 lib. 1. etiam diuersæ altitudinis, ac formæ, modò sint habentia vnum angulum vni æqualem sub lateribus parallelis, sintque alia parallelogrammata rhombi, vel rhomboidea, vel rectangula longiora, vel quadrata. &c. Deinde accipe (modo iam sæpius dicto per circinum proportionum) mensuras laterum binorum, ac binorum circa æquales angulos; &, per iam sæpius in exemplis ostensa ad hanc 23, vide proportionem ex ijs lateribus compositam, eaque erit quam habent datæ quælibet figuræ inter se, (quæ etiam non sint parallelogrammata) antequam parallelogrammentur, cum ea, quam diximus, libertate. &c.* Exemplis, *& figuris appositis potes tu te prædicta experiri. Nobis hic sat esto vniuersalissimo problemate negotium hoc geometricum indicasse.*

Quinimmo licebit etiam ad maiorem libertatem data rectilinea in triangula transferre, atq; ex triangulis compositam laterum proportionem inuestigare, vt mox è sequentibus patebit.

§. XIII.

PARADOXVM, & COROLLARIVM V.

Triangula habentia vnum vni æqualem angulum, habent proportionem compositam ex lateribus circa æquales angulos.

Triangula non pertinent ad parallelogrammata, de quibus est. Propos. 23 Eucl. Quid ergo huic propositioni cum triangulis?

En.

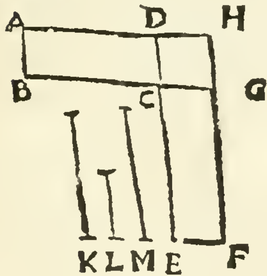
En. Commandinus (quod ex eo alij demonstratione produxerunt) rectè per breuissimum corollarium proposuit, & rationem indicauit sic: Ex iam demonstratis (*scilicet ab Euclide*) colligitur triangula, quæ vnum angulum vni angulo æqualem habent, proportionem habere ex lateribus compositam: sunt enim ea parallelogrammorum æquiāgulorum dimidia. *Atq; vt tota inter se, sic dimidia 2, 4, 3, 9, vel 2, 4, 12; denominator compositæ proportionis est 6. Fac dimidia 1, 2, 6, etiam in dimidijs denominator compositæ proportionis est 6, multiplicatis inter se denominatoribus duplæ, & triplæ proportionum in totis 2, 4, 12, & in dimidijs 1, 2, 6. &c.*

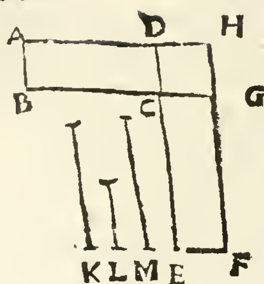
§.XIV.

COROLLARIVM VI.

Parallelogramma inter se proportionē habent compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.

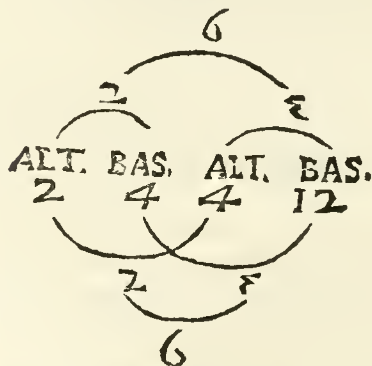
HOc nos corollarium deducimus tamquam iā demonstratum ab Euclide in hac 23 propos. Nam vt monuimus, & ostēdimus in § 7. antec num. 3. in figura Euclidis comparantur non solum parallelogrammi BD basis BC cum parallelogrammi CF altitudine CG, & parallelogrammi EG basis CE cum altitudine CD parallelogrammi ED; sed & bases BC, CE, & altitudines DC, CG, è quarum proportionibus compositā habent inter se parallelogrammata. Igitur arithmeticè ratiocinemur in numeris 2, 4, 3, 9 positis in § 3 ad hanc 23, & applicatis figuræ Euclidis, in qua sint pro basibus rectæ BC, CE, & altitudinibus DC, CG. Atq; vt Tyronum facilitati consulamus, exempla demus in numeris, quorum proportiones denominant numeri integri, eritq; effugium à fractionibus numerorum, si sequamur exemplum Euclidis continuantis proportiones, & efficientis





vt secunda L habeat secundam proportionem ad M, quam habent inter se DC, CE.

Sit ergo (vel supponantur hæc, etiam si figuræ Euclidis non ritè aptentur) parallelogrammi EG altitudo CG 2, & parallelogrammi BD basis BC 4; sit parallelogrammi EG basis EC 9, & parallelogrammi BD altitudo CD 3. Primò exponantur ordine ij numeri 2, 4, 3, 9. secundò connectantur. & è quatuor fiant tres (vt Euclides in tribus lineis) ita, vt secundus habeat proportionem ad tertium, quam habet tertius 3 ad 9, sintq; 2, 4, 12; siue, bis posito medio, sic: 2, 4, 4, 12. Atq; hac ratione basis EC erunt partes non amplius 9, sed 12, & altitudinis CD erunt partes non amplius 3, sed 4. Igitur CD altitudo 2, BC basis 4, CE basis 12, CD altitudo 4.



Vides in apposita hîc figura basium 4, 12 triplam proportionem, & altitudinum 2, 4 duplam, & ex earum denominatoribus 2, 3 inter se multiplicatis fieri denominatorem 6 cōpositæ proportionis. Qui idem est ex multiplicatione denominatorum earum proportionum, quam habent altitudo 2 ad basim 4, & basis 12 ad altitudinem 4; est enim proportionis 2 ad 4 denominator 2, & proportionis 12 ad 4 denominator 3, ac multiplicati gignunt denominatorem eundem 6 compositæ proportionis, vt antea. Applica figuræ, ac eam iuxta hîc dicta contemplare.

Confirmatur etiam à productis ex multiplicatione antecedentium inter se, & consequentium inter se terminorum, iuxta addita ad 5 definit. huius. Nam antecedentes 2, & 4 multiplicati progignunt summam 8 arealem parallelogrammi ex ductu altitudinis in basim; & consequentes 4, 12 multiplicati dant summam 48 arealem alterius parallelogrammi ex ductu suæ altitudinis in suam ipsius basim. Producta vero 8, & 48 habent proportionis inter se denominatorem eundem 6, si per 8 partiare 48.

Hæc ad confirmationem huius ex Euclide apud nos corollarij dum

Thi-

Philosophus, & Doctor Geometra geometricè affirmat, & demonstrat parallelogrammata habere inter se proportionem compositam ex proportionibus laterum; in qua genericà affirmatione tacitè innuit comparari posse alterius parallelogrammi latera non solum altitudinis cum basi alterius, & basis cum altitudine; sed etiam altitudinem cum alterius altitudine, & basim cum basi.

SCHOLION.

Vide consonantiam praecedentis theorematis cum vsu geometrico centri grauitatis, in epilogo planimetrico § 17 ad propos. 23 libri 6.

§ XV.

COROLLARIVM VII.

Triangula inter se proportionem habent compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.

Prodit hoc corollarium ex antecedenti. Sunt enim triangula dimidia parallelogrammorum, habentium inter se proportionem compositam ex proportione basium, & proportione altitudinum.

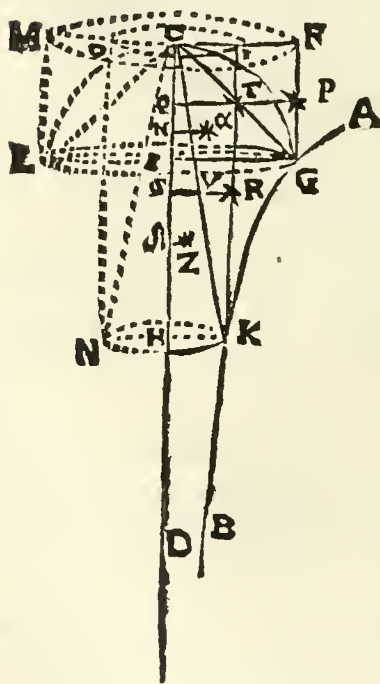
§ XVI.

THEOREMA I.

Demonstratum ex hac 23, & ex nouo vsu geometrico centri grauitatis, nempe.

Su-

Superficies ſine baſibus conorum rectorum factę à triangulis ęqualibus inter hyperbolen, & aſymptoton, habent inter ſe proportionē compoſitam ex lateribus, & è ſemidiametris baſium.



Vppono ex Archimede in Aequiponder. centrum grauitatis parallelogrāmi eſſe in recta bifariante oppoſita latera, vt in parallelogrammo EF eſt T, in parallelogrammo HI eſt V. &c.

In appoſita hic figura affirmo conorum rectorum LCG, CNK ſuperficies ſine baſibus factas ex rotationibus triāgulorum CEG, CHK inter hyperbolen AB, & aſymptoton CD æqualium, habere inter ſe proportionem compoſitam ex lateribus CG, CK, & ex ſemidiametris baſium EG, & HK; Quoniam enim, ex regulà geometricà cētri grauitatis, eæ ſuperficies ſunt æquales rectangulis ſub lateribus CG, CK, & ſub peripherijs (ſiue rectis lineis, quę ſint ęquales peripherijs) ſignatis à centris grauitatis T, V in dimidio laterum; ergo, per hanc 23, habebunt ea rectangula inter ſe proportionem ex lateribus compoſitam. Vt verò peripheriæ à T, & V deſignatæ inter ſe, ſic & ſemidiametri QT, SV; & vt QT ad SV, ſic ſemidiameter EG ad ſemidiametrum HK (iuxta ſæpius oſtenſa ad 14, 15, &c. huius, in alijs comparationibus figurarum planarum, & ſolidarum inter hyperbolen GB, & aſymptoton CD) ergo & conicæ

conicæ superficies sine basibus æquales ijs rectangulis, habebunt proportionem compositam ex lateribus CG, CK, & semidiametris EG, & KH. Sunt verò QT, SV dimidia semidiametrorum EG, KH. Sunt enim centra grauitatis in rectâ bifariante latera opposita CF, EG, CI, KH, iuxtà suppositum ex Archimede. Quantitates verò laterum CG, CK oppositorum angulis rectis ad E, & H in rectangulis triangulis CGE, CKH haberi possunt ex 47 propos. lib. 1, iuxtà notata, & indicata à nobis ad eam propositionem.

§. XVII.

THEOREMA II.

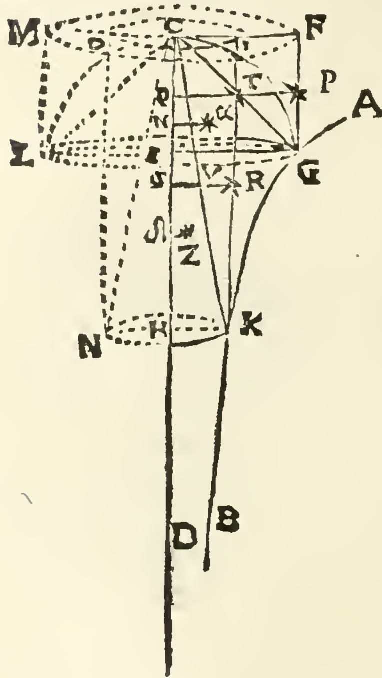
Ex vsu geometrico centri grauitatis, & è 23 huius demonstratum.

Conorum, & cylindrorum rectorum, habentium æquales bases, & altitudines inter hyperbolen, & asymptoton, superficies habent inter se proportionem compositam ex lateribus, & ex diametro, & semidiametro basis.

Affirmo superficies sine basibus coni LCG, & cylindri FGLM, item superficies coni NCK, & cylindri IKNO super base eàdem LG, vel NK, & altitudine eadem CE, vel CH, habere inter se proportionem compositam è proportionibus (loquamur in exemplo tantum de LF, ac quod de ijsdem intellige etiam de æqualibus basibus, & altitudinibus) laterum CG, GF, & diametri LG, & semidiametri EG. Fiunt enim eæ superficies ex ductu peripheriarum inæqualium à centris grauitatis T, P sub inæqualibus semidiametris QT, QP, in latera CG, GF inæqualia, iuxtà regulam &c. cum ergo eæ partes producentes vtramque superficiem habeant binas, & diuersas inter se proportiones, ergo tota, seu producta ex ijs partibus, idest superficies habebunt inter se proportionem compositam ex ijs geminis diuersis proportionibus, iuxtà explicata de proportionum compositione ad hanc 23. Quoniam verò, vt QT, QP

 di-

dimidia, sic inter se dupla sunt LG, EG, ergo superficies cylindrica FGLM, & conica LCG habent inter se compositam proportionem ex proportione laterum CG, GF, & diametri LG, ac semidiametri EG. Proportio ipsarum QP, QT, siue ipsarum LG, EG est dupla, iuxtà suppositum antecedentis theorematis. Quantitas verò, & proportio laterum CG, GF haberi potest ex 47, vt indicatum est etiam in antecedenti theoremate.



SCHOLION V.

Theorema hoc proximè antecedens, eiusq; apud nos demonstratio congruit cũ theoremate demonstrato à Guldino lib. 3. cap. 5, vbi ostendit superficiem cylindri recti ad superficiem coni eamdem habentis altitudinem, & basim, esse vt duplæ altitudinis cylindri ad latus coni. Idem enim est, vel nobiscum ducere totam QP in latus GF, vel cum Guldino ducere dimidiam QT in duplicatã GF. &c. Vide, & confer.

§. XVIII.

THEOREMA III.

Coni, & Cylindri recti eiusdem altitudinis, & basis, facti è rotatione circà asymptoton ex æqualibus rectangulis, & triangulis inter hyperbolen, & asymptoton, habẽt inter se pro-

portionem compositam ex proportione trianguli ad rectangulum, & ex proportione trietis ad semissem semidiametri basis communis.

Demonstratio cũ vsu huius 23, & ex vsu geometrico centri grauitatis confirmato ab Euclide.

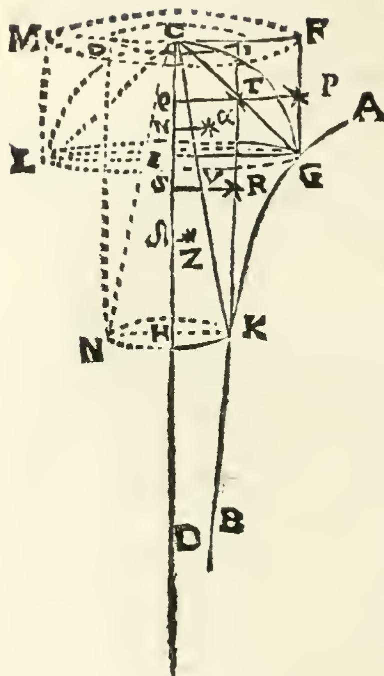
IN rectis cylindro LMFG, & cono LCG communium basis: & altitudinis, quoniam soliditas cylindrica fit ex ductu rotationis à centro grauitatis T (cuius semidiameter est QT) in rectangulũ EF; soliditas verò conica fit ex ductu rotationis à centro grauitatis α (cuius semidiameter est κα) in triangulum CEG; ergo cylindrus LMFG ad conum LCG habebit proportionem cõpositam è proportione semidiametrorum QT, κα, & è proportione rectãguli EF ad triangulum CEG. Trianguli quidem CEG duplum est rectangulum EF, semidiametri verò communis basis, hoc est ipsius QP, triens est ipsa κα, & eiusdem QP dimidia est ipsa QT, iuxtà supposita ex Archimede in theorem. § 3 ad 15, & ad hanc 23 de proportione conicarum superficierum, & soliditatum: Ergo constat veritas hic à nobis propositi theorematis ex vsu geometrico centri grauitatis; confirmante etiam nos Euclide mox.

§. XIX.

COROLLARIVM VIII.

Propositio 10. libri 12. Euclidis ex antecedenti theoremate demonstrata, quæ est:

Omnis conus tertia pars est cylindri eamdem cum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem.



QVod Euclides prolixa, & indirectà demonstratione probauit, nos breuissimè, & facillimà expediuimus. Cuius veritas omnino congruit cũ Euclidiana propositione. Nam si iuxtà antecedẽtis theorematis terminos, proportionum exponas numeros, ac pro proportione trianguli CEG ad rectangulum EF dupla sint 1, 2; deinde fingas basis communis LEG semidiametrum EG, hoc est illi æqualem QP, diuisam in sex partes æquales, ac deinde pro proportione QT, xa inter se si trientem, siue tertiam partem ipsius QP (idest numeri 6) accipias, dabitur 2; si semissem, idest dimidium eiusdem QP, idest numeri 6, accipias, dabitur 3. Termini ergo pro componenda proportione erunt 1, 2, 2, 3, eritq; composita ex primo ad quartum terminum, iuxtà explicata ad hanc 23, scilicet 1 ad 3; igitur cylindrus coni, &c. (iuxtà conditiones prædictas) erit triplus.

§XX.
SCHOLION VI.

Indicatur vbi sit demonstratio ex centro grauitatis, qua nititur figura § 3 ad def. 1 To. 1 huius Ærarij.

FInge cylindrum LF talem, vt semidiameter EG, vel EL sit æqualis altitudini EC. Quoniam eiusdem cylindri LF ablata tertia

tia parte, nempe communi cum cono LGC, remanet solidum cylindricum conicè incauatum sub CLM, FGC, quod est duplum eiusdem coni LGC; si fingas centro facto in medio E diametri LG & interuallo ab E ad C dictam semiperipheriam LOCIG, sub eius semiphiriæ superficie sphærica intercipietur, vnà cum cono LCG, hemisphærium, quo sublato è cylindro LF, reliquum scaphium cylindricum hemisphæricè incauatū sub conuexà semiperipherià LOCIG, & sub rectis LM, FG est æquale cono LGC. Vide apud Guldinum breuem, & facillimam demonstrationem ex vsu centri grauitatis, lib. 3. cap. 6. propos. 7, & ibi ab eo citatos. Saltem indicandus hìc fons nobis visus est, vt nullis ageas, extra nostra domestica, pro perfectà scientià eorum, quæ aliquando supposuimus in hoc Aerario ibi locorum, vbi sat erant vel constructio, vel praxis.

§. XXI.

SCHOLION III. in quo

Epilogus ad praxes ex hac 23 prop. præsertim dimensionum superficialium, non superficialiter, sed geometricè demonstratas.

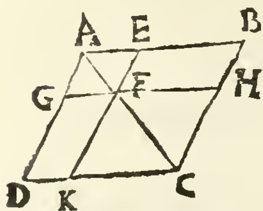
H*Abes ex hactenus a nobis appositis ad hanc 23 propos. modos multiplices dimetiendarum arearum in figuris parallelogrammis, & cognoscendi quot eiusdem formæ figuræ minores, quasi mensuræ, contineantur in altera maiore, siue sint quadratula, siue rectangula minuscula in parallelogrammis rectangulis, siue obliquata minora in parallelogrāmis obliquis; siue accipias comparationes laterum ambientium angulum rectum, siue non rectum, siue perpendicularium altitudinum, & basium, siue non perpendicularium. Eaque omnia etiam in triangulis, in plurilateris parallelogrammis in eorum dimidijs, ac non parallelogrammis. Ac pro hisce praxibus habes adiumenta à circino proportionum, ab exemplo geometrico in demonstratione Euclidis, ab vsu definitionis 5 huius li. 6 à productis antecedentium, & consequentium terminorum in proportionibus laterum. &c.*

Antedicta partim a nobis applicata, partim à te, mi Tyro, applicanda;

canda, omnia deniq; in antecedentibus demonstrata sunt. Quibus adde etiam spectantia superficies rotundas, & ad stereometriam, ad quam facillime eleuauimus hãc 23 prop. ex vsu centri grauitatis.

Propos. XXIV. Theor. XVIII.

Omnis parallelogrammi quæ circa diametrum sunt parallelogramma similia sunt toti, & inter se.



Sit parallelogrãmum ABCD, diametrus AC, circa quam sint parallelogtamma EG, HK. Dico vtrumq; EG, HK toti AB CD, & inter se similia esse. Cùm enim ad latus BC trianguli ABC ducta sit parallela

a propos. 2.6. EF, [a] erit vt BE ad EA, ita CF ad FA. Rursus cùm ad latus CD trianguli ACD ducta sit parallela FG, erit vt CF ad FA,

b propos. 11.5. ita DG ad GA. Sed vt CF ad FA, ita ostensa est BE ad EA: [b] ergo vt BE ad EA, ita est DG ad GA: [c] componendo ergo

c propos. 18.5. vt BA ad AE, ita DA ad AG: & [d] permutando, vt BA ad AD, ita AE ad AG. Parallelogrammorum ergo ABCD, EG

d propos. 16.5. latera circa communem angulum BAD sunt proportionalia.

e propos 29.1. Cumque GF, DC parallelæ sint, [e] erunt anguli AGF, ADC, item GFA, DCA æquales, communis DAC: triangula ergo ADC, AGF æquiangula sunt. Eadem de causa erunt & ABC, AFE æquiangula: tota ergo parallelogramma ABCD, EG

f prop. 4. 6. sunt æquiangula; [f] est igitur vt AD ad DC, ita AG ad GF; & vt DC ad CA, ita GF ad FA. Vt verò AC ad CB, ita AF ad FE; & vt CB ad BA, ita FE ad EA. Et quia demonstratum est esse vt DC ad CA, ita GF ad FA; vt verò AC ad CB, ita AF ad FE; erit ex æquali vt DC ad CB, ita GF ad FE. Parallelogrammorum ergo ABCD, EG latera circa æquales angu-

los

los sunt proportionalia; similia ergo sunt. Eadem de causa erit parallelogrammum KH toti ABCD simile: vtrumq; ergo EG, KH toti ABCD simile est. g Quæ autem eidem sunt similia, & inter se sunt similia: est ergo EG ipsi KH simile. Omnis ergo parallelogrammi, &c. Quod oportuit demonstrare. g prop. 21. 6.

§ I.

Corollaria Geometrica ex 24 propos. Eucl.

Parallelogrammata circa communem diametrum habeant angulũ communem.

1 *Ad cautionem notandum, quod & notat Clauius, parallelogrammata partialia circa diametrum parallelogrammi totalis, debere habere vnum angulum communem cum vno angulo totalis parallelogrammi, vt vides in figura Euclidis. Adde ex demonstratis à nobis ad 34 propos. lib. 1. eo ipso quod vnum habent communem, etiam reliquos angulos partialium parallelogrammorum esse æquales reliquis angulis totalis parallelogrammi.*

Ampliatio etiã ad parallelogrãmata nõ habẽtia communem angulum.

2 Notandum ad ampliationem propositionis Euclidianæ, valere demonstrationem etiam de parallelogrammis circa diametrum protractam extra parallelogrammum, modo parallelogrammata circa extractam diametrum habeant vnum angulum (& consequenter reliquos, ex demonstratis ad 34 prim.) æqualem vni angulo parllelogrammi, cuius diameter extra protracta est. Velut in exemplo figuræ Euclidianæ, parallelogrammi KH diametro CF protracta in A & circa protractam partem FA constituto parallelogrammo GE, patet idem quod demonstratum est de duobus partialibus KH, GE circa totalis parallelogrammi BD diametrum AC.

Modus facillimus cõstituendi datò simile parallelogrammum.

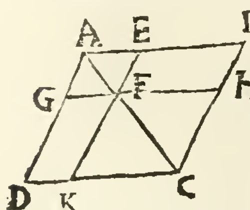
3 Patet & modus constituendi facillimè, & expeditissimè dato parallelogrammo alterum simile, similiterq; positum super data recta. Nam, in figura Eucl. si dato DB maiori sit minus, verb. gr. KH super latere CK constituendum non solum simile, sed similiter positum, accepta parte ipsius DC, quæ sit CK æquali rectæ, super qua constituendum est minus parallelogrammum, & ductâ diametro CA; EK ducenda est parallela vtrilibet laterum DA, BC, & vbi secat diametrum in F, inde ducenda est altera parallela lateri vtrilibet AB, vel DC, eritq; KH minus parallelogrammum simile, similiterq; positum ipsi DB maiori. &c.

Con-

Contraria ratione si augendum sit paralleogrammum KH parallelogrammo maiori DB ad datam DC, minor CK producatur ad longitudinem CD, & producta diametro CF extra F vsq; dum occurrat in A ipsi DA eductæ ex D parallelæ ipsi KF, tum ex A educatur parallela ipsi FH occurrens in B ipsi CH productæ; atq; erit BD simile, similiterq; positum ipsi KH, per demonstrata hìc ab Euclide.

Est etiam hoc problema solutum per ea, quæ docuimus ad 18 propos huius, & in Aranea nostra geometrizante per parallelas in Apiarij nostri primi prælibamento secundo: Datis duobus parallelogrãmis æquiangulis, sed non similibus, ex quouis illorum alteri simile resecare,

Proble-ma Pele tarij pa-tet ex Euclide.



4 Troblema vero Peletarij patet in eadem Euclidis figura Nam si fingas parallelogrammi, verb. gr. GE bina vtralibet opposita latera esse, v. g. GA, FE producta vltra A, & E, vel opposita latera FG, EA producta vltra G, & A ita, vt GE sit non simile, licet æquiangulum ipsi KH; fiet simile, productà diametro CF donec incidat in A productis GA, vel EA, & ex A ductà parallelà opposito lateri, vel GF, vel FE. Itaq; vides verum esse quod affirmauit Proclus, in elementarijs propositionibus latere semina plurium ampliationum, quæ quasi aliquid noui alij proferunt. Sic in constructione æquilateri latent constructiones isoscelis, & scaleni triangulorum, sic, & alibi alia, vt suis in locis aliquando indicauimus, ac nuper ad 23, & ad 1 prop. huius, è quibus corollaria deducta sunt a nobis, quæ aliqui tamquam noua theoremata pluribus demonstrarunt.

Ac notandum deniq; ex 43 primi, & ex hac 24 sexti, parallelogrammata, per diametrum, & parallelas lateribus diuisa, continere intra se partes, ad angulos verticalis oppositos, inter se binas similes, binas æquales. Sunt enim (ad verticem F angulos oppositos habentem) æqualia inter se bina complementa DF, BF, similia verò, similiterq; &c. inter se bina GE, KH.

§. II.

THEOREMA

Aliter solutum ex hac 24, quàm ad 1 prop. huius; scilicet

In

In omni parallelogrammo alterum complementorum est medium proportionale inter parallelogrammata circa diametrum.

IN Euclidis figurà, & parallelogrammo BD (positâ constructione in eius demonstratione, breuitatis causâ) affirmo tam DF, quàm FB, alterutrum complementum, esse medium proportionale inter GE, KH parallelogrammata circa diametrũ AC. Quoniam enim, per hanc 24. sunt inter se similia, similiterque posita GE, KH, ergo vt GF ad FE, ita KC ad CH, hoc est HF ad FK, cùm opposita latera sint æqualia in parallelogrammo KH, per 34 primi; & permutando, vt GF ad FH, ita EF ad FK; sed vt GF ad FH, ita GE ad FB, & vt EF ad FK, ita FB ad KH, per 1 huius; ergo vt GE ad FH, ita FH ad HK. Ergo FH est medium proportionale inter GE, KH. Est autem DF æquale ipsi FB, per 43, 1, ergo alterutrũ complementum est medium proportionale inter parallelogrammata circa diametrum. Quod erat demonstrandum.

Habes in figuris parallelogrammorum à diametris bifariatorum, & diuisorum in similia circa diametrum, & in complementa, omnia geometricè concinna: primò quatuor parallelogrammata proportionalia; secundò æqualia inter se complementa, tertiò similia inter se, & toti partialia parallelogrammata circa diametrum; quartò complementa media proportionali inter parallelogrammata circa diametrũ; partim ad 1 prop. huius, partim hîc omnia demonstrata.

§. III.

Vsus propositionis 24 in praxi, & demonstratione scientificæ picturæ.

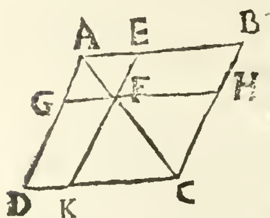
IN Apiar. 5. Progym. 2. cap. 3. nu. 5. & cap. 8. num. 6. ostendimus in scenographico instrumento scientificè pictorio, pingere similem prototypo figuram esse (præter alias) propositionis huiusce 24 vsum quendam, per eam demonstratum; & ibidem figu-

ris applicauimus hanc veritatem. Vide ibi quæ hìc non arbitramur esse repetenda; atq; etiam applica figuris instrumenti scenographici à nobis positi ad 18, & ad 21 huius. Sed apertiùs patet hìc vsus incitat. Apiar.

§. IV.

COROLLARIVM, & PROBLEMA.

Duobus datis rectilineis medium proportionale constituere.



AD sequentem prop. 25 aliter hoc problema soluemus, quod hìc nunc expedimus quasi corollarium ex antecedenti theoremate. Versemur etiam hìc circa figuram Euclidis; & duobus datis imaginarijs rectilineis constituantur duo parallelogrammata æqualia, & similia, quæ finge esse GE, & KH. Eaque iungantur æqualibus angulis ad verticem in F. Scilicet productis alterius parallelogrammi binis lateribus, v. g GF, EF. & sectis ad quantitatem laterum alterius parallelogrammi, v. gr. in K, H, completoq; parallelogrãmo KH &c Rursus vtriusq; parallelogrãmi reliqua bina latera AG, AE, CK, CH producãtur donec coeãt in B, D, fiãtq; parallelogrammum tertiũ maximũ DB; alterutrum FB, FD erit mediũ proportionale inuentum, & constitutum inter datis imaginarijs rectilineis æqualia GE, KH. Iunctâ enim diametro AC, patet operationis demonstratio ex hac 24, & ex anteced theoremate. Siue etiam non iunctâ diametro, demonstratio vim habet iuxta à nobis probata ad 1 propos § 2, vbi antecedens theorema, § 2, aliter, quàm hìc ad hanc 24 propos absoluimus.

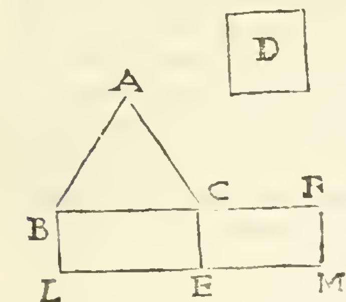
Pro-

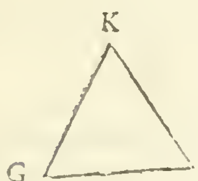
Propoſ. XXV. Probl. VII.

Dato rectilineo ſimile, & alteri dato æquale conſtituere.

SIt dato rectilineo ABC ſimile conſtituendum, æquale verò ipſi D. [a] Applicetur ad latus BC triangulo ABC æquale parallelogrammum BE; ad CE verò æquale ipſi D, nimirum CM in angulo FCE æquali angulo CBL; [b] in directum ergo erit BC ipſi CF, & LE ipſi EM. [c] Accipiatur ipſarum BC, CF media proportionalis GH, & ſuper ipſa ipſi ABC rectilineo [d] ſimile deſcribatur, & ſimiliter poſitum KGH. Cùm ergo ſit vt BC ad GH, ita GH ad CF (quando enim fuerint tres [e] rectæ proportionales, eſt vt prima ad tertiam, ita figura ſuper prima deſcripta ad figuram ſuper ſecūda ſimilem, ſimiliterq; deſcriptam) Eſt ergo vt BC ad CF, ita triangulū ABC ad triangulum KGH. Sed vt BC ad CF, ita eſt BE ad EF, vt ergo [g] triangulum KGH, ita eſt BE parallelogrammum ad EF parallelogrammum: & [h] permutando, vt ABC ad BE, ita eſt KGH ad EF. Æquale autem eſt triangulum ABC parallelogrammo BE; ergo & triangulum KGH æquale eſt parallelogrammo EF. Sed EF æquale eſt ipſi D, ergo & KGH ipſi D eſt æquale Eſt verò & KGH ipſi ABC ſimile. Dato ergo rectilineo, &c. Quod oportuit facere.

a propoſ. 44. 1.
b propoſ. 14. 1.
c propoſ. 13. 6.
d propoſ. 18. 6.
e coroll. 2. prop. 20. 6.
f prop. 1. 6.
g propoſ. 11. 5.
h propoſ. 16. 5.

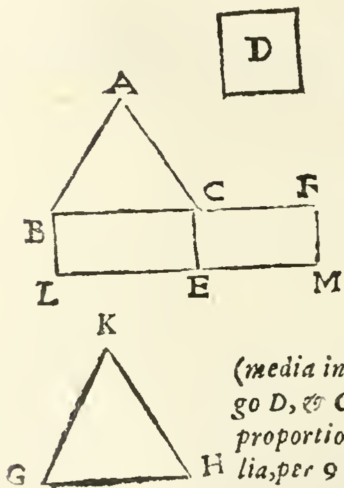




§. I.

SCHOLION I.

Aliter breuius, ac facilius demonstrare propos. hanc 25 elementarem.



Sit eadem, quæ apud Euclidem constructio, dico quadrato D (in fig. Euclid.) esse æquale triangulum GKH, idque per 9 propos. quinti: quæ habent eandẽ proportionem ad idem sunt ęqualia: *sine argumentatione à permutando, &c. Nam vt ME ad EL, ita MC (illi æquale D) ad EB (illi æquale BAC) per primam prop huius. Rursus vt ME ad EL, ita GKH, super GH (media inter LE, EM) ad BAC, per 20 huius. Ergo D, & GHK, quæ ad idem BAC habent eandem proportionem ipsarum LEM, sunt inter se æqualia, per 9 quinti. Est vero GHK per constructionem simile factum ipsi BAC.*

SCHOLION II.

Ex demonstratione huius 25 patet id, quod ad finem 20 propositionis monuimus, quæcumque pertinent ad hanc vniuersalem propositionem: Dato cuiuscumque figuræ rectilineo aliud æquale cuiuscumque figuræ constituere, *fieri, probarique posse ab vsu 20 propositionis, & 18 antecedenti. Propositio enim 18 constituit simile rectilineum, 20 verò, ac 1 prop. probant eandem proportionem ipsorum D, & GKH, & 9 Quinti æqualitatem.*

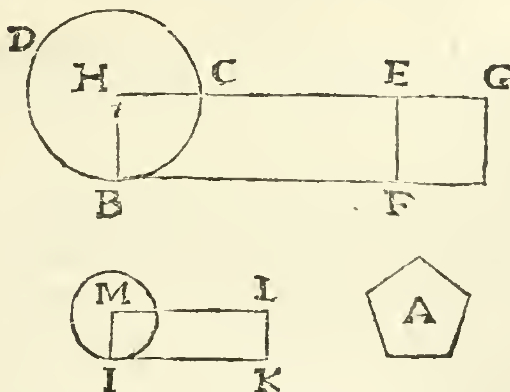
§ 2.

§. II.

Vſus 25 Propoſitionis in transformationibus figurarum etiam non rectilinearum.

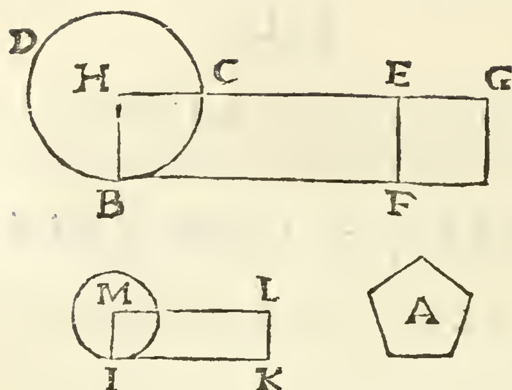
PRAXIS, ac PROBLEMA I.

Dato rectilineo æqualem circulum exhibere.



VNiuerſaliter hic dato cuiuſcumque figuræ rectilineo, non ſolum quadrato, vt ad 17 fecimus, circulum æqualem deſcribimus. Sit A, cui æqualem circulum quærimus. Finge lubitæ magnitudinis circulum BCD, qui, per ea quæ docuimus, & exercuimus ad 45 pri. § 5, vertatur in æquale rectangulum BE, atq; ad latus EF applicetur, per 45 primi, rectangulum FG æquale ipſi A. Inter HE, EG inueniatur media proportionalis ipſa IK, ſuper qua conſtituatur, per 18 huius, rectangulum IL ſimile ipſi BE. Dico IM eſſe ſemidiametrum circuli equalis dato rectilineo A. Eſt enim circulus deſcriptus à ſemidiametro IM æqualis rectangulo IL quod æquale eſt rectilineo A.

Ac primo quidem rectangulum IL, & rectilineum A æqualia eſſe patet ex hac 25, peracta enim ſunt omnia iuxta eam. Ac, ſi placet, indicemus etiam iuxta modum noſtrum è 9 primi. Nam vt HE ad EG, ſic



sic BF (idest circulus cui factum est æquale BE) ad FG, idest ad A, per 1 huius. Ac rursus vt HE ad EG sic IL ad BE, idest ad eũdem circulum BCD, per 20 propos. Ergo per 9 quinti, sunt A, & IL æqualia.

At vero IL esse æquale circulo sic demonstro. Quoniam IL factum est simile ipsi BE, erit vt HB ad BF, ita MI ad IK; at, ex Archimede BH (iuxta ea quæ habes ad cit. 45 lib. 1 § 5) est partium 7 qualium est BF 11, ergo & MI erit 3½ qualium est IK 11; hoc est vt HB est semidiameter, & BF est dimidium peripheriæ sui circuli BCD, per citata ad 45, sic erit & MI semidiameter, & IK semicircumferentia circuli ex MI. Rectangulum vero sub semidiametro, & sub dimidia peripheria est æquale circulo, per demonstrata à Zenodoro apud nos ad cit. 45 propos. lib. 1. ergo rectangulo IL est æqualis circulus ex MI descriptus, atq; etiam æqualis ipsi A. Quod erat faciendum.

§ III.

SCHOLION III.

Quid commodi singularis sit ad praxim in antecedenti problemate.

NOstra hæc ratio transformandi datum rectiliucum in æqualem circulum per rectangulum circulo æquale, habet, præter cæte-

ra,

ra, id commodi singularis ad praxim, quòd rectangulum excitatum super media proportionali, & simile rectangulo æquali alteri dato circulo, exhibet in altero laterum minore ipsum semidiametrum circuli describendi, ac æqualis dato rectilineo. Quod compendium non habebit qui datum rectilineum transformarit in quadratum vel aliud rectilineum (præter rectangulum, &c. vt nos) æquale circulo. Neque enim quadrati vel alterius (præter rectangulum, &c. vt nos) rectilinei latera sunt semidiameter, vel diameter circuli æqualis ipsi rectilineo. Sic vides super IK media inter HE, EG excitato rectangulo simili ipsi EB ex circulo BCD, statim latus IM exhibet semidiametrū, cuius interuallo descriptus circulus est ipsi IL æqualis.

§ IV.

SCHOLION IV.

Indicatus vsus aliquis physicus, ac ciuilis, siue agrarius præcedentis problematis.

PVta esse aliquem, qui habeat fontem fundentem aquas agris, vel hortis irrigandis per fistulam, verbi gratia, triangularem. Optat ille fistulæ os triangulare transformare in os circulare ita, vt tantundē aquæ fundatur per plenum id os circulare, quantum fundebatur per plenum os triangulare. Satisfiet optatis si oris triangularis figuram, iustà cum suà magnitudine, transferat quis in papyrum, & iuxta operationem a nobis indicatam in præcedenti problemate, constituat datæ figuræ triangulari æquale rectangulum, ac simile alteri rectangulo ex circulo alio dato. Sic enim rectangulum æquale triangulo exhibebit alterum minus duorum laterū pro semidiametro, cuius interuallo designatus circulus in papyro erit pro quantitate oris antea triangularis in fistulà. Atq; aquæ, sese per circulare fistulæ os effundētis successiuæ superficies erunt æquales superficiebus eiusdem aquæ sese antea effundentis per os fistulæ triangulare, hoc est tantundem aquæ, &c.

Pluribus alijs vsibus inseruire potest præcedens problema, præsertim tam facili compendio exhibens semidiametrum circuli æqualis datæ cuicumque alteri figuræ rectilineæ.

§ 5.

§. V.

PRAXIS, ac PROBLEMA II.

Dato circulo æquale rectilineum constituere.

Hoc etiam problema præcedentis conuersum, ac vniuersale est, & complectens non solum quadratum, vt ad 17 propos. huius, sed quamcumque rectilineam figuram, in quam circulus transformandus proponitur, ita vt rectilineum æquale sit circulo transformato. Reuise hic figuram præcedentis problematis, § 2, & in ea operare conuerso modo. Esto datus circulus M transformandus in æquale pentagonium regulare. Fiat lubitæ quantitatis, & ad vnum eius latus, puta HB, æquale rectangulum HF applicetur. Ad EF applicetur rectangulum æquale dato circulo M, siue rectangulo MK Inuenta media proportionalis inter bases duorum eorum rectãgulorum dabit latus pentagoni, velut A, æqualis circulo M.

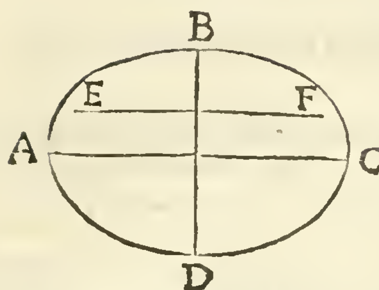
Demonstratio eodẽ modo peragitur, quo in antecedẽti problemate. Vt basis rectãguli applicati, & æqualis circulo dato M ad basim rectanguli (applica tu figuræ) ex maiore pentagono, sic circulus datus M ad maius pentagonum. Item vt tertia (idest eadem basis rectanguli ex circulo dato M) ad primam (idest ad eandẽ basim ex maiore pentagono) sic pentagonum minus, puta A, excitatum super media, ad pentagonum maius, &c. ergo pentagonum A, & circulus datus M, sunt æquales figuræ, quæ habent eundem proportionem ad idem pentagonum maius.

§ VI.

Lemmata, & vsus sequentium 3, & 4 problematum.

Svppono, ac præmitto sequentibus duobus problematibus id, quod iam demonstratum est ab Archimede prpos 5 de Conoidibus, & sphæroidibus, scilicet in ellipsi, vt hic ABCD, esse, vt

maio r



maior diameter AC ad minorem BD, sic circulum diametri AC ad ipsã ellipsim ABD Suppono etiã id, quod & physicè ostẽdimus in § 23 ad 20, & geom. § 8, circulos inter se esse vt quadrata diametrorũ prop 2 l. 11 Eucl. Liceat nobis hìc vtilitatem praxeωn spectãtibus vti hisce suppositionibus iã demõstratis. Interim pro vasis, siue oribus ellipticis in circulares, & pro circularibus figuris in papyro transferendis in ellipticas figuras æquales, aliquando aptiores picturis intra eas delineandis; pro fenestris in ęquales vertendis, pro campis, areis, tabulis ellipticis dimetiendis, &c. habent Tyrones theoremata, siue problemata, vnum, ac alterum sequentia.

§. VII.

PRAXIS, ac PROBLEMA III.

Datæ ellipsi æqualem circulum exhibere.

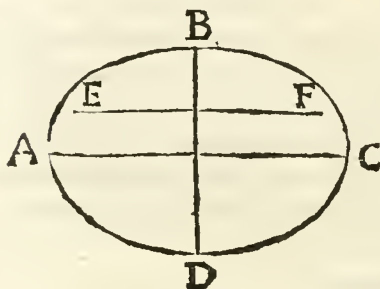
SIt data ellipsis ABCD, cui æqualem circulum oporteat exhibere. Facillima, & breuissima est constructio, & praxis. Nam inter vtramque diametrum AC, BD inuenienda est media proportionalis EF, quæ erit diameter circuli æqualis datæ ellipsi ABCD. Nam, per lemma primum antecedens, vt AC ad BD, ita circulus diametri AC ad ellipsim ABCD, & , per lemma 2, & per 20 huius, & nostra ad eam, vbi de circulorum inter se proportionibus, vt AC ad BD, ita circulus diametri AC ad circulum diametri EF; ergo, per 9 Quinti, circulus diametri EF, & ellipsis ABCD, (quæ figuræ habent eandem rationem ad circulum diametri AC) sunt æquales inter se.

§. VIII.

PRAXIS, ac PROBLEMA IV.

Dato circulo æqualem ellipsim exhibere.

Hoc problema non facilè soluerit quispiam nisi ope nostri problematis conuersi prop. 13 Eucl. in hoc lib. 6 nempe: Datæ rectæ duas extremas primam, & tertiam proportionales adinuenire.



Itaque datæ circuli diametro EF inueniantur duæ extremæ proportionales AC, BD, eruntque illæ diametri altera minor, altera maior ellipsis æqualis circulo diametri EF. Quod eodem modo demonstrare licet, quo antecedens problema 4.

At vero circa extrema diametrorum AC, BD ellipsim legitimè, facilè, continuo tractu, non vulgato modo, & nouo instrumento describere disces inferius ad propos. 28 ex occasione applicationis figuræ ibi deficientis. &c. vnde à simili nomen, & proprietas peculiaris orta sunt sectionis, ac figuræ ellipticæ.

§ IX.

SCHOLION V.

Problemata de ellipsi etiam ad rectilinea vniuersalizare, & in vsum ellipticæ areæ dimetiendæ traducere.

Quemadmodum de circulo scripsimus transformando in datum quodlibet rectilineum, & de dato quolibet rectilineo transformando in circulum, licebit etiam dato rectilineo ellipsim, & datæ ellipsi rectilineum æquale constituere. Quæ tuæ industriæ, mi Tyro, ex antedictis exercenda permittimus. Nobis satis fuit, ad vsus indicatos in lem. ante 3 prob. curuilineas duas pul-

pulcherrimas figuras circulum, & ellipsim inter se transferre.

Hic interim habes quo metiare aream ellipticam. Nam facto rectangulo, ex antecedentibus, æquali circulo diametri EF, eoq; rectangulo ex ductu inter se laterum dimenso, patebit quantitas areæ ellipticæ ABCD æqualis circulo ex EF.

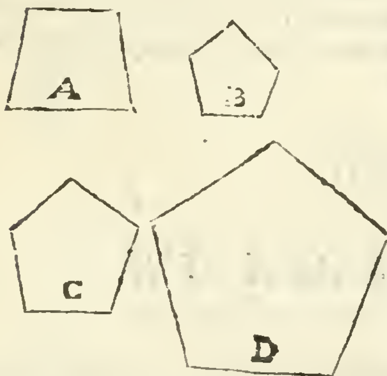
§. X.

Vsus propos. 25 in constituendis rectilineis proportionalibus.

Q*Væ exercuimus pro Tyronibus in Apiar. 3 Prog. 10. Proposit. 7, 8, 9, hic paullo aliter, & in eadem figuræ similitudine breuiter expediemus.*

PROBLEMA V.

Datis duobus rectilineis tertium proportionale constituere in eadem figurarum similitudine.

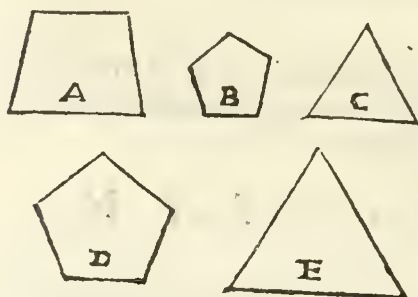


S*Int data duo rectilinea A, B dissimilis figuræ, quibus tertium proportionale sit adiungendum ita, vt tria rectilinea sint in eadem figuræ similitudine proportionalia. Alterutrum datorum, verbi gr. A, vertatur, per hanc 25, in sibi æquale C, simile verò alteri dato B, & rectis lineis C, B inuentâ tertiâ proportionali D, superque ea excitato rectilineo D simili ipsis B, C, erit D tertium proportionale, per 22 huius.*

§. XI.

PROBLEMA VI.

Tribus datis rectilineis quartum proportionale constituere ita, vt bina saltem sint similia.



Data sint tria rectilinea dissimilium omnia figurarum A, B, C, quibus quartum proportionale sit constituendum, ita vt saltem bina in eadẽ proportione sint similia. Per hanc 25, fiat D æquale ipsi A, & simile ipsi B. Tum tribus rectis lineis D, B, C quarta proportionalis E inueniatur vt D ad B, sic sit ipsa C ad quartam E; super quà constituto rectilineo E simili ipsi C, erunt per 22 huius, quatuor rectilinea D, B, C, E proportionalia, ac bina similia D, B, & C, E. &c.

§XII.

PROBLEMA VII.

Duobus datis rectilineis medium proportionale (aliter, quam ad antec. prop. 24) interiungere in eadem figuræ omnium similitudine.

Quod











Vod ad prop. antec. 24 aliter exercuimus, hîc etiã exercemus pro instituta inuentione rectilineorum proportionalium cum vsu huius 25 propos.

Data sint rectilinea dissimilium figurarum A, B, quibus interueniendum sit mediũ proportionale cum eadem omnium figuræ similitudine. Vertatur alterutrũ duorum A in sibi æquale C, simile verò, similiterque positum ipsi B, & inter duas C, B inuentà mediâ proportionali D, super eàque excitato rectilineo simili, similiterque posito ipsis C, B, erit rectilineum D medium proportionale. &c.

§ XIII.

SCHOLION VI.

Curuilinea proportionalia constituere.

A*D similem modum eius, quem habes in antecedentibus inuẽtionibus rectilineorum constituendorum inter se proportionalium, licebit etiam curuilineas figuras, ver. gra. circulos, ellipses, radiatas figuras, &c. inter se, atque etiam cum rectilineis proportionales constituere. Habes enim in antecedentibus quemadmodum transformari possint in æqualia rectilinea circuli, ellipses, radiatæ figuræ, &c. E quarum transformationibus, licet etiam proportiones inter eas constituere, vt nuper vidisti in rectilineis proportionalibus constitutis. Ideo exerce tu, mi Tyro, ingenium geometricum iuxta exempla à nobis prolata, ne nos nimiũ videamur in singulis persequendis, & exequendis.*

§ XIV.

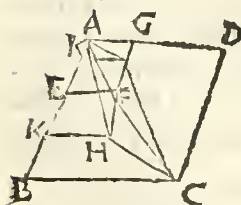
SCHOLION VII.

De auctionibus, imminutionibus, diuisionibus planarum figurarum, seruatâ earum similitudine.

Pertinet ad 20 propos. huius (habesque ibi exempla à nobis) figuras augere, imminuere, diuidere ad lubitas proportiones, seruata figuræ similitudine. Quorum problematum operationes, ac praxes, quia satis absoluuntur è 20, nec egent, vt aliqui arbitrantur, hac 25; ideo ad 20 te reuoluo, mi Tyro, atque hinc interim ad alia progredior.

Propos. XXVI. Theor. XIX.

Si à parallelogrammo parallelogrammum auferatur simile toti, similiterque positum, cõmunem ipsi habens angulum, circa eandem diametrum est toti.



A Parallelogrammo ABCD auferatur parallelogrammũ AF simile toti ABCD, & similiter positum, communem angulum DAB cum ipso habens. Dico ABCD circa eandem diametrum esse ipsi AF. Si nõ, sit ipsorum diametrus AHC, & ducatur per H vtrique AD, BC parallela HK. Cum ergo ABCD circa

circa eandem diametrum sit ipsi KG;[a] erit ABCD ipsi KG simile. Est ergo vt DA ad AB, ita GA ad AK: est autem propter similitudinem ipsorum ABCD, EG, vt DA ad AB, ita GA ad AE. ergo vt [b] GA ad AE, ita GA ad AK; habet ergo GA ad vtramque AK, AE [c] eandem proportionem; æqualis ergo est AE ipsi AK, minor maiori, quod fieri nequit. Non ergo ABCD circa eandem diametrum est ipsi AH. Circa eandem ergo diametrum est ipsi AF. Si ergo à parallelogrammo, &c. Quod oportuit demonstrare.

a propos. 14.6.
b propos. 11.5.
c propos. 9.5.

§I.

SCHOLION.

Apparet experientibus quid sit elementares demonstrationes condere iuxta conditiones, quas requirit, & meritò laudat Proclus in elementari philosopho Geometrico, scilicet coniunctam cum perspicuitate breuitatem, habentes; apparet etiã Euclidis prudentia geometrica, quòd cum videret prop. 26 huius probari facilè non posse demonstratione ostensiua sine molestis prolixitatibus alienis a breuitate elementari, & importunis Tyronis ingenio, maluit, ommissa ostentatione ingenij, breuiter ab absurdo confirmare, & expedire hanc 26 propositionem; quam sine dubitatione potuisset magnus ille Philosophus Geometra directè, aut ostensiuè, sed prolixius, demonstrare.

Elemẽtarium propositionum propria breuitas & perspicuitas

Prudenter Euclides ostensiuã demonstrationem propositionis 26 omisit.

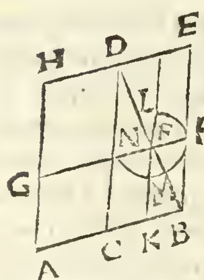


Pro-

Propos. XXVII. Theor. XX.

Omnium parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, & similiter positis ei quæ a dimidia describitur, maximum est quod ad dimidiam est applicatum, simile existens defectui.

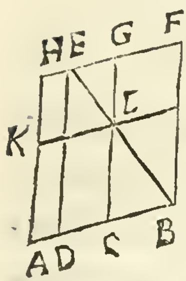
a propos. 10.1.
† qualecumque.



Recta AB [a] bisecetur in C, & applicetur ad AB rectam † parallelogrammum AD deficiens figura parallelogramma DB, simili, & similiter posita ei, quæ à dimidia ipsius AB descripta est. Dico omnium parallelogrãmorum ad AB applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis similibus, similiterque positis ipsi DB, maximum esse AD. [b] Applicetur enim ad rectam AB parallelogrammum AF, deficiens parallelogrammo FB simili similiterq; posito ipsi DB. Dico AD maius esse ipso AF. Cum enim DB simile sit ipsi IB, [c] erunt circa eandem diametrum. Ducatur illorum diametrus DB, & describatur figura. [d] Cum ergo ipsi CF æquale sit FE, si commune apponatur FB; [e] erit totum CI toti KE æquale. Sed ipsi CI æquale est CG, cùm AC, CB æquales sint; ergo & GC ipsi EK æquale est. Commune CF apponatur; & erit totum AF gnomoni LMN æquale. Quare DB, hoc est AD, quàm AF maius est. Omnium ergo parallelogrammorum, &c. Quod oportuit demonstrare.

b propos. 44.1.
c propos. 26.6.
d propos. 43.1.
e ax. 1.

Aliter. Sit AB rursus in C bisecta, & applicatum AL, de-



deficiens figura LB. Applicetur ad AB parallelogrammum AE deficiens figura EB simili, & similiter posita ipsi LB à dimidia AB descriptæ. Dico parallelogrammum AL ad dimidiam applicatum maius esse ipso AE. Cum enim EB ipsi LB simile sit, a erunt circa eandem diametrum, quæ sit EB, perficiaturque figura. Quia ergo LF ipsi LH æquale est, quod & FG ipsi GH sit equalis; FL, quàm EK maius erit: b æquale est autem LF ipsi DL: maius ergo est DL quam EK; commune addatur KD, totum ergo AL toto AE maius est. Quod oportuit demonstrare.

a *propos.* 20.6.

b *propos.* 43.1.

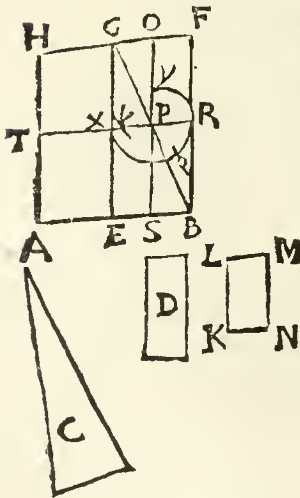
§. I.
SCHOLION.

Haec propositio 27 est loco quasi lemmatis pro determinatione, quam requiret Geometricus Philosophus in sequenti Propositione 28. Si enim in hac 27 demonstratur omnium parallelogrammorum ad eandem lineam applicatorum, &c. maximum esse id, quod applicatur ad dimidiam lineam; ergo si ad aliquam lineam sit applicandum aliquod parallelogrāmum æquale alicui dato rectilineo, cum conditionibus hic requisitis, deficientiæ, similitudinum, &c. opportebit, vt datum rectilineum non sit maius quàm parallelogrammum, quod applicatur ad dimidiam. &c. Nam si sit datum rectilineum maius quantitate parallelogrammi ad dimidiam lineam applicandi, non est vllum aliud parallelogrammum applicandum, quod possit exæquari dato rectilineo, quia maximum est quod ad dimidiam applicatur, ac proinde dato rectilineo excedenti parallelogrammum ad dimidiam non erit locus in propositione sequenti, in quà dato rectilineo constituitur ad datam rectam lineam parallelogrammum æquale, &c. cum cæteris conditionibus ibi requisitis. Hæc nos præmittenda, & deducenda censuimus ex hac 27 ante 28, ne Tyroni quasi ex improuiso tenebras offundat determinatio a Geometra requisita in sequenti 28. Cuius determinationis hinc deductio, & ratio allatæ, atque explicatæ sunt.

Ratio determinationis, quam requirit Euclides in hac 27 propositione

Propoſ. XXVIII. Probl. VIII.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare deficiens figura parallelogramma, quæ ſit ſimilis alteri datæ. Oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum eſt, maius non eſſe eo, quod ad dimidiã applicatur, ſimilibus exiſtentibus defectibus, & eo quòd à dimidia, & eo, cui oportet ſimile deficere.



SIt recta data AB; rectilineum datum, cui oporteat æquale applicare, ſit C, non maius exiſtens eo quod ad dimidiam applicatum eſt, ſimilibus exiſtẽtibus defectibus. Cui autem oportet ſimile deficere ſit D. Oportet ergo ad AB rectilineo C æquale parallelogrammum applicare deficiẽs figura parallelogramma ſimili ipſi D. a Biſecetur AB in E & b deſcribatur ſuper EB ipſi D ſimile, ſimiliterque poſitum EBFG, compleaturq; AG parallelogrãmum: quod ipſi C aut æquale eſt, aut maius ob determinationem. Si æquale, factum eſt quod iubebatur; applicatum enim eſt ad AB rectilineo C æquale parallelogrammum AG deficiens figura parallelogramma GB ſimili ipſi D. Si verò HE maius eſt quam C; erit & GB maius, cum GB ipſi HE ſit æquale. Exceſſui autem, quo GB excedit C, c fiat æquale KLMN, ſimile ſimiliterque poſitum ipſi D. Et cum D ſimile

a propoſ. 10.1.
b propoſ. 18.6.
c propoſ. 25.6.

simile sit ipsi GB, erit & KM ipsi GB simile. sit linea KL ipsi GE, & LM ipsi GF homologa; quia ergo GB æquale est ipsis C, & KM; erit GB, quã KM maius; erit ergo & GE linea maior, quam KL, & GF, quàm LM. d Fiat ipsi KL æqualis GX, ipsi LM ipsa GO, compleaturque parallelogrammum XGOP, quod erit æquale, & simile ipsi KM; sed KM ipsi GB simile est; e erit ergo & GP ipsi GB simile: f sunt ergo GP, GB circa eandem diametrum; quæ sit GPB, & describatur figura. Cum itaque GB æquale sit ipsis C, KM, & GP ipsi KM, erit reliquus Y gnomon ipsi C æqualis, g cumq; OR ipsi XS sit æquale, si commune PB addatur, erit h totum OB toti XB æquale. sed XB ipsi TE est i æquale, quod AE, EB sint æquales; est ergo & TE ipsi OB æquale; si commune XS addatur, erit totum TS gnomoni Y æquale. Sed gnomon ipsi C ostensus est æqualis: k est ergo TS ipsi C æquale. Ad datam ergo AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum TS applicatum est deficiens figura PB simili ipsi D, cum PB ipsi GP simile sit. Quod oportuit facere.

d *propos.* 3.1.
e *propos.* 21.6.
f *propos.* 26.6.
g *propos.* 43.1.
h *ax.* 2.
i *propos.* 36.1.
k *ax.* 1.

SCHOLION I.

QVando applicatio elliptica, siue cum deficientia, &c. facienda est ita, vt deficiens figura sit quadrata, tunc facilior est operatio huius 28 propositionis; & expeditum modum habebis à nobis inferius in §§ sequentibus ad hanc 28.

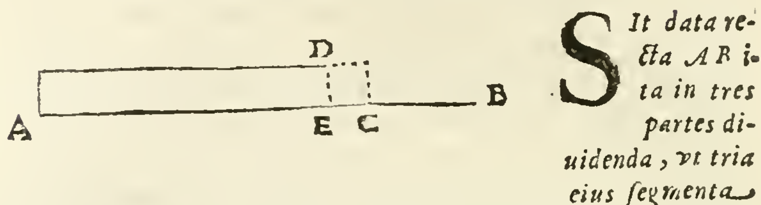
§. I.

VSVS prop. 28 in problemate pulcherrimo. Quod est –

– Datam rectam lineam in tres partes proportionales diuidere. Opportet autem in prima

 diui-

diuiſione per inæqualia ſegmentum maius eſſe maius duplo minoris ſegmenti.



SIt data recta AB ita in tres partes diuidenda, vt tria eius ſegmenta ſint in continua inter ſe proportione. Fiat prima ſectio in C ita, vt ſegmentum maius AC ſit maius duplo ſegmenti minoris CB; tum ad ſegmentum maius AC applicetur parallelogrammum AD æquale quadrato ſegmenti minoris CB, & deficiens figurâ quadrata DC, iuxta vſum huius 28 propoſ. Eucl. Dico tria ſegmenta AE, CB, EC eſſe in eâdem inter ſe proportione. Demonſtratio facilè, ac breuiter patet ex 17 propoſ. huius. Quoniam enim, per conſtructionem, rectangulum AD eſt æquale quadrato ex CB, erunt, per 17, rectæ AE, CB, ED inter ſe proportionales. At in quadrato DC ipſi ED eſt æqualis ipſa EC, ergo & tres AE, CB, EC ſunt inter ſe proportionales. Quod erat faciendum.

§. II.

SCHOLION II.

Cur in præced. probl. § 1 determinatio ſit de ſegmento maiore in prima diuiſione, quod ſit maius duplo ſegmenti minoris.

RAtio eius determinationis eſt ex propoſitione apud Commandinum, quæ quaſi corollarium eſt ex 25 propoſitione libri 5. Si tres magnitudines fuerint proportionales, maxima ipſarum, & minima, quam dupla reliquæ, maiores erunt.

Cùm

Cum igitur factà prima sectione ipsius AB in C, in segmento maiore AC facienda sit secunda sectio in E, ita vt AE, EC sint duæ extremæ trium proportionalium, ideſt maximum segmentum sit AE, minimum EC, & medium proportionale CB, necesse est segmentum AC constans ex maximo, & minimo segmentis conficere lineam, quæ sit maior duplà ipsius CB; alioquin non essent tres proportionales AE, CB, EC, per demonstrata ex 25 propos. lib. 5.

§. III.

SCHOLION III.

Amplitudo pręcedentis problematis in § 1. De problematibus apud Geometras Inordinatis. Et facta sectione datę in tres partes proportionales, scire in qua proportione sint eæ partes.

1 *QVoniam, factà primà sectione iuxta determinationem in antecedentibus indicatam, & demonstratam, velut in C, fieri possunt in infinitis punctis inter CB, & inter CA sectiones, & applicationes ellipticæ numero infinitæ, ideo amplissimum est problema, & ex eorum genere, quæ antiqui Geometrici Philosophi appellabant Inordinata. Fuerunt enim, ac sunt (vt affirmabat Amphinomus apud Proclum) problematum tria genera, (præter alias diuisiones) Ordinata, quæ simplici, ac vnico modo absoluuntur. Media, quæ non vno, sed pluribus numero determinatis modis peraguntur. Inordinata quæ numero infinitis modis fieri possunt. Quale hoc de diuisione rectæ in tres partes proportionales. Pro varia enim in infinitum sectione inter maius segmentum (maius duplo minoris) & minus variæ in infinitum proportiones trium partium esse possunt. Relege § 19 ad propos. 1. in tomo 1 huius Aerarij.*

Tria genera problematum, ordinata, media, inordinata. Ac quæ singula.

2 *Scire verò si lubeat quam proportionem habeant inter se partes illæ tres in lineà proportionaliter sectà, habes modos à nobis in antecedentibus huius 2 tomi. Vide in primis § 6 ad primam propos. huius libri 6. Elementaris.*

§ 4.

§ IV.

COROLLARIVM.

Ex datâ rectâ lineâ ttiangulum laterum proportionalium construere.

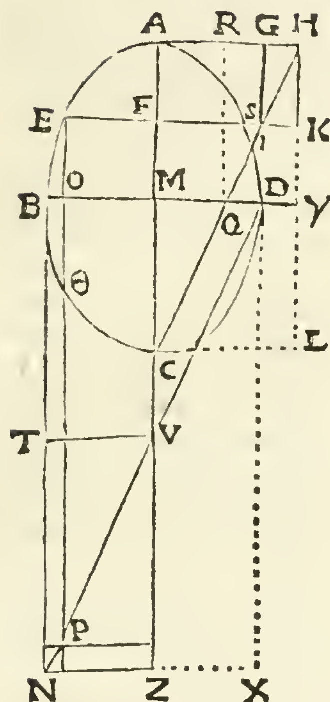
VT vsum aliquem habeas antecedentis problematis, en propositum hic problema, iuxta inscriptionem huius corollarij, absoluitur diuisâ datâ rectâ in tres partes proportionales, & acceptâ minimâ EC pro basi, centris E, C, interuallis EA, CB, vbi se mutuo secabunt ducti gemini arcus, ibi erit vertex triãguli constructi ex tribus lateribus proportionalibus. &c. iuxta propos. 22 lib. 1, & praxim ad primam propositionem scaleni construendi super datâ. &c.

§. V.

Vsus 28 prop. in Conicis ad eximios effectus.

De Geometrica applicatione cum deficientia, quæ Græcis ἔλλειψις. Id nomen inditum conicæ sectioni ab vsu huius prop. 28 Eucl.

APollonius Pergæus lib 1 Conicorum propos. 13 demonstrat, si fiat sectio Coni obliqua per vtrumque Coni latus (quæ tamen non sit vel circulus, vel subcontraria, idest quæ nec sit parallela basi coni, nec auferat conum, seu potius partem trianguli facti a sectione coni per axem, similem totali triangulo facto à sectione coni iuxta axem) fieri figuram, qualis ABCD, quæ habet hanc proprietatem, vt, ductis diametris maiori AC, minori BD se in M mutuo bifariantibus, & inuenta ipsis diametris minore tertiâ proportionali AH, & iunctâ CH, quælibet recta diametro



BD æquidistans, & à latere figuræ ad diametrum auctæ, (vt alterutra EF, FS æquidistans minori diametro BD, ducta ab alteratro latere AEB, ASD figuræ AEBCD, ad alteram diametrum maiorem AC, in F) potest spatium (velut quadratũ ex EF) æquale rectangulo sub AF, FI, quod adiacet ipsi AH perpendiculari in A, & deficit figura GK, quę similis est figurę AL sub HA, AC; & propter eam deficientiam rectanguli AI applicati ad AH vocat Apollonius figuram ABCD deficientem, siue græcè ἔλλειψιν; cuius rectæ ad axem ordinatim actæ, vt vocat, possunt rectangulum prędicto modo deficiens. Sic Quadratum MD, vel BM, est æquale rectangulo AQ, quod deficit figurà RY, &c.

Ac quod factum est circa diametrum maiorem AC, potest fieri etiam circa minorem BD, inuentà 3 proport. mai. BN. Nam EO æquedistans diametro AC potest spatiũ æquale rectangulo sub BO, OP adiacens rectæ BN, ac deficiens figura NP simili figuræ BX sub DB, BN. Sic alterutra AM, MC potest rectangulum BV deficiẽs figurà TZ. &c.

Quare vides, mi Tyro, sectioni conicæ ellipticæ nomen inditum ab vsu huius 28 propositionis.

§. VI.

PRAXIS GEOMETRICA,

Datis ellipseos diametris, latus rectum, siue lineam inueniendi, ad quam facienda est applicatio cum deficientia, &c.

Ex

Ex inuentione tertiæ proportionalis inueniemus etiam lineam applicationis cum deficientia modo persimili eius, quo in Apiarys nostris ex tertià proportionali inuenimus etiam latus rectum hyperboles. Ac licet non sit necesse datam vtramque diametrum ellipseos maiorem, ac minorem se se mutuò bifariare ad angulos rectos, tamen nos hìc exemplum ponemus in bifariatione rectangulà, velut (in figura apposita) ad M, vbi diametri datæ maior AC, minor BD se mutuò bifariant. Deinde duabus AM, MB, vel MD inueniatur tertia proportionalis MQ, & iungatur ab extremo C per Q recta producta, & occurrens in H rectæ ex A perpendiculariter eductæ, erit AH latus rectum ellipseos ABCD siue descriptæ, siue describendæ per extrema A, B, C, D; ad quam AH fiunt applicationes cum deficientia. &c.

Nam ex citata propos. 13 lib. 1 Apollonij, ipsius ellipseos ABCD proprietas, à qua sortita est nomen, est vt rectarum ad vtramlibet diametrum applicatarum, verbi gratia, rectæ MB, vel MD quadratum sit æquale rectangulo sub parte AM diametri maioris AC (interceptà inter verticem A, & inter punctum M) & sub recta, quæ sit (iuxta 17 prop. huius lib. 6) tertia proportionalis ipsis AM, MD, sitque id rectangulum in figurà apposità ipsum AQ. Quod quidem rectangulum est applicatum ad AH (cuius quantitas inuenta est per iunctam CQ, & productam in H) & deficiens figura sub HR, RQ simili figuræ AL sub perpendiculari AH, & diametro (quam vocant transuersam in Conicis) maiore AC. Similes vero esse figuras rectangulum sub HRQ, & sub ACL patet ex operationibus, & demonstrationibus propositionum 24, & 26 huius. Quare cum AH sit recta, iuxta quam possunt cum deficientia

figuræ similis, &c. quæcumque applicatæ ad axem, siue diametrum AC, propterea est AH rectum latus ellipseos, iuxta ea, quæ requirũtur in conicis.

In modum similem respectu diametri minoris BD, erit BN latus rectum, siue linea applicationum cum deficientia, siue iuxta quam poterunt applicatæ ad BD, vt sunt EO, O9, &c. quarum vtrumlibet quadratum erit æquale rectangulo BP applicato ad BN, & deficiente figura NP simili figuræ BX. &c.

§. VII.

Aliter 2.

Datis elliptios vtraque diametro, latus rectum, siue lineam applicationis cum deficientia inuenire.

Se decussent, ac bifarient datæ diametri AC, BD ellipseos descriptæ, vel non descriptæ; inueniatur ipsis AC, BD tertia proportionalis, siue maior BN, siue minor AH, eritque alterutra latus rectum respectu vel maioris diametri AC, vel minoris BD. Demonstratio est ex prop. 15 lib. 1. Apollonij, & ex additis ab Eutocio ad propos. 16. Atque inprimis ex demonstratione Commandini ad propos. 16. lib. 1 Sereni de ellipsi, e sectione obliqua etiam Cilindri. Serenus in cit. prop. 16, atque etiam in 17 idem cum Apollonio probat de ellipsi in Cilindro. Est enim alterutra diameter media proportionalis inter alteram diametrum, & inter latus rectum. BD est media proportionalis inter AC, AH. CA verò est media proportionalis inter DB, BN. Ergo inuẽta alterutra tertia proportionalis BN, vel AH sunt latera recta, siue lineæ applicationis cum deficientia. &c.

COROLLARIVM.

De duabus intermedijs proportionalibus.

Habes inter AH, BN duas medias proportionales AC, BD, &c. & quatuor continuè proportionales BN, CA, BD, AH.

§. VIII.

Aliter 3.

Data diametro maiore, siue transuersà ellipsis in cono, siue in triangulo e sectione coni secundùm axem, inuenire latus rectum, siue lineam applicationis cum deficientia, &c.

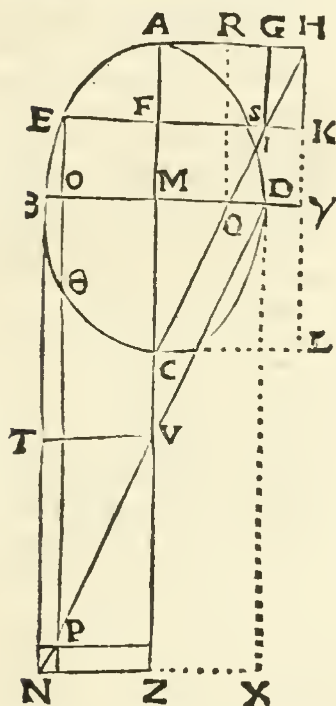
Sit pro cono triãgulum ABC factum a plano secãte conum iuxta axem, & sit ellipticæ obliquæ sectionis latus transuersum, siue maior diameter DE. Educatur ex A diametro DE parallela AF, occurrens basi BC productæ in F, fiatque vt quadratum AF ad rectangulum sub BF, FC, ita DE ad quartam proportionalem DG, eritque DG latus rectum, siue linea applicationis ellipticæ, hoc est cũ deficientia figuræ similis figuræ sub lateribus recto DG, & transuerso DE. Quod demonstrat Apollonius prop. 13, lib. 1 Conic.

Ad facilitandam verò praxim, quam hic quærimus, & vsurpabimus etiam in sequentibus pro vsu 28 huius propos. Euclid. (ideo demonstrationes hic aliquæ supponuntur suis in locis iuxta morem praxeωn, vt non semel dictum, & exemplis ostensum est in to. 1 huius Aerarij) vtere problemate nostro ad prop. 20 huius, § 5, vbi habes: Vt rectilineum ad rectilineum, sic rectam ad rectam efficere; *præsertim translato rectangulo in quadratum.*

§ IX.

Vsus 28 prop. in elliptica, siue deficiente applicatione, &c.

Quasi corollarij loco deducitur ex antecedentibus problematibus hoc hìc à nobis propositum ad exercitationem Geometricam Tyronum in vsu huius 28 prop. Eucl. Itaque iuxta eam. Ad datam, siue inuentam prædictis modis rectam lineam AH dato rectilineo; idest quadrato ex EF æquale parallelogrammum AI applicare deficiens figura parallelogrāma GK, quæ sit similis alteri AL. *Quod problema expeditur facilius, quā Euclides hanc 28 propos. iuxta primum nostrum modum antecedentem inueniendi lateris recti ex proprietate ordinatim applicatarum ad axes, à qua nomen inditum ellipticæ figuræ. Nam inuenitur, & educitur parallela ipsi AG tertia proportionalis FI ipsis AF, FE. & iungitur CH, productisque ex I, & H rectis IG, IK, HL oppositè ad AH, & inter se parallelis, applicatum est ad rectam AH quadrato ex EF æquale rectangulū AI deficiens figura GK simili ipsi AL, iuxta indicata in antecedentibus. Ac solutum est propositum problema ellipticum ex vsu propositionis huius 28 de applicatione elliptica, siue deficiente. &c.*



§. X.

PRAXIS GEOMETRICA,

Datis diametro, & lineà applicationis deficientis, siue latere recto, describendi Ellipticam figuram per puncta, ex antecedentibus.

S*It data alterutra, diameter, transuersa, siue maior AC, & linea applicationis deficientis, siue latus rectum AH. Iungatur CH, & ad diametrum applicentur quotlibet, (quo crebriores, & sibi viciniores, eo melius) IF, QM, &c parallelæ ipsi AH, & interceptæ inter iunctam CH: mox inter ipsas AF, FI inueniatur media proportionalis FS pariterque inter AM, MQ media MD; erunt S, D in ellipsi.*

Huius praxis demonstratio est in 13 propos. cit. lib. 1 Con. ex proprietate, quæ nomen, & ortum tribuit ellipticæ figuræ. Sunt enim quadrata FS, MD æqualia rectangulis sub AF, FI, & sub AM, MQ, applicatis ad AH, & deficientibus figura GK, & figura sub Rγ similibus figuræ sub ACL. &c.

Itaque hic habes vsum mediæ proportionalis pro descriptione conicæ sectionis ellipticæ, quemadmodum in Apiar. 3 habes per medias proportionales descriptionem hyperbolicæ sectionis. Vide Eutocium ad propos 21 lib. 1 Con. hunc vsum ex propositione 13 eiusdem lib. 1 Con educentem.

Describes Ellipsen prædicto modo etiam ex data diametro recta, siue minore BD, & latere recto BN.

§. XI.

Aliter 2.

Data vtralibet diametro, ellipsen describere.

Etiam

Etiam ſine latere recto, data ſit vtralibet diameter AC. Sumãtur in eà quotlibet (quò crebriora, & ſibi ipſis proximiora, eò melius) puncta F, M. Per quæ ad rectos (exempli gratia) ducantur EF, BM, fiatq; vt rectangulum interceptum inter vertices A, C transuerſi lateris AC, & inter puncta in diametro ſumpta, nempe vt rectangulum ſub AF, FC ad rectangulum ſub AM, MC, ita quadratum ex EF ad quadratum ex BM; erunt E, B in ellipſi, per 21 prop. lib. 1 Con.

§ XII.

Aliter 3.

Datis diametro, & latere recto, ellipſim deſcribere.

Datis vtralibet diametro AC, & latere recto AH, ſignentur crebra puncta F, M in diametro AC, per qua ducantur FE, MB, fiatque vt diameter AC ad rectum latus AH, ita rectangulum ſub AF, FC ad quadratum FE, itemque vt AC ad AH, ita AMC ad quadratum MB, erunt E, B in ellipſi, per eandem 21 propoſ. Apollon. qua vtitur etiam Serenus in prop. 18 lib. 1. de ellipſi cylindrica, & in ſeq. 19 oculis ipſis oſtentat ellipſim è communi ſectione obliqua Cilindri cono incluſi. Habes verò ad facilitatem praxis à vobis ad propoſ. 20 huius, § 5, modum faciendi vt ſit rectilineum ad ſimile rectilineum, quemadmodum linea ad lineam.

§ XIII.

Aliter 4.

Data diametro maiore, deſcribere ellipſim.

SIt data AB pro diametro maiore describendæ ellipsis. Bifarietur in C, quo centro, & interuallo vtrolibet CA describatur circulus AEBD, ducaturque ad angulos rectos per C altera circuli diameter DE, cui parallelæ agātur (quo crebriores eo melius) à diametri AB punctis F, N, ad circumferentiam rectæ FG, NI, sumptoque arbitrario puncto M in semidiametro CE magis, vel minus distante à C, prout maior, vel minor secunda ellipsis diameter lubita fuerit. Fiatque vt CE ad FG, ita CM ad FK, vt FG ad NI, ita FK ad NL, ac deinceps per inuentionem quartæ proportionalis fiat progressio versus B, erunt M, K, L in ellipsi, & per ea ducta leniter curuata erit ellipsis.

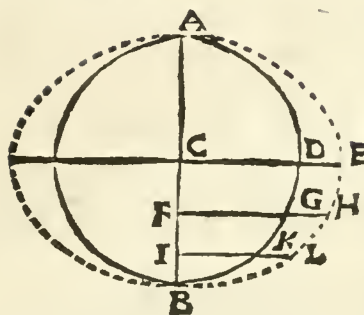
Demonstratio huius praxis facilis, ac breuis supponit tamen & ipsa 21 propos. citatam lib. 1. Con. Quoniam enim per constructionem, vt CE ad FG, ita CM ad FK, ergo, per 22 huius, erunt vt quadratum ex CE ad quadratum ex FG, ita quadratum ex CM ad quadratum ex FK. Sunt autem per 13 huius, CE, FG mediæ proportionales inter AC, CB, AF, FB; ergo, per 17 huius, quadratum ex CE æquale est rectangulo (siue quadrato propter æquales semidiametros) sub AC CB, & quadratum ex FG æquale rectangulo sub AF, FB, ergo erit etiam vt rectangulum ACB ad rectangulum AFB, ita quadratum ex CM ad quadratum ex FK, ergo per 21 propos. lib. 1. Con. puncta M, K sunt in ellipsi. Parique modo demonstrabitur de L, ac alijs ex constructione per quartas proportionales inuentis.

§ XIV.

Aliter 5.

Data diametro minore, ellipsim describere.

In



IN antecedenti problemate ellipsim intra circulum, in hoc circa circulum describemus. Sit data minor diameter AB describendæ Ellipseos. Vt in antecedenti problemate, describatur circa datam diametrũ circulus, & ad rectos ex C producatur semidiameter CD quantum lubitum fuerit in E, pro determinatione maioris diametri ellipticæ. Ad AB agantur ordinatim à circumferentia FG, IK. Fiat vt CD ad CE ita FG ad quartam FH, & vt FG ad FH, ita IK ad IL, erunt E, H, L, &c. in ellipsi. Quod demonstrare licet vt in antecedenti. Nam sunt quatuor lineæ proportionales CD, CE, FG, FH, & ipsarum quadrata proportionalia Vt quadratum CE ad quadratum FH, ita quadratum CD ad quadratum FG et CD est æquale rectangulo ACB: & FG rectangulo AFB; ergo vt quadratum CE ad quadratum FH, ita rectangulum ACB ad rectangulum AFB. Quæ est proprietas in ellipsi applicatarum. &c. ex Apollon.

§XV.

COROLLARIA.

1 VIdes quemadmodum ope circuli describatur ellipsis; & ellipsim esse (iuxta suum nomen) deficientem a circulo ex minore ellipsis diametro, esse excedentem circulum ex maiore diametro.

2 Vides deficientias, & excedentias illas esse proportionales, & in alterà figurà ordinatim actas in circulo ipsas CE, FG, NI proportionaliter secari ab ellipsi in punctis M, K, L, in altera ordinatim actas in ellipsi ipsas CE, FH, IL proportionaliter secari a circulo in D, G, K.

§XVI.

SCHOLION IV.

Compendiũ pro operationibus antecedẽtibus.

AD facilitatem praxeon antecedentium satis est modis prædictis describere vnam quartam partem ver.gra. EB. Nam ad eiusdem præscriptum decurtabuntur rectæ apllicatæ ad axem AC, vt per earum terminos deducantur reliquæ quartæ sectionis ellipticæ.

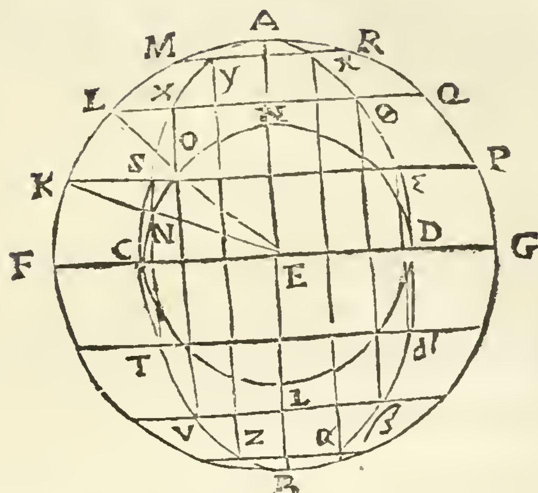
§ XVII.

Aliter 6, ac Praxis —

— Facillimè per mutuas sectiones rectarum ellipsim describendi, vnà cum indicata demonstratione.

VT magis, ac magis Tyronum facilitati consulamus, lubet hìc apponere praxim, qua, sine cognitione, ac vsu vel lateris recti, vel proportionalium linearum, per mutuas sectiones linearum vtrique diametro describendæ ellipsis parallelarum facillima fit, & ingeniosissima, nec admodum vulgata descriptio ellipseos. Est ea praxis Corollarium apud Commandinum in libro de Horologiorum descriptione post aliqua demonstrata, de quibus nos hic inferius post praxim.

Accipe vel datas, vel tibi ad libitum finge pro vtraque diametro ellipsis rectas AB, CD, quas ad rectos, & bifariatas iunge in E. Quo centro, & interuallo vtriusque semidiametri describe geminos circulos maiorem AGBF, minorem HDIC. Diuiso maiore circulo in quotlibet partes æquales in K, L, M, &c. ad ea diuisionum puncta, & ad cen-



centrum E iunge regulam (pro qua stant recta EK, EL) & vbi ea secabit minorem circulum fiant puncta N, O, &c. eruntque vterque circulus proportionaliter diuisi. Per puncta diuisionum maioris circuli ducantur diametro minori CD parallelæ KP, LQ, MR, &c. per puncta verò diuisionum minoris circuli ducātur diametro maiori parallelæ ST, XV, YZ occurrentes parallelis minori diametro in punctis Z, V, T, S, X, Y, parique ratione ex altera parte in α, β, δ, ε, θ, κ. Quæ omnia puncta si cum A, & B leniter curuatâ linea iungantur, erit descripta ellipsis, qualem in figura vides lineatam A θ D β B V C X A.

Cuius facillimæ, atque ingeniosissimæ praxis demonstratio pendet ab obliquatione circuli æqualis ipsi AGBF, & secantis communi diametro, & sectione AB planum AGBF. Dum enim circulus circa cōmunem diametrum AB obliquatur, perpendiculares ab vtraque obliqua semiperipheria partim demissæ, partim erectæ in planum AGBF signant puncta obliquati circuli in ellipsim ibi, vbi communes, ac mutuæ fiunt sectiones planorum traductorum perpendiculariter per diuisiones vtriusque circuli tam obliqui, quam ipsius in plano non obliqui AGBF.

Hæc medulla est gemini theorematis, geminæque demonstrationis apud Commandinum, à quibus pendet, ac prodit praxis hìc apposita. Supponunt eæ demōstrationes aliqua e lib. 11 elem. Eucl. ac vtuntur & ipsæ prop. 21 lib. 1. Con. Eas vide apud Commandinum lib. cit. de Horolog.

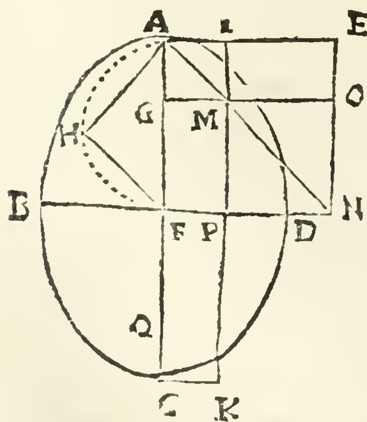
 Hìc,

Hìc, ne interim Tyrones implicemus, omittimus, vbi praxen inprimis quærimus. Cum Tyro librum 11 didicerit, poterit scientificè eas demonstrationes percipere, præsertim iam a nobis instructus breuissimo earum compendio, quod hìc præmisimus.

§. XVIII.

Vsus propos. 28 pro inuentione geometricà gemini puncti ex applicatione, siue comparatione in ellipsis maiore axe, ad eorum punctorum vsus præclaros.

PVnctum est quoddam, ac geminum in axe maiore ellipsis, à quorum punctorum inuentione mira promanant ad vstiones, illuminationes, auditiones, ellipsis ipsius descriptiones, vt habes aliqua exempla apud nos in Apiar. 10 Progym. 2. Vocant conici Philosophi ea puncta ex comparatione, quia inueniuntur ex vsu huius 28 prop. qua (vt nos mox) docetur: Comparare ad axem maiorem ellipsis rectangulum æquale quartæ parti figuræ sub latere recto, & diametro transuersa deficiens figura quadrata.



Itaque ad ellipsis ABCD axem maiorem, siue latus, vt vocant conici, transuersum AC sit comparandum, siue applicandum rectangulum æquale quartæ parti figuræ rectangulæ sub lateribus transuerso AC, & recto AE, deficiens quadrato. Quoniam diameter minor BD, iuxta indicata in antecedentibus ex Apollonio, est media proportionalis inter CA, AE, erit quadratum ex BD æquale rectangulo sub CA, AE, per 17 huius. Igitur quadratum ex alterutra dimidia ipsius BD, seu FD, erit quarta pars figuræ sub CA, AE, ex 20 huius. Super ipsius CA dimidio FA describatur semicirculus AHF,

HF, atque in eo aptetur AH æqualis ipsi FD, quæ cùm sit dimidia totius BD, quæ minor est tota AC, erit eadem FD minor dimidià totius AC, idest ipsà AF, ac proinde poterit aptari in semicirculo AHF. Iungatur HF, cuius interuallo, ac centro F fiat sectio in G, quod erit punctum applicationis, siue compartitionis cum deficientia, &c. Centro A, interuallo AG fiat sectio in I, & ductis ex I, & G parallelis ipsis AG, AI, compleantur rectangula GI, AK. Dico GK applicatum ad AC & esse æquale quartæ parti figuræ sub CAE, & deficere figura GI quadratà.

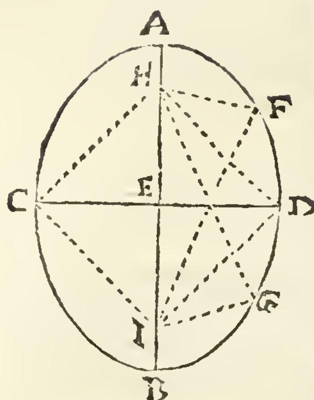
Ducatur enim diameter AM, fiatque quadratum ex AF, quod sit FE; quoniam parallelogrammum GI, ex constructione laterum æqualium GAI, quadratum est, hoc est simile, similiterque positum, & communem angulum habens A cum quadrato FE, ergo erunt circa eandem diametrum AM productam in N, per 26 huius. Productà GM in O, erit circa eandem diametrum AN & ipsum PO quadratũ, per 24 huius.

Iam vero gnomoni PGIO æquale est rectangulum GK; est enim rectanguli CI dimidium, ex constructione, CP æquale dimidio FI; & FM, per 43 primi; est æquale ipsi ME; ergo totum rectangulum CM toti gnomoni æquale; est autem eidem gnomoni æquale quadratum ex AH (per ea quæ demonstrata à nobis habes ad 47 primi, vbi gnomonem dupliciter quadramus) hoc est, ex antecedentibus, quarta pars rectanguli CAE, ergo eidem ex AH, siue figuræ quartæ partis ex CAE, æquale est rectangulum CM, deficiens figura quadrata, &c. Quod opportuit applicare ad axem, siue ad diametrum transuersam, siue maiorem, AC ellipsis ABCD, vt inueniretur G pũctum applicationis, siue comparationis deficientis. &c.

Pari ratione fiet applicatio, seu comparatio ad eandem AC pro pũcto Q, eruntque inuenta duo G, Q puncta ex comparatione, siue applicatione in ellipsis maiore diametro.

§. XIX.

Altera praxis geometrica inueniendi èadem gemina puncta applicationis in maiore diametro ellipsis.



Datis vtraq; diametro maiore AB, minore CD ellipsis ACBD se in E bifariantibus ad angulos rectos, accipiatur ex maiori diametro interuallum vtrumlibet dimidium EA, & ex C, vel D fiant sectiones in H, & I, sent autem quoniam CH, CI sunt minores, quàm imaginatæ datæ CA, CB, quæ ob angulos rectos ad E, quibus subtenduntur, sunt maiores ipsis AE, EB, &c. per 19 pri. Erunt H, I gemina puncta applicationis, siue applicati rectanguli ad AB, vel ex B ad H, vel ex A ad I, deficientis quadrato, & æqualis quartæ parti figuræ sub latere transuerso AB, & latere recto imaginariè educto ex A. Huius praxis demõstratio est ex conuersa propositionis 52 lib. 3 Con. Apollonij. Nam rectæ CH, CI, ipsi axi AB æquales, inclinatæ sunt ex punctis H, I ad C in sectione elliptica, ergo puncta H, I sunt ex comparatione, siue applicatione rectanguli. &c.

Propositio Apollonij est: Si in ellipsi ad maiorem axem ex vtraque parte comparetur rectangulum æquale quartæ parti figuræ, deficiensque figura quadrata, & à punctis ex comparatione factis ad sectionem rectæ lineæ inclinentur, ipsi axi æquales erunt. *Conuersa est* Si à sectione inclinentur ad axem maiorem ellipsis rectæ lineæ ipsi axi æquales, puncta inclinationis in axe erunt ex comparatione rectanguli, &c.

§ XX.
SCHOLION V.

Praxis ex punctis applicationis, &c. ellipsim describendi.

Scilicet vel geometricè per varias inclinationes (siue mutuas per arcus sectiones) rectarum æqualium diametro maiori, & edu-

ctarum

ctarum a punctis comparationum; siue organicè per filum, &c. vt iam vulgatissimum est ex cit. 32 prop. lib. 3 Con. tum apud alios, tum apud nos etiam in Apiar. 10 prog 2 & in to. 1 huius Ærarij ad propos. 7. Non sunt hìc iteranda, sed tantùm indicanda quæ alibi fusè sunt explicata. Illuc vise. Vestigium hìc habes in IGH, IDH IFH.

§. XXI.

SCHOLION VI.

Punctorum applicationis ad axem maiorem Ellipsis miræ affectiones, ac vsus aliqui tantùm indicati.

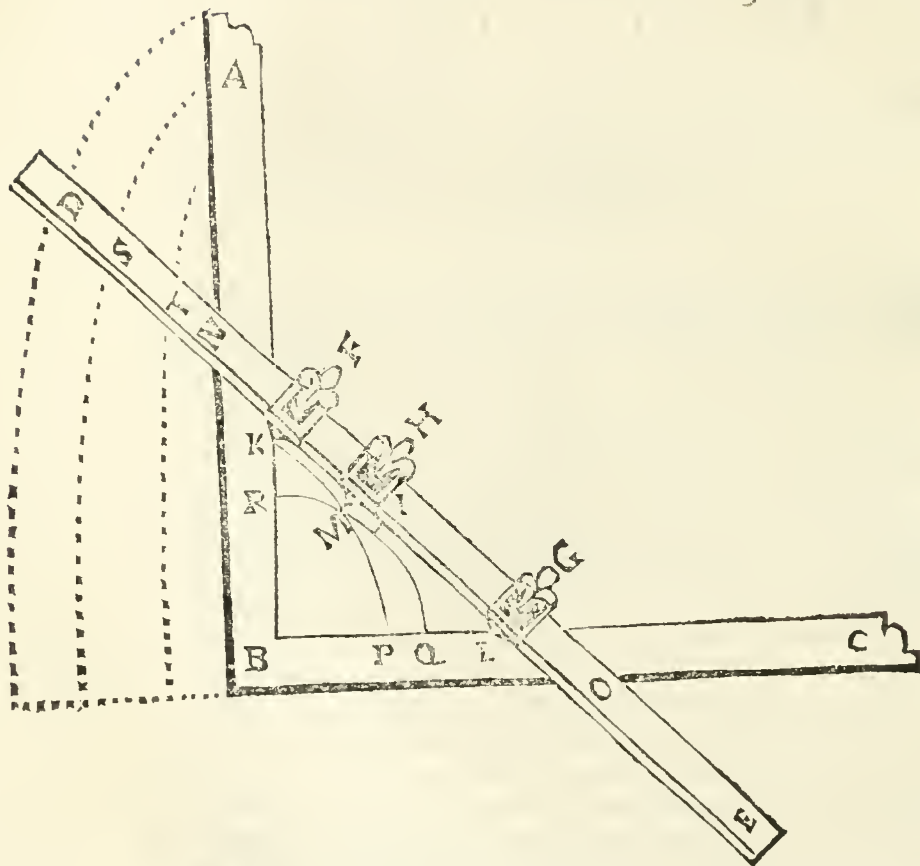
NImirum aliqui sunt ex ijs, quos indicatos habes in § 7 ad definitionem de linea in to. 1 huius Ærarij. Semel ibi posita nil est necesse hìc iterare. Tantum addo miram esse eorum punctorum efficaciam ad illuminationes, & vstiones, auditiones, &c. vt & hìc paullo inferius videbis, formato tubo elliptico.

Mira etiam proprietas eorundem punctorum est, vt ab alterutro quæcumq; incidentia per rectas lineas in latera ellipseos, omnia reflectantur ad alterutrum. Velut ab I incidentes rectæ in G, in D, in F, & in quotcumque alia infinita puncta ellipticæ superficiei, omnes reflectuntur ad alterum punctorum applicationis in H. Vide nos in Apiar. 10, & initio progym. 1, & sub finem prog 2. Ostenditur enim fieri in G, D, F, &c. incidentias, & reflexiones per angulos æquales ad contingentes lineas, ac esse omnium incidentium, ac reflexarum breuissimas à punctis illis geminis ad puncta illa gemina applicationis, &c. Vnde manant aliquæ praxes in anteced. indicatæ pro descriptione ellipseos. Habes in cit. ad definitionem de lineà, & hìc in antecedentibus, in primis in Apiarijs, habes, inquam, quo te cum iucunda admiratione ducat (si experiri velis indicata) exercitum hoc problema propos. 28.

§ 22.

§. XXII.

Praxis geometricè organica facillimo instrumento describendi ellipticas simul, & circulares lineas, datis earum diametris.



ICONOGRAPHIAM, & vsum indico, (non fabricam, & constructionem explico, quæ se se oculis produnt) instrumenti aptati ad præscriptionem verborum ex Proclo, quæ habes in 1 to. huius Aerarij § 5, & 6, ad definitionem rectæ lineæ. Vides ergo normam ABC,

ABC, & regulam DE, in qua duo cursores FG cochleolis firmati habent inferius in K, & in L, clauiculos non cuspidatos, sed retusos, ac læuatos, vt, radendo latera AB, BC in motu rectæ DE sub recto angulo ABC, nusquam offendant in papyro, in qua elliptica linea, vel circularis describuntur. Cursor vero H habet inferius graphiolum in M describendæ lineæ. Pro vnico hic posito graphio in cursore H tu, si lubet, plures intellige, atque appone, non solùm inter F, & G, sed etiam inter HD, & inter IE. Vltra præscriptum antiquorum rectam lineam inter K, & L inclusam sub angulo recto protulimus vtrinque etiam extra angulum rectum vsq; in D, & E, vt problema hoc habeat lineam rectam fœcundiorem pluribus ellipticarum linearum descriptionibus intra, & extra angulum rectum ab omnibus punctis rectæ DE secundùm partem KL motæ sub recto angulo KBL dum eodem motu describit etiam graphio in medio sui puncto I collocato lineam circularem.

Igitur, ad praxim, datis duabus diametris ellipsis describendæ maiore BK, minore BP, collocatur regula DE iuxta normæ latus BC, & accepta quantitate BP minoris axis, & iuxta eius interuallum collocatis, ac firmatis in regula cursoribus F, & H, itemque ad quantitatem maioris axis BK accepto in regula interuallo ML, firmetur cursor G in L. Mox læuæ manus pollice in B, & indice in A adpressis, dextræ pollice in G, indice in F adpositis, ita regulam DE mouebis sub angulo normæ, vt eodem tempore laticlauiculus L latus BC, & laticlauiculus K latus BA radant, eleuato indice ab A cùm regulæ pars D per A transibit, eritq; ab M descripta quarta elliptica PMK, sub angulo recto B, & extra angulum aliæ ellipticæ quartæ à punctis D, S, T, &c. & ab alijs inter OE.

Pro quarta circulari erit accipienda quantitas diametri, & eius interuallum KL in regula bifariandum erit in I, vbi graphium collocatum, & firmatum signabit QMR quartam circularem.

Similiq; modo erit operandum circa reliquas tres quartas ellipsis, aptata norma ad angulum rectum axium deinceps, & motà regulà sub normæ recto angulo, &c. iuxta demonstratam antiquorum abolitam mirificam, & facillimam rectæ lineæ sub angulo recto motionem, pro ellipsium descriptionibus continuato ductu peragendis.

Quod in exemplo hic factum est aptando regulam ad minoris diametri dimidium BP, & eius interuallo KM in regula apponendo interuallum ML maioris diametri BK, versa vice licebit operari aptando regulam ad maioris diametri alterum dimidium, & apponendo ipsi longitudinem semiaxis minoris, &c.

Huius organicæ operationis geometricam demonstrationem è coni-

cis

cis vide apud nos in Analectis iam vulgatis ad quartam editionem vostrorum Apiariorum, analecto 8 ad 1.prog.Apiar,3.

§ XXIII.

COROLLARIVM
Pro regula vniuersali operatoriá.

Semidiametri ellipſeos, atq; etiam circuli diameter in vnam rectam iunctæ, & ſub angulo recto motæ deſcribunt quartas ellipticas, & circulares.

QVod vides in interuallo KL, quod conſtat e ſemidiametro minore BP, & maiore BK ſimul iunctis, & puncto iunctionis M quartam ellipticam deſcribentibus. Pro quarta vero circulari punctum I diametri medium inter K, & L, &c. Vnde prodit regula vniuerſalis operatoria : In regula deſcriptoria diameter circuli ſecta inæqualibus ſemidiametris deſcribit quartas ellipticas, æqualibus deſcribit circulares, pũcto ſectionis moto ſub angulo recto.&c. *Sine pluribus ambagibus apud eos, quibus arcanum hoc antiquitatis ignotum hactenus extitit. Vnde etiam ſoluentur facillimo negotio ſequentia alia problemata, quæ aliqui alij operoſioribus curis diſtendunt.*

§. XXIV.

PORISMA.

Dato puncto ellipſis nondum deſcriptæ, ac altera diametrorum, alteram diametrum inuenire.

Re-

R*Eponatur hic figura § 4 ad definit. lineæ rectæ in to. 1 huius Aerarij. Finge datam esse diametrum maiorem ZT, & inchoatam ellipsis descriptionem peruenisse à Z ad punctum L, alteram diametrum minorem facilè sic inuenies. Bifariatà ZT in B, ducatur per B ad angulos rectos indefinita BA, mox interuallo semidiametri maioris ZB, ex puncto L fiat sectio in F, producta FL vltra L aum secat in G dabit LG semidiametri minoris quātitatem, cuius interuallo facta sectione ex B in O, erit BO semidiameter minor, & duplicata diameter minor ellipsis inchoatæ ex Z ad L.*

Versa vice si data sit minor diameter, siue semidiameter BO, & imperfecta ellipsews quarta ducta, puta ab O ad L, velisque maiorem diametrum non dessignatam inuenire, per B punctum bifariationis minoris diametri ducatur ad rectos indefinita BC Interuallo BO fiat sectio ex puncto L in G, producta GL in directum ad partes L, donec secet semidiametrum minorem productam in F, dabit LF quantitatem semidiametri maioris, cuius interuallo facta ex B sectio in Z, dat semidiametrum maiorem BZ, & duplicata totam diametrum ZT.

Rationes harum operationum patent ex corollario antecedentis

descriptionis ellipticæ per regulam, & normam, §§ 22, 23 anteced. Applica tu, ne nos sine necessitate simus prolixiores.

§ XXV.

PROBLEMA.

Datis duabus diametris, siue semidiametris ellipsis nondum descriptę, & quolibet puncto extra diametros dato, cognoscere an punctum id sit in ellipsi, an extra.

Propositum facillimo modo organico expedietur sic. Sint datæ duæ diametri siue semidiametri maior, & minor ZB, OB ellipsis nondum descriptæ, & datum sit punctum L. Vt scias an id sit in ellipsi, accipe regulam, quam finge esse rectam lineam TE, in eàque vtriusque diametri semisses notato, earumque iuncturam in L, & earum extrema opposita in G, & F. Applicatâ regulâ ad L punctum iuncturæ, si (mouendo ipsam TE circa L) puncta extrema G, & F præcisè incident in semidiametros BZ, & BO productam vltra O, punctum L erit in ellipsi.

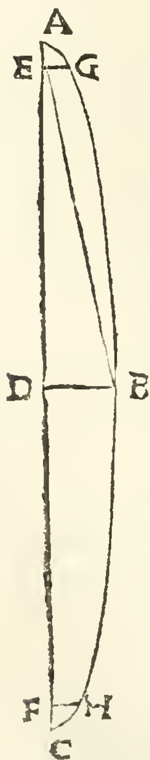
Sin autem aptatâ iuncturâ semidiametrorum in regula ad datum punctum L, extrema opposita G, F non incident in semidiametros, vel alterutrum tantum incidat in alterutram semidiametrum (etiam productam, si sit opus) punctum L non erit in ellipsi, cuius datæ diametri sunt; sed vel intra, vel extra ellipsim prout, prodet regula TE, aptatis extremis F, G ad semidiametros BZ, & ad BO productam etiam vltra F. Cuius explorationis organicæ geometricè patet ratio item è corollar. descriptionis per regulam, & normam, §§ 22, 23 antec.

§ XXVI.

COROLLARIVM Organicum.

Lamellam ſemiellipticã conſtruere conſtruendo tubo elliptico ad plura, in primis mirificè conducenti auditionibus.

COrollarijs geometricis, ac theoreticis apponamus & phyſicum, & organicum inſtrumenti, circa cuius conſtructionem paullo aliter verſati ſumus in Apiar. 10. progym 2. Inſtrumẽtum quod in antec. § 22 exhibuimus aptiſſimũ eſt deſcribendis ellipſibus oblongis, habentibus minorem diametrum valde breuem. Vides § 22, veſtigia etiam extra angulum rectum B ſignata à punctis D, S, T.



Finge igitur in eo inſtrumento ellipſeωn deſcriptorio compacto è regulà, & normà longioribus, ductam eſſe ſemiellipſen ABC, cuius maior axis AC ſit longitudinis arbitrariæ, puta tripa maris, minor axis BD ſit longitudinis internodij minoris digitalis.

Ad appoſitæ hìc, & deſcriptæ figuræ ſimilitudinem, pro exemplo, conſletur lamina, quæ truncanda erit iuxta puncta comparationis, quorum inuentionem ac vſum docuimus in antec. § 18, & 19.

Quæ obtruncatio fiet facillimè eo modo, quem docuimus in § 19, ſcilicet applicando ſemidiametri maioris interuallum alterutrum AD ex B in E, & interuallo EA abſcindendo ex A in E, ex C in F. Factæ ſectiones EG, FH dabunt obtruncatam ſemiellipticam lamellam, quæ circa EF, quaſi circa axem, gyrata, curuà ellipticà GBH excauabit formam in apta materia fundendæ ſuperficiei ellipticæ pro tubo aptiſſimo ad viſiones, illuſtrationes, vſtiones olfactiones, in primis ad auditiones perfectiſſimè efficiẽdas, & excipiendas, præter alios vſus ellipticæ lineæ, ac figuræ, quos vſus ad plura alia in varijs artibus, & ſcientijs indicatos habes è noſtris Apiarijs in § 7 ad definit. lineæ rectæ, to. 1 huius Aerarij. Vide in Apiar. 10 prog 2.

Quoniam, ex conicis citat. in cit. Ap. 10, ab altero

pun-

punctorum ex comparatione F ad alterum E fiunt omnes reflexiones linearum ab vtrolibet E, F incidentium in curuam GBH, scilicet per breuissimas lineas per quas operatur natura; ideo apposito ore loquentis ad alterutrum E, & aure audientis ad alterutrum F, vox per lineas breuissimas, & directas, & reflexas tota, & totaliter feretur ab ore in alterutro E ad aurem in alterutro F collocatam. Item apposito flosculo, vel odoriferæ fragrantiæ qualibet alia materia, puta in E, odoriferæ omnes lineæ directæ, & reflexæ cogentur in alterum punctum F, vbi ab olfactorio plenissimè ac suauissimè percipientur. Parique ratione de luminosis, visibilibus, &c.

§ XXVII.

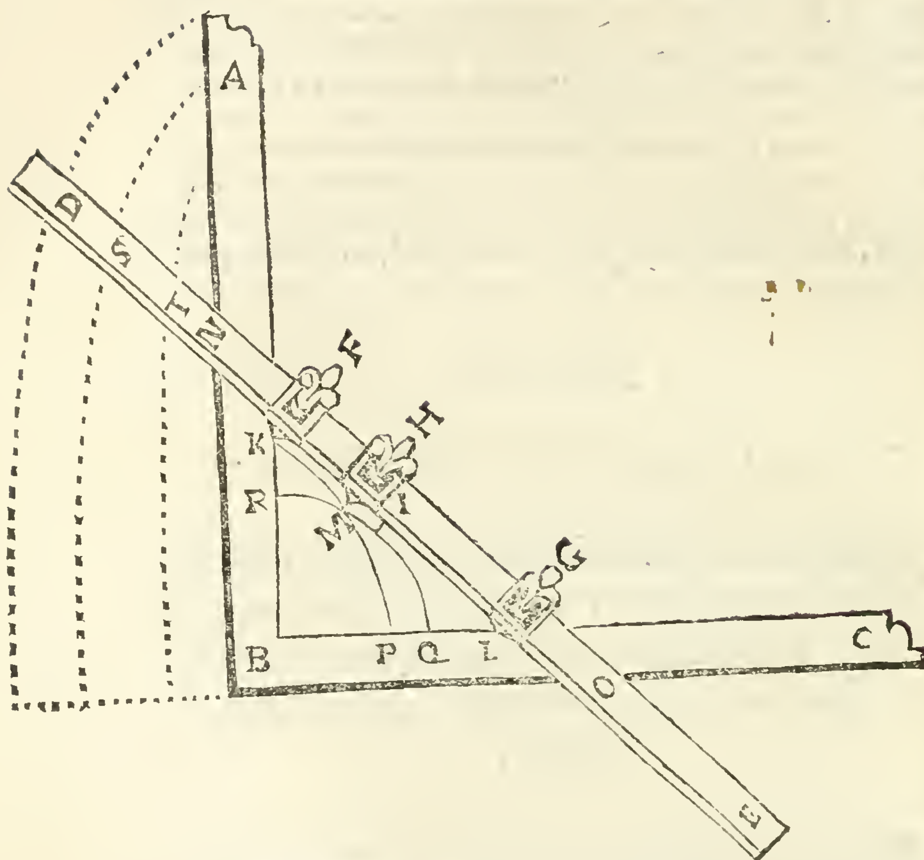
SCHOLION VII. in quo—

—Theoriæ, ac philosophationes geometricæ, nō sine paradoxis, circa operationes partium regulæ sub angulo normæ recto motarum. Aristotelis de motus localis generibus vindicatus.

INiurius videar in abstractionis geometricæ, ac speculatiuæ sciētiæ dignitatem, nisi etiam in organicis operationibus philosophicas in primis theorias persequar.

Recta mota sub recto angulo signat tres supremas species linearū —— Ab ijs tres motuū species.

Igitur habes, amice veritatum geometricarum Lector, in operationibus eius partis regulæ, quæ mouetur sub recto B normæ ABC; nempe ipsius LK eodem regulæ motu signatas (quod mirè iucundum est) tres linearum supremas species simplices, & mixtas, & simplicium duas circularem, & rectam. Quo geometrico fundamento fulcit Aristoteles motuum localium tria genera rectum, circularem, mixtum. Simplicium altera species est circularis QMR, altera species sunt duæ rectæ ab extremis K, L signatæ secundum latera recta, & orthogonalia normæ ABC. Mixtæ sunt, præter ipsam PMK, quotcumque aliæ ellipticæ, quæ duci possunt à quibuscumque punctis citra, & vltra I.



Definitiones triũ specierũ in lineis.

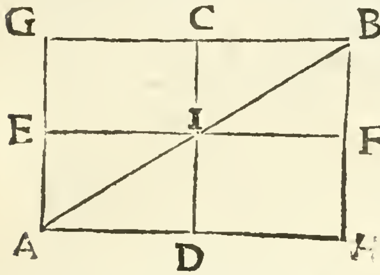
2 *Simplex alterutra BK, vel BL recta linea est, quæ, iuxta definitionũ in initio pri. To. huius Ærarij traditarum aliquam, habet omnia sua puncta in æquabilitate quadam breuissimà inter duo extrema B, K, vel BL.*

Simplex circularis QMR, quæ habet omnia sua puncta in æquabilitate eiusdem distantiæ à centro, siue à puncto altero extremo B semidiametri imaginatæ à B ad R, M, Q, &c. Mixta linea est elliptica P M K, quam producit motus mixtus ex rectæ KL motu recto in extremis K, & L, iuxta recta latera BA, BL, & ex motu circulariter obl. quo à P per M ad K.

3 *At enim etiam ipsa circularis QMR producta à motu puncti I est mixta. Nam eam producit puncti I motus mixtus ex rectæ KL mo-*

motu recto in extremis K, & L iuxta BA, BC, & ex motu obliquo circulari à Q per M ad R. Quo partiali geometrico fundamento labe factato, & subducta à circulari linea à specie simplicium, duo tantum linearum erunt genera, simplex recta, reliquæ mixtæ; & consequenter duæ tantum erunt species localis motus, rectus, & mixtus. Circularis enim linea, & motus ex motu, & operatione rectæ KL sub recto angulo B apparent mixta è gemino motu, &c.

Diameter in rectangulis fit è gemino motu eiusdem generis, idest recto.

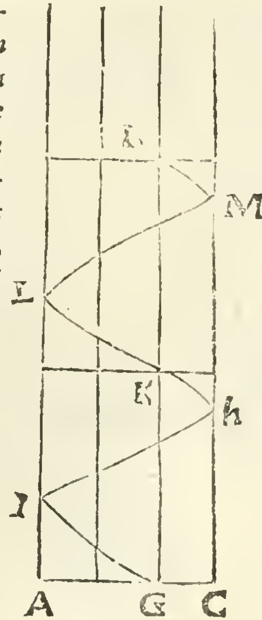


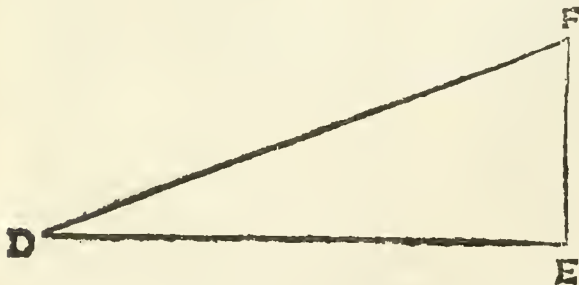
4 *Neque verò est quod affirmes non obstare lineæ simplicitati quòd a gemino motu producatur, ostendasq; in rectangulo progigni rectam simplicem lineam, diametrum AB, ex gemino motu rectarum CD, EF progredientium per latera GB, AH vel æquali celeritate in quadrato, vel proportionali in rectangulo. Respondeo enim geminos illos motus esse simplices, ac eiusdem generis, nempe rectos; at linea circularis QMR progignitur à diuersi generis motibus, recto extremorum K, L, obliquo ipsius I.*

Peripheria videtur fieri ex gemino motu diuersi generis.

Elliptica linea inæqualibus diame-

5 *Quod si eò confugias, & dicas differre obliquitatē circularem ipsius QMR ab obliquitate elliptica ipsius PMK, quòd QMR habet æquabilem quandam omnium sui partium positionem, quam non habet ipsa PMK, quæ inæqualibus diametris minore BP, maiore BK inæqualiter deducitur; habeo quod opponam à linea spirali circa cilindrum. Nam, iuxta ea, quæ habes à nobis in to. 1 ad propos. 5, helix circa cilindrum habet omnes sui partes ea inter se æquabilitate dispositas, vt faciant angulos æquales ad basim isoscelis trianguli*

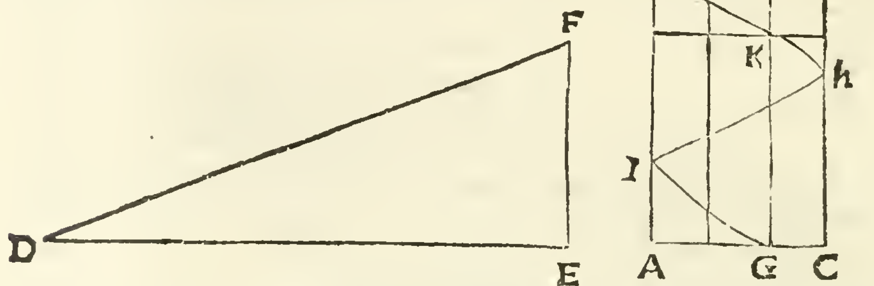




simi-

ſimilem in modum, quo facit & recta linea. Ea tamen helix, licet æquabili partium poſitione prædita, eſt mixta, quia producitur a duobus diuerſi generis motibus, recto, & circulari.

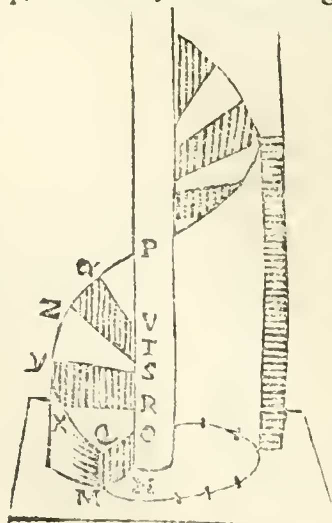
6 Recole quæ habes à nobis in to. 1. huius Ærarij ad defin. de linea, § 8. In repoſita hic figura, dum recta GK tota perpẽdiculariter, & circulariter fertur ſui extremo G circa cylindrũ AB, ac delata eſt in ipſam AL, eodemq; tempore punctum à G, motum per eandẽ rectã, pertigerit in I, patet obliquam GI ſpiralem ſignatã eſſe,



Helix circa cilindrum tamix-, quia fit a recto, & circulari motibus ſpecie diuerſis.

nempe mixtam e motu circulari perpendicularis GK, & recto puncti ex A ad I per rectam AI. Quod etiam patet circumpoſito triãgulo FED ipſi cilindro; ſunt enim imaginandæ infinitæ rectæ perpendiculares baſi DE ſemper creſcentes verſus EF, & ſignatę à puncto perpendiculariter ſurſum elato, dum extrema linearum circulariter delatarũ ſignant ipſum DE. Vt vero aliquatenus appareat in ea mixtione ſimilaritas, ſiue ęquabilis partium poſitio, confugiendum eſt ad alteram definitionem, & conceptionem generationis eiuſdem helicis cilindricæ, qua nos vſi ſumus ex Proclo (dupliciter helicen cilindricam definiente) ad propoſ. 5 pro exigentià propoſiti eo loco problematis.

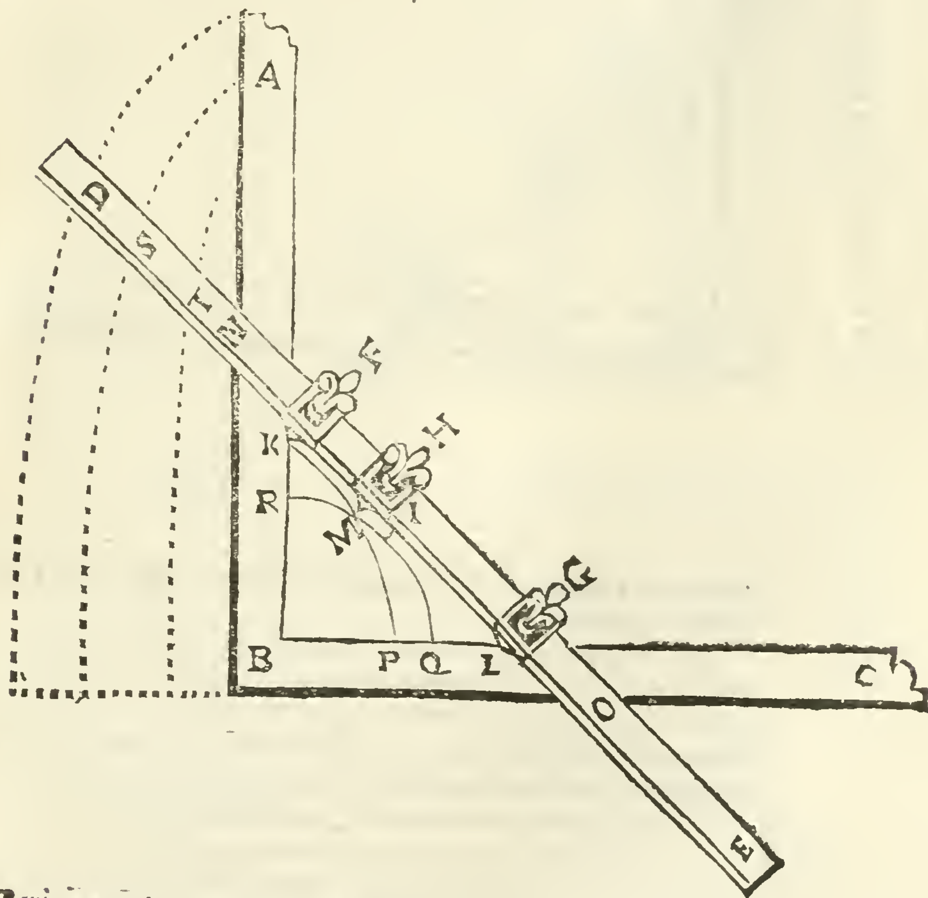
tris inæqualiter deducitur.



7 Itaque concipe animo rectã OP pro axe cylindri, & OQ quaſi ſemidiametrum ductam ab axe ad ſuperficiem

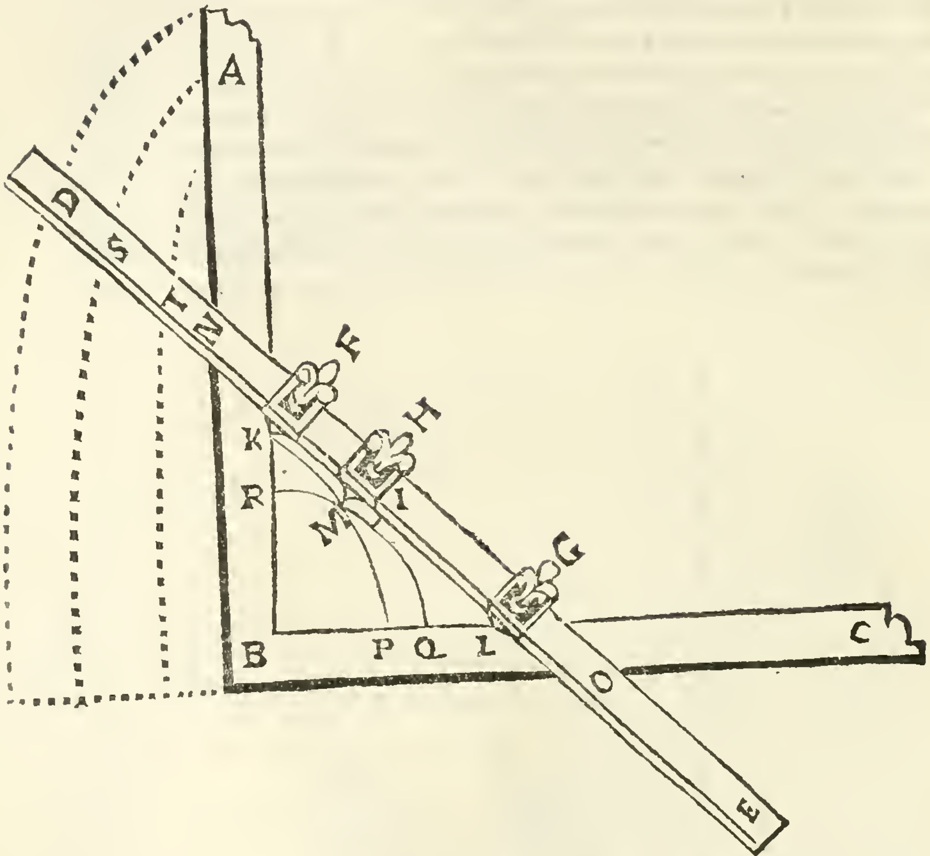
ficiem cilindri, ac eam semidiametrum eodem tempore moueri altero sui extremo O per axem OP cilindri ad R, S, T, V, altero verò extremo moueri orbiculariter circa cylindri superficiem ad x, y, z, α; igitur dum eàdem OQ altero sui extremo fertur circa, & per axem, altero etiam signat curuam QYP, quæ omnibus sui partibus distat semper eàdem semidiametri OQ quantitate ab axe OP; vnde videtur quædam æquabilis partium positio, siue similaritas. Tamen ea partium similaritas, & æqualis ab axe distantia non eximit helicen à numero mixtarum, quia prodit à diuersi generis duplici motu, altero per superficiem cylindricam circulariter, altero per rectam axis lineã in cilindro.

Ostensio geometrica vide partium similaritas ī helice circa cilindrum.



Pari ergo ratione, quia circularis linea QMR in fig. hìc conficitur ex motu punctorũ K, L per rectas LB, BK, & ex motu pũcti I obliqui,

 erit



erit & ipsa mixta, licet punctum I æquali semper distantiâ à B feratur ex Q per M in R.

8 Vides, mi Tyro, quæ paradoxa inuehat mirificus ille motus rectæ sub angulo recto, Circularis enim eadem linea QMR simplex, & mixta videtur; simplex dum centro B, & interuallo eiusdem semidiametri BQ vniformi à centro B distantiâ ducitur, mixtà verò dum signatur à puncto I delato à rectà KL extremis K, L se mouente, licet ipsius delatio fiat eàdem semper distantiâ semidiametri.

Ratio geometrica cur circularis linea sit simplex.

9 Nihilominus tamen affirmandum est circularem lineam esse alteram speciem simplicium linearum, quia licet ab admiranda ea rectæ lineæ sub recto angulo delatione (extra vsitatum modum descriptionis per semidiametri gyrationem) fiat per duplicem motum, recto ex-

tre-

tremorum K, L, obliquo à medio I; tamen ea obliquitas est planè, ac prorsus semper vniformis, & semper vniformiter distans ab vno eodemque puncto, hoc est centro B, ac proinde est verè circularis, iuxta circuli definitionem, ac simplex, faciensque omnium partium curuæ QMR non solum similaritatem, sed etiam æquidistãtiam ab eodem B.

Quoniam verò linea fit à motu puncti, vt linea sit mixta opus est punctum ipsum, à quo linea fit, mixto, & diuersiformi motu ferat ur; nec refert, verbi gratia punctum medium I esse quasi particulam lineæ, siue esse in linea, cuius extrema alio motu, scilicet recto ferantur, ac diuerso, à quo mouetur ipsum I, modò motus ipsius I sit vniformis non mixtus ex duplici diuerso motu. Est autem vnicus, & vniformis motus puncti medij I, at aliorum punctorum citra, & vltra I motus, vt ipsius M, est non vniformis, sed mixtus ex duplici, per obliquum quasi recto, & circulari, & difformi ex vtroque. Pariter in spiralibus lineis, ac præsertim circa cilindrum, eæ fiunt a puncto extremo lineæ, quod punctum ipsummet difformiter obliquè fertur, ac licet cum eàdem semidiametri distantiã, tamen non ab eodem puncto, & centro (vt in circularis lineæ ductu) sed à diuersis punctis axis in cilindro. Fitque fortasse partium similaritas (cuius similaritatis definitionem vide apud nos ex Proclo, ad 5 prop. lib. 1. Elem.) in cilindrica spirali ab eadem semidiametri distantiã ab axe cilindri, at mixtio eiusdem lineæ spiralis cilindricæ fit ex diformi motu obliquo, &c. vt prædictum est. Potest verò esse similaritas partium, etiam in mixtis, nec idem sunt æquabilitas partium inter se, & æqualis partium distantia ab eodem puncto, ac centro.

Quid requiratur ad mixtã lineã

Etiam similariũ partium lineæ mixtæ aliquæ.

In antecedentibus descriptionibus ellipticæ lineæ, præsertim in quarta, & 5, quæ fiũt ope circulorum, patuit ellipticã lineam fieri per proportionalẽ deficientiã minoris axis, & proportionalem excessum maioris à circuli diametro, ac propterea ellipsis est linea vniformiter diformis, quemadmodum & spirales in plano, & circa cilindrum; at circularis est non modo vniformis, sed etiam vniformiter vniformis. Sunt cæteræ illæ lineæ orbiculares, sed non circulares, idest à puncti motu obliquo mixto, ac diformi, non ab obliquo vniformi.

Confirmatur geometricè mixtio in ellipticà linea — — & in spiralibus.

Vide ellipticam PMK productam à recta KL puncto M, non medio, sed inequaliter distante a K, & L, & duobus KM breuiore, ML longiore quasi cruribus claudicante, ac difformiter progrediente. At medium I dum æqualibus cruribus IK, IL vniformiter defertur, quid mirum si vniformem circularem QMR designat?

Ex antedictis in postrema parte harum theoriarum habes quo, ni

 fallor,

fallor, satisfiat dubitationibus, & firmetur Aristotelis assertio de triplici motu locali naturalium à triplici linearum specie, mixtis, & geminis simplicibus rectà, & circulari.

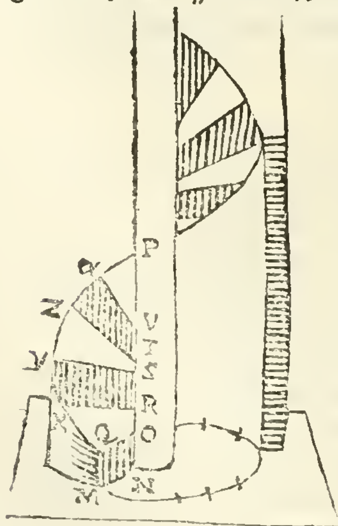
§ XXVIII.

COROLLARIUM.

Ad Architecturam, & Machinariam.

Vel ipsæ lineæ geometricæ vtilissimæ sunt ciuili vitæ.

QVi Geometricas theorias humanæ, ac ciuili vitæ inutiles putant, habent vnde se falsos videant etiam in primis, ac simplicibus figurarum Geometricarum elementis, scilicet in ipsis lineis, quarum (vt alias omnes speties omittam) vides, mi Tyro, à sola spirali cilindricà plurimas vtilitates manare, quarum præcipuas indicauimus in fine § 8 ad definitiones de linea, & eas in praxi exhibuimus in Apiarijs nostris. Ac interim hìc habes in anteced. § ex duplici spiralis cilindricæ definitione, atque ex vtraque figura non solum essentiam, sed etiam effectiones, & vsus eius mixtæ lineæ. Nam in figura PYQN vides applicatam secundam spiralis definitionē in constructione, & vsu scalarum, quas cochlides appellant, vulgo: a Lumaca. *Nam semidiametri æquales, & axi perpendiculares (siue eadem semidiameter altero sui extremo percurrens axem PN) signant quasi scalarum orbicularium gradus NQ, RY, Tα sub æqualibus (licet in obliquitate figuræ inæqualibus ad oculū) NM, OQ, RX, SY, TZ, Vα; &c. Nec admodum absimili forma constāt spirales cuneatæ circa cilindros in re machinaria. Quarum schemmata vide apud Pappum li. 8 extremo; apud Vitruu. l. 10, & apud Guidubald. &c*



Itaque cilindrus ad horizontem perpendicularis, vt facile vel pondera

ra in arcto spatio attollat, vel iuxta se homines sine labore ascendentes habeat, vtitur spirali vel cuneatà, vel scalari constructis iuxta definitionem alterã de semidiametro per axem meante, &c. Vt verò aquas facillimè hauriat, & mirificè deprimendo attollat, cilindrus inclinatur ad angulum acutum cum horizonte, & vtitur spirali iuxta alteram definitionem lineæ circulariter, & perpendiculariter meantis, & crescentis circa dorsum ipsius cilindri. Iterum moneo, vide vtramque definitionem in tom. 1 huius Aerarij in initio § 8 ad definitionem lin. & in § 2. ad propos. 5. num. 3, & pro spiralis cuneatæ viribus vide Pappum in lib. 8 extremo. Sic ergo etiam circa linearum formas, naturas, mixtiones geometricæ theoriæ non sunt humanis vsibus otiosæ, ac steriles, sed fœcundissimæ plurimarum vtilitatum, quas priuato, & publico bono pariunt. Hæc vt antecedentis § theorijs praxes aliquas saltem indicatas apponeremus, in eorum saltem gratiam, qui omnia vtilitate metiuntur.

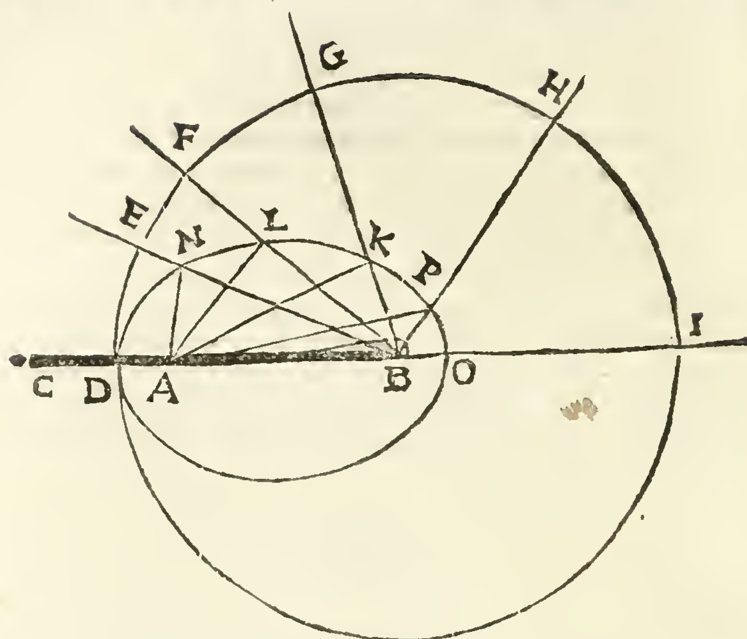
§. XXIX.

PRAXIS ORGANICA.

Super datà rectà lineà aliter eodem regulę motu ellipsim, & circulum se contingentes describere.

ALiter, inquam, quàm in § 4 ad defin. 2, & hìc § 22, vbi eodem regulę motu sub norma descripsimus ellipsen, & circulum, nunc hìc easdem lineas circularẽ, & ellipticam etiam se in puncto verticis elliptici contingentes eodem regulæ motu describemus.

Atq; hoc problema organicè prodit quid agat regula, præter ellipseos descriptionem, quam apposuimus gyratilem circa alterũ punctorum ex comparatione in figura describendæ ellipseos Api. 10, Prog. 2, &c Ibi tacitum, nec necessarium vsum hìc aperimus ex occasione secundi modi describendarum eodem regulæ motu linearum ellipticarum, & circularium.



Sit AB data, facto centro altero eius extremo B, ibi figatur circa clauiculum latus gyratile regulæ CB, quæ sit longior datâ AB, sitque in D cursore firmatum graphiolum. Sit fili (vtroque extremo fixi in A, B extremis datæ) longitudo lubita vltra A ad D replicati, atque ibi interponatur cuspis signatoria styli manu sinistra dirigendi. Dum dextra, regulæ BC cursore D apprehenso, circulariter mouetur in E, F, G, H, I, signatq; semiperipheriam circularem, eodem tempore sinistra stylum scriptorium sub tensi fili angulo premat, ac radat regulæ latera, vt vides in D, H, L, K, P, O, per quæ puncta semiellipticum orbem signabit à communi puncto contactûs D; vbi erit industriæ geometricæ aliquas organicæ operationi, si sit opus, ferre suppetias, & efficere vt cursoris graphium, & styli cuspis in D pariter congruant.

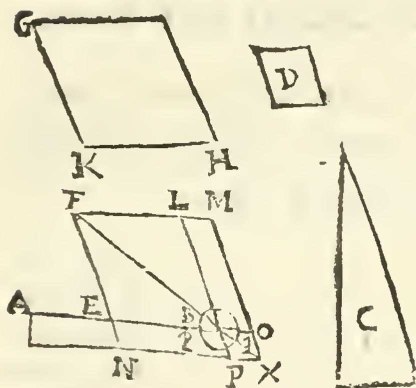
Altera semiperipheria, & semiellipticа linea eodem modo ducetur ad partes citra, & infra AB.

Huius praxis demonstratio pendet à propos. 52. lib. 3 Conic. citatâ tum in schol. post § 3 ad 7 prop. lib. 1. Eucl. tum hìc in antecedentibus in § 19, seu alterâ praxi geometrica, vbi aliter puncta ex comparatione in ellipsi comperimus.

Pro-

Propoſ. XXIX. Probl. IX.

Ad datam rectam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, ſimili alteri datæ.



SIt datâ rectâ AB; & rectilineum C, cui oporteat ad AB æquale applicare, cui autem ſimile eſſe debeat excedẽs ſit D.[a] Biſecetur AB in E, a propoſ. 10.1.
[b] deſcribaturque ſuper EB parallelogrãmum ſimile, b propoſ. 18.6.
ſimiliterque poſitum ipſi D, æquale verò vtriq; B-F, & C, & ſimile ipſi D[c] c propoſ. 25.6.
fiat GH, quod ipſi FB ſimile erit. Sit autem latus KH homologum lateri FL, KG ipſi FE. Et cum GH maius ſit, quam F-B, erit & KH maior, quàm FL, & KG quam FE: producantur FL, FE, vt ipſis KH, KG æquales fiant, in M, & N, compleaturque MN, quod ipſi GH æquale, & ſimile eſt. Sed ipſi GH ſimile eſt EL; [d] eſt ergo & MN ipſi EL ſimile. [e] Sunt ergo d propoſ. 21.6.
circa eandem diametrum: quæ ducatur, & ſit FX, compleaturque figura. Quia ergo GH tam ipſis EL, & C, quam ipſi MN e propoſ. 26.6.
æquale eſt; [f] erit & MN ipſis EL & C æquale. Commune EL f ax.1.
tollatur; & erit gnomon Y ipſi C æqualis. Cumque EA ipſi EB ſit æqualis; [g] erit & AN ipſi NB æquale, hoc eſt, [h] ipſi LO: g propoſ. 36.1.
commune addatur EX, eritque totum AX toti gnomoni Y h propoſ. 43.1.
æquale: ſed gnomon ipſi C æqualis eſt: erit ergo & AX ipſi C æquale. Ad datam ergo AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum AX applicatum eſt, excedens figura parallelogramma PO ſimili ipſi D, [i] cum & EL ipſi OP ſimile ſit. Quod i propoſ. 24.6.
oportuit facere.

Scho-

SCHOLION I.

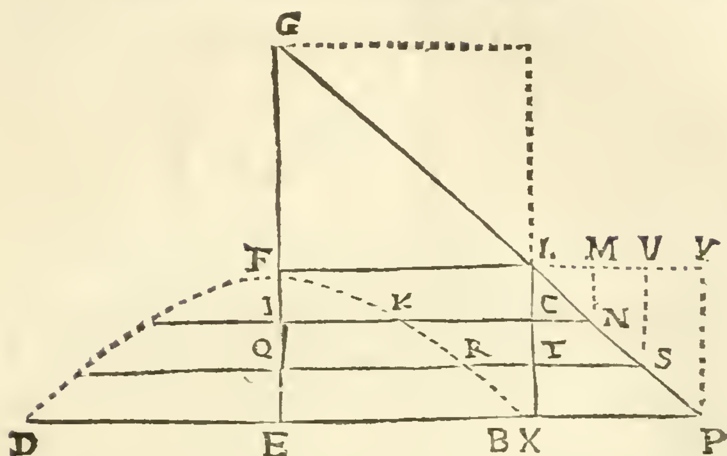
QVando applicatio hyperbolica, ſiue cum exceſſu, &c. facienda eſt ita, vt excedens figura ſit quadrata, tunc facilior eſt operatio huius 29 propoſitionis; & expeditum modum habebis à nobis inferius in § 6 ad hanc 29.

§. I.

VSVS 29 propoſ. in Conicis ad Eximia.

De Geometrica applicatione cum exceſſu, quæ Græcis ὑπερβολὴ. Id nomen inditum conicæ ſectioni ab vſu huius 29 propoſ.

APollonius in prop. 12. lib. 1. Con. demonſtrat ſi ſiat à plano ſectio coni CDGF ita, vt ſectionis, qualis GAH, diameter BA producta extra conum coïcidat alteri lateri coni, ſiue trianguli facti à ſectione coni per axem, velut ipſi FC producto in E, qua-



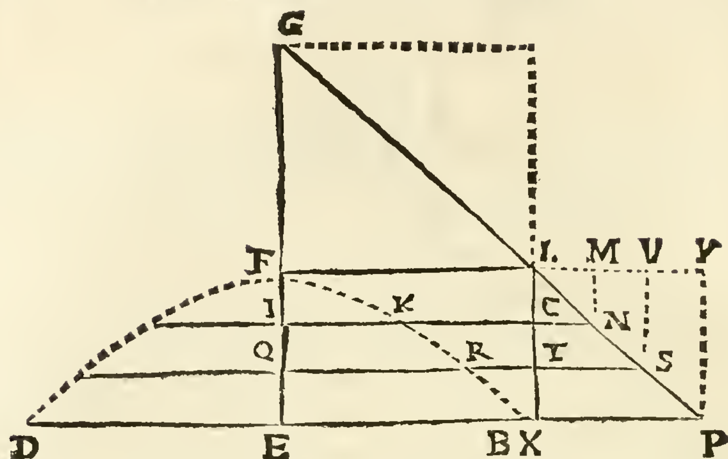
quadrata applicatarum (in altera figura sectionis à cono seductæ, distinctionis maioris gratia pro Tyronibus) ad axem FE, velut ipsius IK quadratum esse æquale rectangulo applicato ad lineam LF (quam vocant latus rectum figuræ sub LF, FG, quam FG vocant latus transuersum) cum excessu figuræ simili figuræ sub LF, FG, quale est rectangulum IM sub NI, & sub intercepta IF, quod ita adiacet, siue applicatum est ad FL, vt excedat figura MC simili figuræ sub LFG; quæ figuræ sunt circa eandem diametrum eductam ab extremo G lateris transuersi per L extremum lateris recti ad N, &c. Ac propter eam excidentiam, &c. Eam vocat Apollonius sectionē BFD hyperbolen.

§. II.

PRAXIS I. GEOMETRICA—

—Lineam applicationis excedentis datæ hyperboles facillimè inueniendi.

EX antecedenti affectione applicatarum KI, RQ, BE, & cæt. deducitur modus facillimus inueniendi ipsam FL lineam applicationis excedentis. Nam in data hyperbolica linea BFD fiat vt FI ad IK, ita IK ad tertiam IN, & iunctā NG, ex F ad rectos educatur FL occurrens in L iunctæ NG; erit FL linea applicationis excedentis quæsita. Nam per constructionem, & per 17 huius,



rectangulum NF, sub IN tertia, & sub I F prima proportionalibus est æquale quadrato mediæ KI, & adiacet NF applicatum rectæ LF cum excessu figuræ MC simili figuræ sub LFG, iuxta conditiones ab Apollonio requisitas, & demonstratas; ergo FL est latus rectum, siue linea applicationis, siue iuxta quam possunt cum excessu, &c. applicatæ ordinatim ad axem FE.

§. III.

PRAXIS II, &–

– Vsus propos. 29 huius lib. 6 in rectangulorum applicatione hyperbolicà, siue excedente, &c.

EX antecedenti problemate prodit hoc. Nam continuata GN in directum indefinita, velut in P, & ipsi IK parallelis quotcumque ex Q, E eductis, ac productis donec in S, P occurrant ipsi GP, rectangula sub FQS, FEP erunt applicata ad eandem FL cum excessibus figurarum similium eidem figuræ sub LFG; ceu vides rectangula QV, EY, & figuras excedentes TV, XY, poteruntque QR, EB iuxtà eandem FL, siue quadratum ex QR rectangulo QV, ex EB rectan-

rectangulo EY æqualia erunt, rectangulis, inquam, applicatis ad FL cum excessu, &c.

§ IV.

PRAXIS III Geometrica.

Datâ lineâ applicationis cum excessu, & latere transuerso, hyperbolen describendi.

EX antecedentibus etiam hoc problema prodit. Nam data sint latera transuersum GF, & rectum, siue linea applicationis geometricæ excedentis FI, quæ ad rectos iuncta sit in F. Iungatur GL, & producatur indefinitè ad P. Producatur etiam GF rectâ, velut in E. Quotlibet (quò plures eo melius) parallelæ ipsi FL è varijs punctis (quò plura, & crebriora eo melius) ipsius FE ab I, Q educantur ad GP in N, S. Ipsis FI, IN; FQ, QS; FE, EP inueniãtur mediæ proportionales IK, QR, EB. Ex F leniter curuata, & producta per K, R, B erit linea hyperbolica. Nam quadrata mediarũ IK, QR, EB poterunt rectangula sub FIN, FQS, FEP applicata ipsi FL cum excessibus similibus figuræ. &c. Vt in antecedentibus.

§. V.

SCHOLION II.

Alij modi inueniendæ lineæ applicationis hyperbolicę, & describẽdę lineę hyperbolicę.

VIderi possunt cum geometricis demonstrationibus in Apiarijs nostris, Apiar. 3. prog. 3. & alibi apud nos. Quorum varietatem hîc omittimus, ne Tyronibus obturbemus. Indico apponendum etiam modum inueniẽdi lateris recti, quem docet Apollonius in constructione prop. 12 lib. 1. Ibi vide.

§. VI.
PROBLEMA I.

Ad transuersam diametrum hyperboles applicare rectangulum æquale quartæ parti figuræ sub lateribus recto, & transuerso ita, vt excedat figurà quadratà, ex vsu huius prop. 29 ad vsus præclaros.

VSum 29 propositionis in proposito problemate magni momenti, vt inferius videbis, exercebimus sine vsu propositionis 6, lib. 2, quà vsi sumus pro hoc eodem problemate in Apiar. 3, prog. 3, propos. 6. Itaque sit transuersa diameter

AB hyperboles CBD, ad quam diametrum applicandum sit rectangulum æquale quartæ parti figuræ sub latere transuerso AB, & recto B-E ex-

E excedens figurà quadratà. Educatur à B perpēdicularis ad AB ipsa FB pro latere quadrati æqualis quartæ parti figuræ sub ABE, iuxta modos in antecedentibus iā sæpius edoctos, & indicatos. Deinde AB bifarietur in G. Acceptum interuallum GF signetur ex G in H. Ipsi BH æqualis erigatur perpendiculariter in H recta HI, fiatque rectangulum IA. Iunctà BK parallelà ipsi HI, dico rectangulum AI applicatum ad AB latus transuersum, & excedens quadrato BI, esse æquale quartæ parti figuræ sub AB, BE siue quadrato ex FB.

Fiat enim ipsius GH quadratum, productà HI, & ex G eductà parallelà, sitque quadratum GL, & productà HK in M, erunt, per 26 huius, circa eandem diametrum HM vtrumque quadratum BI, & GL. Producatur in N latus BK, quod cùm sit parallelum ipsi HI, ac toti HL, erit & ipsi GM parallelum. Est verò NO quadratum, nempe simile ipsi BI, per 24 huius, & est quadratum ex rectà OK, hoc est ex illi æquali GB in parallelogrammo GK, per 34 primi. Quoniam igitur, per 47 pri. quadratum GL, idest ipsius GF, est æquale quadrato dimidij lateris transuersi GB, idest ipsi ON, & quadrato ipsius FB idest quadrato æquali quartæ parti figuræ sub ABE lateribus transuerso, & recto, si auferatur ex GL quadratum ON, remanebit gnomon GIN æqualis quadrato æquali parti quartæ rectanguli sub ABE, idest quadrato ex BF. At eidem gnomoni GIN est æquale rectangulum AI. Nam GI communia sunt, & KL, per 43 pri. est æquale ipsi GK, idest ipsi AO dimidio rectanguli AK bifariati in G; ergo totum rectangulum AI est æquale quadrato ex FB; ac proinde ad AB, latus transuersum hyperbolicæ sectionis CBD, applicatum est rectangulum AI excedens figura quadrata BI, & æquale quadrato, quod est quarta pars rectanguli sub latere transuerso AB, & recto BE. Quod erat faciendum.

Pari ratione in contraposita hyperbole PAQ licebit applicare ad eandem, & communem diametrum transuersam BGA rectangulum æquale quartæ parti figuræ sub EBA, excedens quadrato ad punctum R correspondens appositè ipsi H. Vocantque ea duo puncta ex comparatione. Quorum mirifici sunt vsus. Contrapositæ hyperbolæ dicuntur sectiones factæ duorum conorum habentium vertices in communi puncto, velut in G axis transuersi.

Quænā puncta ex comparatione hyperbolà.

Quænā contrapositæ hyperbolæ.

§ VII.

Praxis 4. organica, & Vſus puncti applicationis excedentis, in primis pro praxi deſcribendæ hyperboles gemino filo, ad plura. &c.

OMitto alios vſus, ac præcipuè vim vſtoriam punctorum A, B factorum ex comparatione rectanguli excedentis, &c. (iuxta problema antecedens) in contrapoſitis hyperbolis C-GD, EHF. De qua in hyperbolicis ſpeculis vſtione vide nos in Ap, 6 & 7 Tantùm hîc vſum affero punctorum A, B pro deſcriptione ipſius hyperbolicæ lineæ, pariter in vſus præclaros, vt videbis in corollarijs poſt deſcriptiones mox ſequentibus.

Lem-

Lemmatis verò loco indicanda est propositio 51 lib. 3. Con. Apollonij, cuius veritas etiam è primis principijs, sine geometrica implexiore demonstratione tibi, mi Tyro, constabit post eius vsum, ac praxim. Affirmat igitur Apollonius, & demonstrat, si ab A, & B inclinentur ad vtramlibet hyperbolen CGD geminæ rectæ AL, BL velut ad punctum L in hyperbola, à maiori AL minorem BL superari quantitate axis HG, quo eodem axe superatur & BL à maiore AC. Ac sic deinceps de alijs ad hyperbolen inclinatis. Patet quidem facilè propositionis veritas in inclinatis AG, BG ad G. Nam cum supponantur factæ applicationes eiusdem rectanguli ad axem HG excedentis eodem quadrati latere à G in B, ab H in A, ac proinde sint æquales BG, HA, patet AG maiorem esse ipsa BG quantitate axis HG. At verò in AL, LB patebit à praxi, quam parit ea propositio Apollonij.

Descripturus hyperbolen, gemini fili extrema fige acubus in arbitrario interuallo distantibus punctis A, B. Deinde fila complicentur ita, vt commune conuolutionis punctum, velut G, sit non medium, sed citrà, vel vltrà medium inæqualibus interuallis distans ab A, & B, eritque G pro vertice describendæ hyperboles & A, B pro punctis ex applicatione, siue comparatione contrapositarum hyperbolarum. Digiti complicata fila in G continentes, ac tendentes leuiter laxentur, & fila sensim explicentur; quæ dùm variato semper angulo obliquantur in L, I, C, &c. signant puncta, seu curuam hyperbolicam G, L, I, C, &c. Pariterque ad partes versus D; & in contrapositâ EHF opposito modo est operandum.

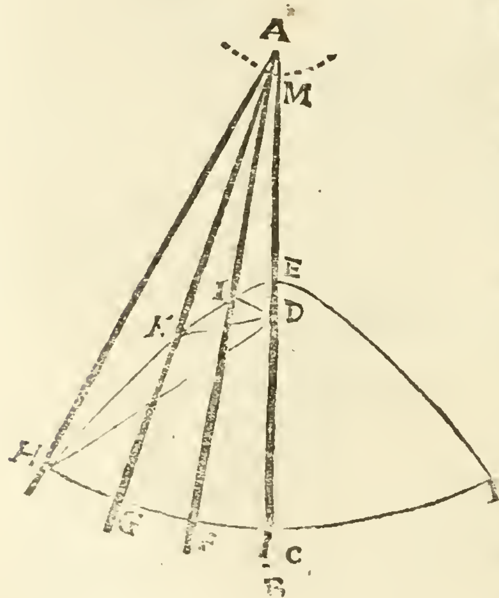
Quæ operatio est praxis citatæ Apollonianæ propositionis. Iuxta quam vides dum filis AG, BG (quorum alterum ab altero superatur quantitate axis HG, vt patet in AG comparato cum BG) in ea replicatione, ac reuolutione complicatorum adduntur semper partes æquales, vides, inquam, perstare fila AL, BL, AI, BI, AC, BC in eâdem semper differentia inter se quantitatis ipsius axis HG, qua minora fila superantur à maioribus. Itaque signant hyperbolen quasi lineæ à punctis applicationis ad eam inclinatæ, ac inter se axis quantitate differentes.

Ad plura alia facit hæc praxis. Apud nos in primis vsui est terminãdis lineis horarijs in horario vniuersali, ne tropicorum solarium vmbras excedant. Vid. in Ap. 9. Prog. 1.

§. VIII.

PRAXIS V, & altera Organica

Eodem regulæ motu hyperbolicam, & circularem lineas deſcribendi.



QVemadmodum eodem regulæ motu duplici modo deſcripſimus ellipticam, & circularem, ſic hyperbolicam & circularem lineas deſcribamus ad vſus eximios, quos in ſequẽti corollario indicabimus. Sit regula AB altero ſui extremo fixè gyratilis circa acum, vel clauiculum in A, habeatque curſorem, & ſub curſore graphiolum firmatum in C, atque in eodem C ſit aſſixum alterum extremum fili, alterum verò ſit aſſixum in D, ita vt filum à C pertingat ad E, atque ex E replicetur ad D. In puncto E interponatur, ſiue ſupponatur filo CED cuſpis deſignatoria ſtyli. Deinde ſenſim læua manu deduc curſorem, ac regulam ex C in F, atq; eodem tempore ſtylo deſignatorio filum ad regulam premendo, ac latus regulæ radendo, ſenſim dextera manu regula cum filo deducatur ex E in I; ac deinceps inferius ex F in G, ſuperius ex I in K, donec fiat concurſus ex G, & K in commune punctum H.

Pa-

Parilique modo commutatis manum munijs, ex C, & E ad partes, & commune punctum L fiat per stylum sub filo ad regulam, & per cursorem designatorium operatio. Erit sub circulari HCL, & sub hyperbolicà HEL lineis descripta figura CHELC.

§. IX.

COROLLARIVM I, in quo indicantur —

— Vſus eximij proximè antecedentis deſcriptionis à diaphano ſphærohyperbolico, ſiue pupillari, præſertim pro lineà vſtorià infinità.

NE putes otiosā præcedentem descriptionē hyperbolicæ, ac circularis linearum eodem regulæ motu, mixtamq; figuram circulihyperbolicam ostentationi descriptam, scito à nobis in Apiario 6. Progym. 1, excogitatam eam geminam vno regulæ ductu descriptionem, vt ex ea confieret figura similis oculi pupillæ, quam in eo Apiario docuimus ex anteriore parte conflare arcū maioris peripheriæ circularis, è posteriore vero simulare mixtam lineam hyperbolicæ simillimam. Ad cuius pupillæ formam conflatum diaphanum sphærohyperbolicum mira, & eximia theoremata expromit. Quæ vide in cit. Ap. 6 progym. 2, ac 3. Præter alia, ope diaphani pupillaris licebit lineam vstoriam infinitam eiaculari ea arte, quā habes à nobis in cit. Ap. 6. Progym. 2. Cap. 4.

Habes etiam in figura præcedentis praxeos praxim constituendi sphærohyperboliforme, siue pupillare diaphanum iuxta tentamenta exacta Griembergeri apud nos in cit. Ap. 6.

§ X.

SCHOLION III,

In quo monitũ circa effectiones physicas diaphani sphærohyperboliformis.

IN quarta editione nostrorum Apiariorum, quæ recens prodijt cum additione Analectorum, vide Analectum ad Apiarium 6, vbi soluuntur nebulæ offusæ caligantibus oculis circa pupillare nostrum diaphanum sub hyperboliformi, & circulari superficie comprehensum. Pariter memento consugiorum, quæ apposuimus in capite extremo prog. 3, citati Apiarij 6 contrà fallacias argumentationum, vel experimentorum a pupilla oculi cadaueracei.

Ac quod attinet ad theoremata circa sphærohyperboliforme nostrum diaphanum, quemadmodum firmissimis rationibus theoreticè firmata, & demonstrata sunt, sic ex theorematibus geometricis fient etiam problemata physica si quis norit physicam materiam cogere sub formam geometricam perfectæ pupillaris figuræ. Cæterùm hoc opus, hic labor est. Nec tamen ideo fabriles difficultates geometricis philosophationibus quidquam vel veritatis, vel dignitatis detrahere possunt. Nesciunt quid sit in fælici geometrica abstractione, vnà cum Geometrarum Principibus philosophari, qui theoricam acutissimam, & mirificam scientiam physicæ materiæ inertià, & fallacijs metiuntur. Ac dum non ex præscripto geometrico operantur, culpam suæ deficientiæ reijciunt in Architectonicam. Vide citatum Analectum circa pupillaris diaphani nostram inuentionem, atque ibi Antistitum Philosophorum Geometricorum pro nobis exempla.

§. XI.

PROBLEMA II.

Aliter eodem regulæ ductu circularem, & hyperbolicam lineas describere.

REuise in tomo 1 huius Ærarij § 11 ad definit. 2, 3, 4, vbi figuram, & operationem habes paullo aliter ab hic antecedentibus.

Scho-

SCHOLION IV.

De tubo optico cum lente sphærohyperbolica.

Habes hoc nostrum inuentum in Ap. 6 iam pridem à nobis proditum. Quare non est quod non nemo quasi sibi arcanũ, atq; à se inuẽtum, velut inter Cereris mysteria (vt est in antiquo prouerbio) sepositum sub velo silentij semiloquacis premat. Proditum enim à nobis est perfectionem tubi optici pendere à lente ab oculo remotâ, quæ sub sola figurâ hyperboliformi omnes radios, non implicatos inter se, cogit in vnum punctum, sub quo collocatus oculus clarissima, & amplissima videat obiecta etiam remotissima. Qui ergo nostrum hoc theorema redegit fabrè, ac fabriliter ad problema physicum, & secutus est vel nos, vel apud nos Griembergeri prima conanima in Ap. 6, sciat se in alieno, & circa aliena serò laborasse.

SCHOLION V.

Hyperbolicarum linearum descriptiones aliæ.

Eas vide apud nos in Apiarijs, præsertim in Ap. 3 progym. 3.

§XII.

PROBLEMA III.

Lineam hyperbolen nouo modo describere etiam asymptoton ad rectam, vel ad, & intra duas rectas angulum facientes.

Quod alijs modis effecimus in Apiarij tertij prog. tertio Prop. 6, 7, 8, hic aliter, ac nouo modo præstabimus, describemusq; non solum lineam hyperbolicæ sectionis, sed etiã cum eo geome-

trico miraculo (de quo copiosè in cit. Apiar. 3) scilicet quæ sit etiam semper accedens vtrimque ad rectam, nec tamen vnquam, etiam in infinitum vnà cum rectà producta, rectam possit attingere. Ac quod hìc à nobis fiet intrà rectas angulum facientes, licebit etiam peragere ad datam rectam, vt videbis.

Sint rectæ AB, AC angulum quemcumque (puta acutum) facientes in A. Interuallis lubitis (siue eodem, expeditioris operationis gratià) fiant sectiones in M, & G, fiatq; Rhombus AN, eductis ex M, & G rectis ad N, quæ sint parallelæ oppositis lateribus MAG. Latus AG secetur in lubitas partes (quo plures eo melius) in punctis H, I, K, L &c. Accepto interuallo AH, fiat (ex modis à nobis traditis ad 12 prop. huius) vt AG ad AH, ita AM ad AP, compleaturq; si lubeat, rhomboides AQ. Rursus fiat vt AI ad AG, ita AM ad AR, atque interuallo AI ex R fiat arcellus versus S; interuallo verò AR ex I fiat arcelli sectio in S. Pariter fiat vt AK ad AG, ita AM ad AT, atq; interuallis AK, AT ex T, & K signetur arcellus in V, ac sic deinceps interualli AI, AB fiat sectio in O. &c.

Ad alteram partem possunt fieri parallelogrammata, quale AF, & sectiones. &c. sed breuius fiet, si ex A, & N, interuallis AQ, NQ, AS, NS, AV, NV, AO, NO, transferantur sectiones in F, X, Y, Z. &c. Ducta leniter curuata per O, V, S, Q, N, F, X, Y, Z, erit hyperbolica linea, cuius vertex in N, eritq; assymptotos vtrimque ad rectas AB, AC.

Patet demostratio ex proprietate illa, de qua in vtroque tomo huius Ærarij non semel diximus, nimirum de parallelogrammis omnibus inter se æqualibus inter hyperbolen, & rectas asymptotos descriptis; iux ta demonstrata apud nos in Analecto 10 editionis quartæ nostrorum

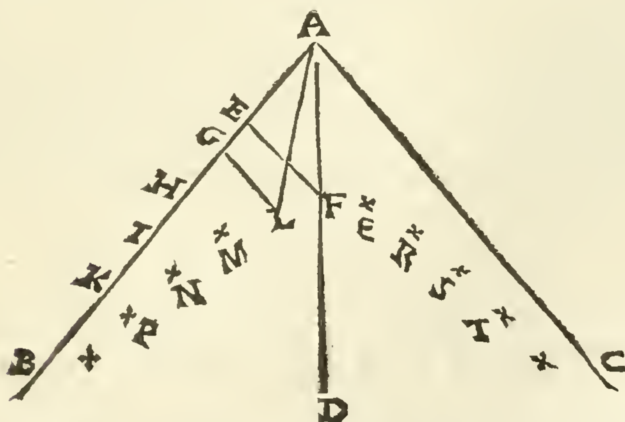
strorum Apiariorum. Qualia parallelogrammata nos descripsimus hic iuxta praxin, quam docuimus ad 14 huius, nimirum per inuentionem quartæ proportionalis, & latera reciprocè proportionalia in parallelogrammis DE, MG, PH, ac reliquis communem angulum habentibus in A, atq; ideo æqualibus ex 14 huius, ac sunt in N, Q, S, V, O, &c. anguli parallelogrammorum inter rectam AB contingentes hyperbolen O, V, S, Q N, F. &c. quæ proinde erit etiam assymptotos ad rectas AB, AC, &c.

Si data sit recta sola AB, describetur hyperbolica linea ad illam asymptotos eodem modo, facto angulo ad A ex occulta AC, & factis sectionibus ad F, N, Q, &c. pro parallelogrammorum occultorum angulis. &c.

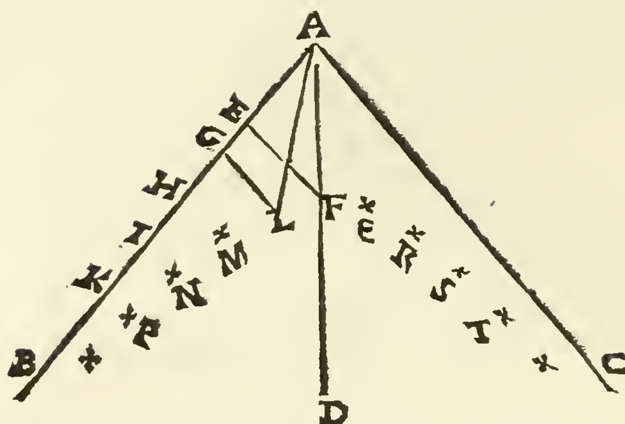
§ XIII.

PROBLEMA IV.

Aliter hyperbolicam lineam etiã asymptoton, &c. nouo modo describere, inter duas rectas angulum facientes. &c.



RECTARUM BAC angulus quilibet A bifarietur à recta AD, quæ erit pro axe &c. In vtralibet AB, interuallo lubito ex A fiat sectio in E, vndè agatur ipsi AC parallela occurrens ipsi AD in puncto F,



cto F. Lubitis interuallis (quo plures, ac minores eo melius) fiant in alterutra AB infra E sectiones in G, H, I, K, &c. deinde fiat vt GA ad EA, ita EF ad parallelam GL, iunctaq; si lubeat, AL, fiat triangulum AGL. Rursus fiat vt HA ad GA, ita GL ad imaginatã parallelã HM; vt IA ad HA, ita HM ad IN, & vt KA ad IA, ita IN ad KP. &c. Deinde interuallis FL, AL; FM, AM; FN, AN. FP, AP. &c. trãsferantur sectionum puncta etiam in alteram partem ad Q, R, S, T. &c. Traducta leniter curuata per eas sectiones P, N, M, L, F, Q, R, S, T, erit hyperbolica linea, eaq; assymptotos rectis BAC. Sunt enim, iuxta corollar. 1 ad primam huius, triangula æqualia (scilicet dimidia æqualium parallelogrammorum) inter hyperbolen, & assymptoton. Ac circa æquales angulos ad E, G, H, I, K habent latera reciprocè proportionalia ex constructione, atq; ideo ex prop. 15 huius, sunt æqualia. &c.

Datà rectà solà AB, ad eam asymptotos hyperbolica ducetur, ductà occultà ADC, &c. ac operando vt hic in antecedentibus pro occultis triangulorum angulis tangentibus in F, L, M, N, P. &c.

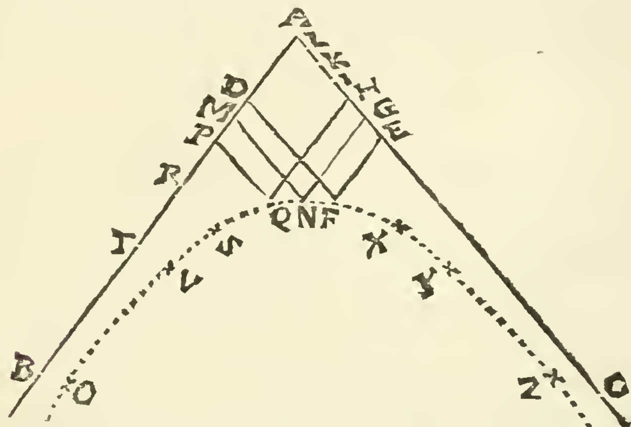
§ XIV.

COROLLARIUM II, *in quo—*

— Facillima gemina demonstratio, sine conicis, de hyperbola ad rectam assymptoto.

Vt

VT Tyrones hìc habeant, sine necessitate conicorum elementorum ab Apollonio collectorum (quemadmodum etiam in Apiar 3, prop. 2 sine conicis assymptotos ad hyperbolen aliter, quam hìc demonstrauimus) demonstrationem de mixta OVN (quæ demonstrata est hyperbole in antecedentibus proximè duobus problematibus per proprietatem æqualium parallelogrammorum, vel triangulorum interscriptorum, &c.) quòd semper acce-



dat, & nunquam contingat rectā AB, inspectent in figura § 12 antec. spatiū exiguū lineę inter AL, quod quia est diuisibile in infinitū (iuxta Corollarium § 2 ad 15 huius) & per eas diuisiones possunt duci parallelæ lateri AB, semper in infinitum viciniores, ad inscribenda parallelogrāmata, &c. ideò mixta OVNF, quæ debet contingere earum parallelarum terminos vbi habent angulum parallelogrammi, etiam ipsa semper magis, ac magis accedet ad AB. Numquam tamen continget eamdem AB, quia parallelæ, iuxtà quas ipsa OVN graditur, non possunt contingere eamdem AB; alioquin, si contingerent, nō constituerent parallelogrammata, nec essent parallelæ ipsi AB, sed coincideret earum aliqua, velut postrema cum eadem AB, quod est contrà suppositum ex diuisibili AL in infin. per parallelas. &c.

Aliter idem demonstratur in figura § antec. 13 ex § 2 ad 15 huius. Quoniam enim in latere AB, quod per 2 postulatum, potest in infinitum produci, licet accipere puncta in infinitum semper magis ab A distantia, ceu H, I, K. &c. inferiora; atque vt linea intercepta inter A, & sumptum quodlibet punctum etiam infrà K, se habet ad EA, ita EF ad quartam; idest vt prima in latere infinito AB potest cre-

scere

scere in infinitum respectû secundæ EA, sic respectu tertiæ EF quælibet eidem parallelæ debent decrescere in infinitum, vt sint quartæ proportionales; ideò curua PMF incedens per terminos earum parallelarum semper minorum, semper accedet magis ad AB; numquam tamen continget; alioquin tribus datis quarta proportionalis non posset aliquando inueniri, nempè ibi, vbi nulla intercederet inter AB, & hyperbolen. Quod est contra suppositum; ducitur enim hyperbole semper per extrema quartarum proportionalium, &c. ex prædictis, & præstructis.

§. XV.

SCHOLION V,

Dissipandis hallucinationibus circa proximè demonstrata.

CAue, mi Tyro, te implices, ac mecum distingue sic inter data, & quæsita, &c. in Analectis ad Apiaria, datis hyperbola, & recta assymptoto, demonstratur quæsitum de parallelogrammis æqualibus inter hyperbolen, & assymptotos; & ad primã huius traducitur demonstratio, per Corollarium, etiam ad triangula æqualia inter hyperbolen, & assympton. In problematibus hìc antecedentibus, datis, siue descriptis parallelogrammis, & triangulis æqualibus, &c. probatur quæsitũ, quòd descripta sit hyperbola, eaq; assymptotos ad rectam, per conuersam Propositionis in Analectis. At verò in Corollario proximè antecedenti, datis, & descriptis parallelogrammis, & triangulis æqualibus, per quæ probata est descriptã hyperbole, ac proinde probatà iam, & datà hyperbolà, demonstratur deinde aliter, atque apertius reliquum quæsiti, quòd scilicet sit assymptotos ad rectam, idest quomodo semper accedat, nec vmquam possit contingere.

§. XVI.

SCHOLION VI.

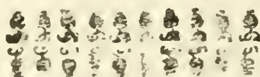
Ad omnes hyperbolas nõ posse duci assymptotos. Et cur hyperbole axi coni parallela, sit apud nos præcipua.

VT in hoc Scholio proposita, & apud alios non vulgata intelligas, vide Apiar. 3 Progym. 3 in Corollario propositionis quintæ, & in Schol. 2, & 3 post propositionem sextam; & Analectum vndecimum in fine secundi Tomi editionis quartæ Apiariorum. Item in Apiar. 9. Progym. 1. cap. 7, vbi Philosophi Gnomonici (etiam si è sectione conorum solarium non parallelà axi mundi fiant hyperbolæ terminantes lineas horarias) tamen mentionem præcipuam faciunt sectionis conorum parallelæ axi mundi tum ob alia, tum præcipuè pro horarijs vniuersalibus, in quorum constructione nulla est Poli eleuatio, & axis Mundani obliquatio. &c.

Præterea sectio hyperbolica parallela axi inseruit numerosis illis asymptotis, de quibus vide in eod. Ap. 9. Prog. 2. cap. 3.

SCHOLION VII.

QVæsitum est ex me an diaphanum illud atomum (de quo in Analectis ad quartam editionem meorum Apiariorum) sit figuræ hyperbolicæ. Respondi in re tantilla non esse locum figuræ nisi quam natura ipsa in arte format sphærulæ similem. Inaudiui de Mathematico quodam Siculo apud se diaphanillum id circumferēte. Authori mihi incomperto suam laudem, si se prodiderit, non inuideo.



§XVII.

SCHOLION I:

De Geometrica applicatione iusta, & præcisa, (sine deficientia, vel excedentia,) quæ Græcis est παραβολή, Vnde etiam nomen sectioni conicæ.

IN huius libri 6 vtraq; antecedenti propositione 28, 29 quemadmodum Philosophus Geometra docuit exercere applicationes Geometricas cum defectu, & cum excessu, sic multo ante docuerat in lib. 1 propos. 44 applicationem præcisam, ac iustam, hoc est ad datam rectam lineam applicare parallelogrammum æquale dato triangulo, quod scilicet non excedat datæ lineæ longitudinem, nec ab ea deficiat. Ibi nos cum Proclo aliquam cognitionem Tyronibus attulimus circa geometricam applicationem, atq; in fine § 1 ad eã 44 prop. Eucl. prodidimus vndenam proprium applicationis geometricæ nomen, quæ græcis est παραβολή, sectioni conicæ inditum sit, eiusque sectionis ortum, & formam indicauimus.

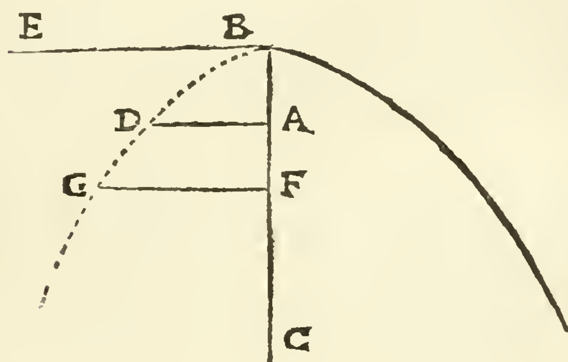
Neq; ibi vlterius circa parabolen progressi sumus, nec ea ibi protulimus, quæ huc spectabant post cognititionem saltem linearum proportionalium inueniendarum, quarum cognitio, & inuentio nobis plurimum vsui fuit in antecedentibus applicationibus geometricis tam deficientibus, quam excedentibus, vt vidisti, mi Tyro. Nunc locus postulat vt reliqua ad applicationem geometricam absolutam spectãtia breuiter hic exponamus, & fidem nostri polliciti ad 44 prop. lib. 1. opportunè absoluamus. Relege igitur à nobis dicta in § 1 ad citatam 44 lib. 1. Quibus suppositis, esto hic —

§. XVIII.

—*PRAXIS I. GEOMETRICA*—

— Li-

Lineam iustę applicationis, siue latus rectum vel datæ, vel describendæ paraboles inueniendi.

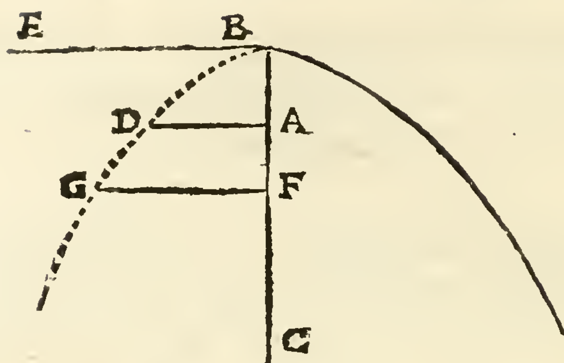


Componantur ad angulum rectum in A duæ rectæ, altera indefinita BC, altera AD pro amplitudine maiori, vel minori describendæ paraboles. Deinde positâ BA pro primâ proportionali, inueniatur ipsi AD tertia proportionalis BE perpendicularis & ipsa in B. Ea est latus rectum, siue linea, ad quam applicata rectangula sub lateribus interceptis inter verticē paraboles & inter applicatas ad axem, velut sub EB, BA, sunt æqualia quadratis applicatarum, velut quadrato ex DA; iuxta requisita ab Apollonio in prop. 11 lib. 1. Si data sit parabola, applicatis ad axem inuenietur eodem modo tertia proportionalis pro latere recto.

§. XIX.

PRAXIS II, Geometrica

Data linea iustæ applicationis BE, parabolen BDG describendi.



Signetur axis BC quotlibet punctis (quo crebrioribus, eo melius) A, F, & inter EB, BA, inter EB, BF inueniantur mediæ proportionales, ac perpendiculares axi, ipsæ DA, GF; mixta à B per D, G ducta erit parabola. Sunt enim ab applicatis DA, GF quadrata æqualia rectangulis ABE, FBE, iuxta proprietatem paraboles (à qua illi nomen) ex Apollonij proposit. 11. lib. 1, & è 17 huius.

SCHOLION II.

Cur ad rectos angulos in B, A, F aptemus rectas EB, DA, GF vide apud Eutocium ad 16 prop. lib. 1. Conic.

§ XX.

Praxis tertia geometrica parabolen describendi.

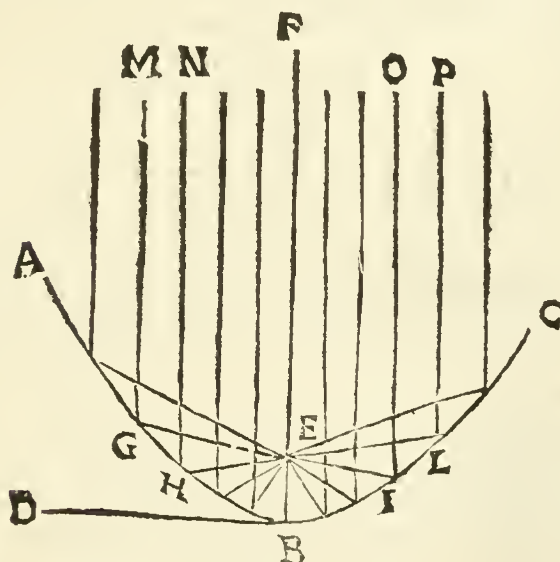
Habes ex Apollonij propositione 20 lib. 1. iuxta animaduersionem Eutocij ad eam. Vt enim linea BF ad BA, ita quadratum ex FG ad quadratum ex AD. Expositâ ergo BC, & sumptis in eâ quotcunq; punctis A, F, à quibus ad rectos angulos educantur AD, FG; & in AD sumpto puncto D magis, vel minus distante ab A pro modo describendæ paraboles; fiat vt BA ad BF ita quadratum ex AD ad quadratum ex FG; & per D, G leniter curuata erit parabolica linea.

§ 21.

§. XXI.

PORISMA, siue Praxis 4 Geometrica

Inueniendi focum, siue punctum vstorium, siue ad quod vnum reflectuntur rectæ omnes axi æquidistãtes in parabolen incidentes.



Datà parabolà ABC, & recto latere DE, applicetur ad axẽ BF à vertice B ad punctum E (siue secetur à B ad E) quarta pars lateris recti; eritq; E punctum, ad quod vnum omnes axi FB parallelæ M, N, O, P, &c. incidentes in quælibet puncta paraboles G, H, I, L reflectuntur.

Admiranda hæc proprietas in parabola demonstratur à Vitellione lib. 9. Opticæ, propos. 41, 42, 43. Fiunt enim in punctis omnium incidentiarum ad contingentes anguli vtrimq; æquales incidentiæ, & reflexionis.

Vide

Vide etiam huius propositæ hic praxis, & proprietatis nostram demonstrationem breuem, ac facilem in Apiar. 7 Progym. 2 corollar. 3, & sequent. schol. post propositionem 4. Vide & analectum nostrum ad ea scholia in quarta editione Apiariorum nostrorum Mathematicorum.

SCHOLION.

P*Vnctum E si quando in Apiarijs, aut, alibi appelletur:* ex comparatione. *intellige per similitudinem punctorum ex comparatione in hyperbola, & ellipsi, ad quæ vstiones fiunt. &c.*

Hic satis est in E secare quartam partem lateris recti, sine comparatione ad BE vllius rectanguli. &c.

§. XXII.

COROLLARIVM II.

De vehementissima vstione non solum ad punctum E, sed etiam per lineam infinitam, &c.

C*Vr in antecedente praxi punctum E concursus omnium reflexionum in parabola appellarim focum hic habes.*

Nam si pro lineis incidentibus, atq; parallelis accipias infinitos solares radios, ij ab omnibus concaui parabolici punctis reflexi ad vnum E; inibi vehementissime vrent. Quod & Vitellio cit. lib. 9, propositione extremà docet, & experientia confirmat. Cæterùm vltra vulgatum hoc punctum vstorium, habes etiam qua arte ex parabolicis speculis liceat eiaculari lineam radiosam infinitam in qualibet sui parte vehementissimè vrentem, apud nos in cit. Apiar. 7, Progym. 3, propos. 8. Vide analectum ad eam in quarta editione Apiariorum.

§ XXIII.

SCHOLION III.

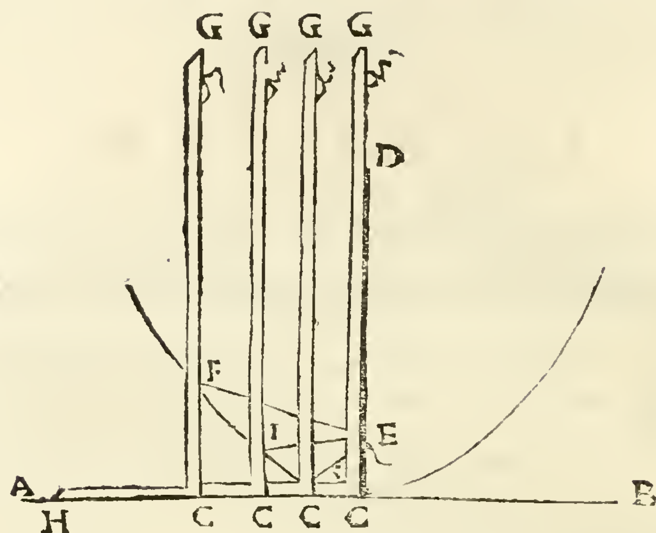
De Vestalium scaphijs, & Archimedis speculis vstorijs, ac etiam de tubis parabolicis. &c.

ANtiquarum institutionum cognitione prædíti aliqui affirmant, præter cæteros, à Plutarco describi scaphia (quibus Vestales vtebantur ad suum illum ignem accendendum à radijs solaribus purum) vasa è metallo specularia fuisse in turbinis formam excauata, quibus oppositis soli, & apposito fomite ad interius, & quasi medium in eis punctum, statim ignis emicabat. Affirmantq; non leuibus coniecturis fuisse ea vascula parabolicè intus elaborata. Miram parabolæ proprietatem de omnium axi parallelarum reflexionibus ad vnum punctum, atq; inde vires vstorias puncti distantis in axe à vertice paraboles quarta parte recti lateris. Antiquis notas fuisse nullum est in vniuersa antiquitate vestigium. Primus eorum, quos legerim, arcanum id parabolicum publicæ agnitioni attulit Vitellio citat. in suis opticis. Quicumq; Archimedem aiunt vsum parabolicis speculis contra hostes in obsidione Syracusanà, diuinant, non probant. A nostro quidem Griembergero didici parabolica scaphia ita truncari posse, vt tubi quidam fiant, qui ignem nō intra se (vt asolet in speculis vstorijs) sed extra, & post se in pūcto reflexis radijs communi accēdant. Cuius tubi formam vide apud nos in Ap. 7 progym. 2 propos. 1. & sequent.

§ XXIV.

Praxis 5, & organica describendæ paraboles ex puncto applicationis, &c. seu foco. &c.

DVctà indefinità AB, excitetur ad eam circa medium perpendiculariter in C recta CD lubitæ longitudinis, acceptoq; arbitrario



trario puncto E (magis, minusuè à C distante pro modo describendæ paraboles) in eo figatur alterum fili extremum, à quò filum extendatur ad C, & ex C replicetur per E secus normæ (vtroque latere congruente cum DC, CA, & apposito angulo recto in C) latus CG vsque, exempli gratià, ad G, ibiq; nectatur: tùm accepti styli dessignatorij cuspis interponatur in C inter fili replicationem, ac leuæ digitis vtrũque normæ latus apprehẽdentibus, & sensim ita mouentibus, vt latus CH semper congruat cum CA, eodem tempore dextera filum lateri CG leuiter stylo adpremat, sensimq; iuxta motum latus ascendendo signet curuam S, I, F, quæ erit hyperbole, iuxta prædicta in praxi geometrica inueniendi puncti applicationis, atq; vstorij, ad quod omnes, axi parallelæ, incidentes in parabolam, reflectuntur. Vides enim in hac praxi normæ motæ latus CG esse instar incidentium, & fila FE, IE, SE esse pro reflexis ad idem commune E. Vide in cit. Apiar. 7 aliter hanc praxim demonstratam.

§. XXV.

SCHOLION IV.

Cur

Cur in sectionibus conicis, & in alijs lineis non rectis spectetur angulorum incidentiæ, & reflexionis æqualitas penes rectam contingentem.

EX occasione Vitellionis citati in antecedentibus, ac demonstratis incidentes in parabolam, & parallelas axi FB reflecti omnes ad E, hoc est incidentes, & reflexas esse breuissimas ad E, quia eunt per angulos ęquales incidentię, & reflexionis ad rectas parabolen contingentes; si quæras cur non accipiat quantitatem, siue æqualitatem angulorum in sectione parabolicà, sine respectu rectarum contingentium, quæ nullæ sunt; habes vnde tibi respondeas, ac, si philosophus intelligens, atq; ingenuus es, etiam satisfacias ex ijs, quæ nos docuimus pro Antiquis, & ex Antiquis geometricæ philosophiæ Magistris, to. 1. Ærarij nostri ad prop. 15 lib. 1. Elem. § 6, & 7, & ad propos 20, § 2; & in Apiar. 7. progym. 1, propos. 1 Corollar. 3, & 5. & progym. 2. corollar. 3 post propos. 4. & in Ap. 10. Progym. 2. Schol. 2, post propos. 1. Pariter Apollonius demonstrat lib. 3 propos. 48 æqualitatem angulorum incidentiæ, & reflexionis in circulo, ellipsi, hyperbola respectu contingentium eas curuas, & mixtas lineas &c. propter ea quæ protulimus nos in ante cit. Aerar. & Apiar. Quibus appone Analectum 17 in fine quartæ editionis nostrorum Apiariorum. Ea lege, atq; intellige, ne dum Antiquos doctores damnare audeas, publicis sæculorum irrisionibus te exponas, & appareas temerè damnare quæ non intelligas. &c.

§. XXVI.

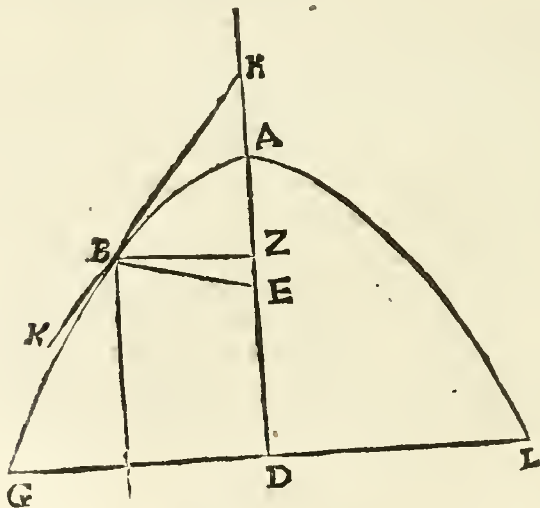
SCHOLION V.

Indicata hallucinatio Vitellionis, & Orontij circa latus rectum, & punctũ vstorium in pa-

rabola, pro vitando magni momenti errore practico.

1 *PVlcherrimum id inuentum Vitellionis de reflexione ab omnibus punctis parabolæ ad vnum punctum E, & plura alia in eo Authore præclara ita eius existimationem, & famam doctrinæ tuentur, vt nihil ei possit officere, si quando alicubi minus peruiderit. Ac nos dum magnorum Authorum hallucinationes prodimus non id agimus vilificandi studio, sed vt publico scientiarum bono, præsertim apud Tyrones, prouideamus. Habetque Lectorum æqua posteritas à nobis exemplum hic, atq; alibi apud nos, eius æquitatis, quã nos etiam nobis in humanis nostris lapsibus optamus, ac pollicemur ab æqua posteritate.*

Modestia, & æquitas in alienis.



Igitur ad calumniæ suspicionem vitandam, Vitellionis verba sunt, lib. 9. prop. 40. Quadratum lineæ perpendicularis BZ est æquale ei rectangulo, quod fit ex ductu lineæ ZA (quæ est pars diametri AD, interiacens ipsam perpendicularem BZ, & peripheriam sectionis) in lineam LG, quæ est latus rectum ipsius sectionis. Est ergo, per 17 prop. 6, proportio lineæ LG ad lineam ZB, sicut ipsius AB ad lineam ZA. Hoc autem simi iter demonstratum est ab Apollonio Pergæo in lib. de Conicis elementis. *Et prop.* 41. *seq.* Sectio parabolica LABG, &c. cuius latus rectum LG. &c.

2 *Ve.*

2 Verum quidem est ab Apollonio demonstrari quadrata applicatarum ad axem parabolæ esse æqualia rectangulo comprehenso sub partibus axis interceptis inter applicatas, & inter verticem paraboles, & sub latere recto; at Apollonius nunquam posuit pro latere recto basim sectionis, siue maximam applicatarum, ac duplicatam, ipsam nempe GL.

Latus rectum parabolæ est linea certæ longitudinis, atq; inuariata, iuxta quam possunt applicatæ quantumuis crescant cum productione sectionis etiam in infinitum. At productâ sectione GAL, ampliatur etiam quantitas basis vltra longitudinem ipsius GL. *Quid latus rectũ in parabola.*

3 Punctum vstorium E debet esse idem, atque immotum, etiam si sectio, seu vas parabolicum amplietur. Ab omnibus enim punctis vasis parabolici, ampliati etiam vltra diametrum GL, reflexiones omnes fiunt ad idem E. Quod si fiat sectio in axe iuxta quartam partem basis GL, productâ sectione GAL, erit basis amplior quam GL. Igitur, iuxta Vitellionem, si secetur axis AD ad quartam partem amplioris, quàm GL, punctum vstorium cadet infra E. Ergo duo sunt puncta vstoria, vnum in E ex quarta parte ipsius GL, alterum infra E ex quarta parte amplioris, quam GL; immo tot erunt vstoria puncta quot bases minores, vel maiores possunt duci parallelæ ipsi GL; nam puncta vstoria sunt quartæ partes basium sectionis parabolicæ iuxta Vitellionem.

4 Inuento igitur vero latere recto, idest ipsis AZ, ZB tertià proportionali, quæ semper eadem est, iuxta antedicta, & factâ sectione in E quartæ partis lateris recti, erit semper idem E, ad quod omnes incidentes in sectionem, & parallelæ axi, reflectentur ab omnibus pũctis sectionis.

5 Quid multis? Bonus Vitellio in præclarissimo suo inuento destruit locum mirifici effectus, quem persequitur. Nam propter antedicta, si ad quartam partem basis, siue duplicatæ applicatæ GL fiat sectio in E, non consequetur vstio in E, propter dicta in num. antec. 3, quia non est iuxta quartam partem lateris recti. Quoniam igitur ea hallucinatio tanti est momenti ad praxem ignem fallaciter exercendam, ideò dissimulandam non ce sui, ac plura alia in hanc rem dicenda omisi, ne videar potius Authorem premere, quàm veritatem exprimere. Habent Momi hìc, atque alibi apud nos exemplum, à quo discant ignoscere nobis tyronibus, si quando labamur, dum vident doctissimos Authores, inter quos sine controuersia est Vitellio, aliquando etiam ipsos humana pati, hoc est etiam in opticis (quæ perscripsit Vitellio) lippire. *Monitũ ad modestiam, & æquitatẽ in alienis.*

Post Vitellionem Orontius in libello de speculo vstorio in eandem cum Vitellione supradictam hallucinationem incidit, licet valde & ipse laudandus sit in quamplurimis alijs mathematicè inuentis.

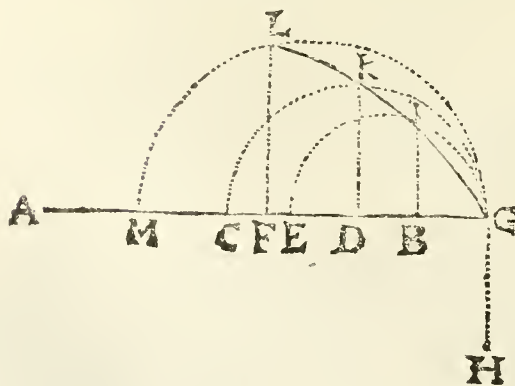
6 Videant qui libenter exercent criticam censuram in aliena (nobis libentibus ad hæc odiosa non satis est otij) an Vitellionis & Orontij demonstrationes de falso, & vago puncto vstorio, sint paralogismi. Interim de vero, ac certo puncto vstorio distante à vertice paraboles in axe per quartam partem lateris recti inuariati, & iuxta conica elementa explicati, habes apud nos breuem, ac perfacilem geometricam demonstrationem in corollario tertio progym. 2. Apiar. 7.

§XXVII.

PRAXIS VI–

– Describendi geometricè parabolen.

Iungantur ad rectum in G rectæ occulta HG lubitæ magnitudinis pro latere recto, & GA indefinita pro axe describandæ parabolæs. Sumantur in AG quotlibet puncta F, D, B, & interuallo GH fiant ex F, D, B sectiones in M, C, E, ac describātur occulti semicirculi EIG, CKG, MLG tangentes se in G Erigantur occultæ perpendiculares ex F, D, B pertingētes ad semicirculos in L, K, I. Dico mixtam leniter curuatam, ac ductam à G per I, K, L esse parabolen. Sunt enim, per 13 huius, perpendiculares BI, DK, FL mediæ proportionales inter GB, BE; inter GD, DC; inter GF, FM hoc est inter partes axis interceptas inter verticem G, & inter ipsas perpendiculares, & inter la-



latus rectum, cui æqualia facta sunt segmenta FM, DC, BE; ergo sunt FL, DK, BI ordinatim actæ ad axem paraboles. &c. iuxta antedicta ex Apollonio. &c. ex Apiarijs. &c.

In alteram etiam partem transferenda praxis erit pro complendà parabolà.

SCHOLION VI.

Licebit fortasse similem in modum hyperbolen, & ellipsim describere per medias proportionales, quarum quadrata excedant rectangula sub interceptis, & sub latere recto, vel deficiant, &c. Prætimus, sequatur si cui plus otij, atq; ingenij, quam nobis.

§. XXVIII.

SCHOLION VII.

De Aliis paraboles descriptionibus, —

— *Qvas vide in citato Apiario 7. Hic trium sectionum conicarum (ex vsibus propos. 28, 29 huius, & 44 lib. 1) saltem aliquas Tyronibus descriptiones apposuimus, in quibus ad praxim adducerent inuentiones proportionalium linearum, quas in proximè antecedentibus huius lib. 6 propositionibus abundè didicerunt. Nomine praxeon hic vt plurimum inscripsimus antecedentes eas operationes, in quibus aliquid supponitur extra Euclidem, propter rationes, & exempla Geometricorum scriptorum non semel allata in to. 1 huius Ærarij.*

§XXIX.

SCHOLION VIII.

De motu proiectorum parabolicè inflexo.

Car-

CArdanus de elementis libro 2. paginâ 96 in impressione Lugdunensi anni 1580 primus aduertit, & prodidit motum illum parabolicè inflexum in proiectis. Quare mirandum est quà cõfidentia aliqui post Cardanum id inuentum sibi vsurpent tamquã proprium. Nec verò demõstratiuè docetur ille inflexus motus tamquam præcisè parabolicus, sed cõiectatur ceu parabolicus. Quicumq; igitur putant se geometricè demõstrasse aliqua circa eius motùs figuram tamquam parabolicam, habent infirmum, idest non demonstratiuè firmatum, fundamentum suarum theoriarum.

§ XXX.

SCHOLION IX.

De Ellipsi, Hyperbolà, Parabole apud nos etiam in numeris medijs proportionalitatum Geometricæ, Arithmeticæ, Harmonicæ.

VIde nos ad propos. 5. lib. 2, pro ornandis propositionibus 28, & 29 huius, & 44 libri 1.

XXXI.

MORALIA

E triplici genere geometricæ Applicationis.

QVemadmodum Geometrica Philosophia suas habet applicationes, excessus, & defectiones, sic & moralis Philosophia. Illa ad intellectum, hæc ad voluntatem. Propos. 44 lib. 1. Ad datam &c. dato triangulo equale parallelogrammum παραβάλλειν, applicare *scilicet nec excedens, nec deficiens à quantitate datæ rectæ vnde geometrica παραβολή. Prop. 28 huius:* Ad datã, &c. dato rectilineo æquale parallelogrammum deficiens, &c. applicare

re ἐλλεῖπον, vnde geometrica ἔλλειψις. 29. Ad datam, &c. dato recti-lineo æquale parallelogrammum excedens, &c. applicare ὑπερβάλλον, inde geometrica ὑπερβολή. *In moralibus parabolen, hoc est applicationē non excedentem, nec deficientem dixeris virtutem ipsam aptè, ac præcisè congruentem cum rectæ rationis lineà quasi datà, & à Deo in mortalium animis designatà; hyperbolen, & ellipsen extrema circa virtutem, atq; inter se contraria vitia excessus, & defectus. Timorem iustà mediocritate moderatur virtus Fortitudinis, vt iuxta rectæ rationis circunstantias timore vtaris. Ad lineam rectæ rationis applicat se cum deficientià timiditas, quà timetur quando non est timendum. Ad lineam eandem rectæ rationis applicat se temeritas cum excessu, dum non timet, nec retrahit se ab impendente malo quando est opus, sed ruit cæcè in pericula.*

In moralibus quænam hyperbola, ellipsis, parabola.

Aristoteles Moral. Nicomach. lib. 2. cap. 6 Virtus est habitus electiuus in mediocritate quantum ad nos consistens, quæ quidem mediocritas ratione præfinita fit, atq; ita vt prudens præfiniret. mediocritas autem duorum vitiorum, alterius per excessum, alterius per defectum: καθ' ὑπερβολήν, & καθ' ἔλλειψιν. *Totum id caput refertum est hyperbolis, & ellipsibus ijs moralibus, inter quas quasi Parabole moralis est virtus non excedens, neq; deficiens, &c.*

Apud Aristotelem hyperbolæ, & ellipses ī moralibus expressa.

Inspice figuram appositam, vt etiam circa parabolen, ellipsen, & hyperbolen conicas moraliter philosophemur. Quoniam diameter AG sectionis BAC parallela est lateri coni, nec excedit, aut deficit à quantitate duorum rectorum, quos intra se continent duæ parallelæ, dicitur iuxta Eutociū in librū 1 Conic. Apollonij (veras à nobis causas habes in anteced. eorum nominum à propositione 11, 12, 13. lib. 1. Con. Apollon. iuuat hìc hypotheses in vsum moralem ex Eutocio ponere) ἀπὸ τοῦ παράλληλον εἶναι Parabola. At

Exēplū in falsa veterum interpretatione.

cum

cum sectionis conicæ diameter incidit producta in latus coni vel intra, vel extra conum; hoc est cum AG non est parallela lateri coni, sed continet cum eo latere spatium excedens duos rectos, & producta ad partes A coincidit cum latere coni extra conum, &c. tunc, ex Eutocio, appellatur hyperbola; cum spatium inter latus coni, & inter AG deficit à quantitate duorum rectorum, & AG producta ad partes G coincidit cum latere coni inferius producto, ellipsis dicitur, iuxta Eutocium. Igitur coni latus est linea, iuxta quam parallelus est parabola, à qua recedens & spatium amplificans est hyperbola, ad quã accedẽs, & spatium imminuens est ellipsis; vtraq; recedens à rectis per excessum, & per defectum. Quæ symbola sunt vitiorum à virtutis rectitudine recedentium deficiendo, vel excedendo. Atq; vt per A vnica tantum lateri coni parallela duci potest, plures verò à latere coni recedentes, & ad latus coni accedentes, sic (ait Philosophus in cap. cit.) peccare multis modis possumus: malum.n.est infiniti, vt Pythagorici coniectabant, bonum autem finiti: rectè agere vno verò modo tantum licet: atq; idcirco illud facile, hoc difficile est: facilè siquidem est à scopo aberrare, sicut ipsum attingere difficile.

Vnicum virtutis mediũ, plures vitiorum excessus, & defectus à medio. &c.

Est tamen etiam in parallelismo rectæ AG ad latus coni sua quædã amplitudo, ac varietas. Nam per plura puncta supra, & infra A duci potest parallela lateri coni. Non aliter virtutis medium inter extrema vitiorum licet sit indiuisibile, determinatum, ac summum, si rei medium accipiatur, vt ibi docet philosophus, tamen quatenus medium virtutis accipitur quod ad nos, habet suam latitudinem. Affert exemplum in temperantia, cuius virtutis medium respectu robustiorum, vel minus robustorum hominum varium est in cibi quantitate, licet varietas, & materiæ pro varia edentium indigentia semper sit rectæ rationis quasi lineæ parallela. Vide ibi Philosophum. Et reuise, quæ ad hanc rem faciunt apud nos in 1. tom. Aerarij huius, § 2 ad axioma 8. & § 6 ad defin. 23.

Mediũ virtutis quod ad circunstantias non vnũ.

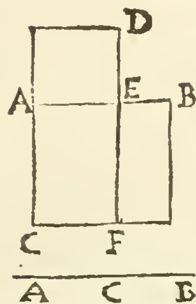
In Geometricà Philosophia non solum paraboles, sed & ellipseos, & hyperboles vsus, ac præstantiæ plurimæ sunt, vt apud nos vidisti in antecedentibus ad has 28, & 29 propos. & in 1 tomo ad definitionem de linea; at in Morali Philosophia, & in actionibus humanis solius paraboles, hoc est virtutis, & comparationis ad rectam prudentiæ, rectæq; rationis lineam, vsus, & laus est, vt cum fœlicitate viuamus. Extremorum vitiorum per excessum, & defectum pernicies est animis prauis importata cum extremà infelicitate. Itaq; stude, mi Lector, ad solam te virtutem παραβάλλειν, comparare, atq; applicare.

In Geometria vsus est etiã hyperboles, & ellipseos, in morali vsus est tantũ paraboles.

Pro-

Propos. XXX. Probl. X.

Datam rectam lineam terminatam extrema ac media ratione secare.



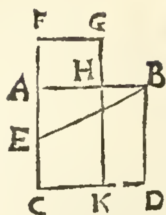
OPorteat datam terminatam A-B extrema, ac media ratione secare.[a] Describatur super A-B quadratum BC,[b] applicetur q; ad A-C parallelogrāmum CD æquale quadrato BC, excedens figura AD simili BC quadrato, quæ quadratum erit. Et quia BC ipsi CD ęquale est, si commune CE auferatur; erit reliquum BF reliquo AD æquale; sunt vero & æquiangula;[c] latera ergo ipsorum BF, AD reciproca sunt circa æquales angulos: est ergo vt FE ad ED, ita AE ad EB: & est FE ipsi AC, hoc est, ipsi AB æqualis, & ED ipsi AE; quare est vt BA ad AE, ita AE ad EB:[d] maior est autem AB quam AE; maior ergo & AE, quàm EB. Est igitur recta AB extrema, ac media ratione secta in E, & maior portio est AE. Quod oportuit facere.

a propos. 46.1.
b propos. 29.6.
c propos. 14.6.
d propos. 14.5.

SCHOLION I.

PRopositionis 14 libri 5 (citatæ ab interprete in margine præcedentis proposit. 30 huius) veritatem, quasi lemmatis, vide in numeris expeditam in 3. To. hu. Ærar. Vt verò constet veritas secundæ demonstrationis hîc apud Eucl. vbi aliter demonstrat hanc 30, accipe hîc propositionem 11 lib. 2, translatam in suum locum, vbi inseruit, & inseruiet etiam vsibus, & praxibus apud nos, vt paullo inferius videbis; in 2 verò libro otiosa est.

Aliter I.



SIt data recta AB, quam oporteat ita secare, vt quod ex tota, & vna partiũ sit rectangulum, æquale sit, ei quod ex altera parte fit quadrato. [a] Describatur ex AB quadratum ABCD, & [b] bisecetur AC in E, iungaturq; BE. producatur CA in F, sitq; EF [c] æqualis rectæ BE. [d] constituatur super AF quadratum FH, & producatur GH in K. Dico rectam AB in H sectam esse, vt AB, BH contentum rectangulum æquale sit ei, quod ex AH fit quadrato. Cùm enim recta AC bisecta sit in E, eiquè adiecta in directum AF, [e] erit CF, FA contentum, cum eo quod fit ex AE, æquale illi quod fit ex EF, sunt autem EF, EB æquales; ergo CF, FA contentum, cum eo quod fit ex AE, æquale est illi, quod ex EB quadrato: sed ei, quod ex EB [f] æqualia sunt, quæ ex BA, AE quadrata (rectus enim est angulus ad A) ergo quod CF, FA continetur, cum illo, quod ex AE quadrato, æquale est illis, quæ ex BA, AE quadratis. Commune quod ex AE auferatur, reliquum ergo, quod CF, FA continetur, æquale est ei, quod ex AB quadrato. Est autem CF, FA contentum ipsum FK ([g] nam AF, FG sunt æquales) Quod autem fit ex AB, est AD quadratum: ergo FK, AD sunt æqualia. Commune AK auferatur, eruntq; reliqua FH, HD æqualia. Est autem HD quod AB, BH continetur [h] (sunt enim AB, BD æquales) FH autem est quod fit ex AH quadratum. Ergo quod AB, BH continetur rectangulum, æquale est quadrato, quod ex AH. Recta ergo AB secta est in H, vt quod AB, BH continetur rectangulum æquale sit ei, quod ex AH fit quadrato. Quod facere oportebat.

a propos. 46.6.
b propos. 10.1.
c prop. 2. 1.
d prop. 46.1.
e propos. 6.2.
f propos. 47.1.
g def. 27
h def. 27.

Scho-

SCHOLION II.

Veritatem expeditam 6 prop. lib. 2 citatæ n margine ab interprete, vide in numeris in 3 To.hu. Ær. quasi lemmat. &c.

Aliter II.

Oporteat rectam AB extrema, ac media ratione secare: [e] secetur AB in C, vt quod AB, BC continetur æquale sit ei, quod ex AC, quadrato. Cum ergo quod AB, BC cõtinetur æquale sit ei, quod ex AC fit, quadrato, [f] erit vt AB ad AC, ita AC ad CB. Est ergo AB extrema, ac media ratione secta. Quod oportuit facere.

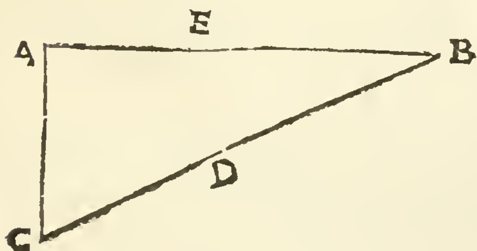
e propos. 11.2.

f propos. 17.6.

§ I.

PROBLEMA I, in quo

Praxis compendiaria geometricè, ac demonstratiuè secandi datam rectam extremà, & medià ratione.



Sit AB secanda media, & extremà ratione. Ab altero eius extremo A educatur perpẽdicularis AC æqualis dimidiæ ipsius AB. Iungatur CB: ex C, interuallo ipsius CA secetur in D iuncta CB. Interuallo reliquæ partis DB seccetur ab alterutro termino B in E data AB, quæ in E erit secta media, & extrema ratione. Demonstra-

 tio-

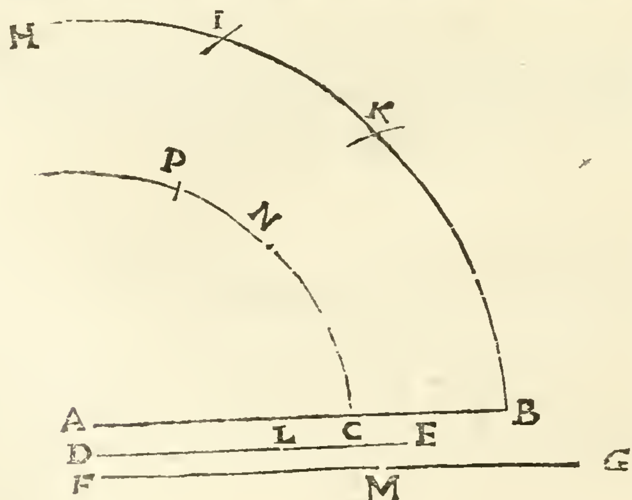
tionem huius praxis habes è secunda demonstratione Euclidis, quam habet ad hanc propos. 30, & ex propos. 11 lib. 2. hic ad vsum antepositâ.

Est enim hæc praxis compendiarius vsus constructionis eiusdē propos. Vide in anteced. figuram Euclidis, & confer cum figura nostræ huius praxis, atq; in hac agnosce illius breuiora vestigia.

§. II.

PROBLEMA II, in quo

Praxis secunda demonstratiua ex vnica linea diuisa secundum mediam, & extremam rationem quotlibet alias datas siue maiores, siue minores facilè, ac demonstratiuè secare secundum mediam, & extremam rationem.



Sit recta AB diuisa in C media, & extrema ratione iuxta antecedēs problema, & sint quotlibet aliæ ipsâ AB minores, vt DE, vel maiores,

iores, vt FG secandæ media, & extrema ratione.

Alterutro ipsius AB extremo A facto centro, interuallo totius AB signetur arcus etiam vltra quadrantem, si lubeat, vel sit opus, sitq; BH.

Pariterq; centro A, & interuallo segmenti AC ducatur alter minor arcus CP etiã vltra P. Deinde accipiatur vtriuslibet secandæ puta minoris, longitudo DE, & centro B fiat sectio arcus maioris BH in K. Apposità deinde regulà ad puncta A, K, notetur vbi ea secabit in N minorẽ arcum CP: mox accepto interuallo CN, & facto centro alterutro extremo D lineæ proportionaliter secandæ, fiat sectio in L, eritq; DE secta in L media, & extrema ratione.

Pari ratione interuallo maioris secandæ FG fiat ex B sectio maioris arcùs in I. Apponatur regula ad A, I, quæ secabit minorem arcum in P. Interuallo CP ab alterutro extremo F fiat sectio in M. Eritque FG secta in M media, & extrema ratione. Demonstratio patet ex 4. huius. Ductis enim rectis ex A per NK, PI, sunt triangula, quorum latera proportionaliter secantur in P, N, C; I, K, B, &c. Ac vt AC ad AB, sic CN ad BK, idest DL ad DE, & CP ad BI, idest FM ad FG. Indico fontes, è quibus tu minutiores riuulos probationum diducas, iuxta 4 prop. hu. li. 6. applicatam iam non semel vsui circini proportionum.

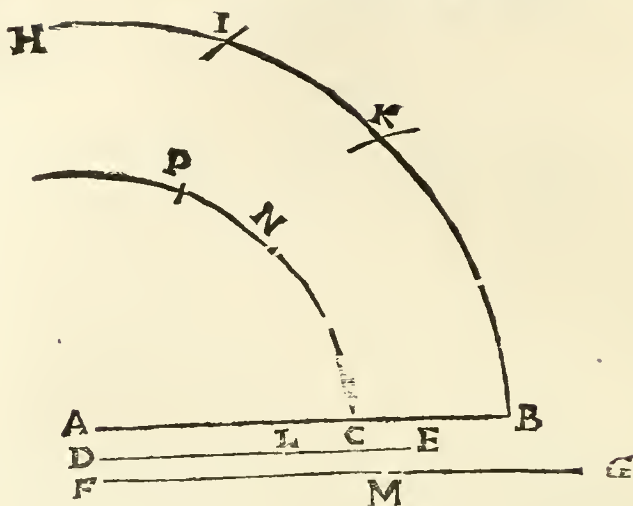
§.III.

COROLLARIVM I.

Rectæ lineæ sectæ extremà, & medià ratione sunt omnes in eàdem proportione.

HAec propositio, quæ per plures ambages demonstratur tum ab Euclide prop. 7 apud Commandinum, secundà apud Clauium, in lib. 14 Elem. sed in li. 13 apud Maurol. propos. 7. tum à Pappo lib. 5 prop. 44, breuissimè, ac facillimè apud nos tamquam corollarium deducitur, ac demonstratur è probl. 2 antecedenti, eritq; vsui in sequentibus ad hanc 30 propos. Eucl.

Sectis enim AB, DE medià, & extremà ratione in C, & L ex antecedentecen-



tecedenti problemate, si fingas ipsam DE applicatam sub arcu BK, &, ductà rectà imaginarià AK, facta duo triangula æquiangula ACN, ABK, erit vt AC, maius segmentium rectæ AB, ad CN (æquale ipsi DL) maius segmentum ipsius BK (æqualis ipsi DE) sic tota AB ad totam BK, & permutando vt maius segmentum AC ad totum AB, sic maius segmentum CN (idest DL) ad BK (idest DE) totam; & aliter comparando totas cum minoribus segmentis, & partes cum partibus; componendo, diuidendo, &c. ergo sunt in eàdem, siue ijsdem proportionibus prædictæ, atq; aliæ omnes rectæ sectæ medià, & extrema ratione.

§ IV.

LEMMA I.

Si recta linea extrema, & medià ratione secetur, apponaturq; ei linea æqualis maiori segmento, tunc & tota rectà lineà extremà, & medià ratione secabitur, & maius segmentũ

erit

erit ea, quæ in principio, recta linea. Et è conuerso. &c.



SIt recta AC in puncto D extremà, & medià ratione secta, & maius segmentum DC, cui æqualis apponatur CB. Aio tunc quod & tota AB extremà, & medià ratione secatur in puncto C, & quod maius segmentum est AC. Quod sic ostenditur. Nã AC ad ipsam CD, vel CB, est sicut CD, vel CB ad ipsam DA, ex hypothesi; & conuersim CB ad ipsam AC, sicut DA ad ipsam CD; & coniunctim BA ad ipsam CA, sicut AC ad ipsam CD, vel CB. Quod est propositum.

Quod si sit AB in puncto C secta extrema, & media ratione, & maius segmentum sit AC, de quo abscindatur CD æqualis CB, tunc AC in puncto D secabitur extrema, & media ratione, & maius segmentum CD. Nam AB ad ipsam AC, sicut AC ad ipsam CB, vel CD, & ideo, per decimam nonam quinti, sic erit BC, vel CD ad ipsam AD. Quod est propositum.

SCHOLION III.

LEmma præcedens est propositio 5 lib. 13 apud Euclidem, & eius conuersum (præter antec. ex Maurol.) est etiam apud Commãdinum in Comment. ad eam propositionem 5 lib. 13. Nos ijs iam satis vulgatis omissis, opposuimus ex Maurolyco, quæ est apud eum 5 propositio in primo libro, ex tribus, in quos compendiosius, ac facilius, quam Euclides, coegit libros elementares 13, 14, 15. Facit pro Tyronibus dum supponit tantum aliquas definitiones, ac vnicam prop. li. 5. quas in numeris habes apud nos in promptu. in 3 To. hu. Aer.

§. V.

PROBLEMA, & Praxis III.

Da-

Datam rectam lineam in infinitum vel imminuere, vel augere ita, vt in omni auctione, vel imminutione facillimè sẽper fiat sectio mediâ, & extrema ratione.

A D E C B

Data sit AB, quæ primo secta sit in C media, & extrema ratione, siue proportionaliter, vt AB ad AC, ita AC ad CB. Quæ per partes minores, ac minores semper extrema, & media ratione imminuetur sic. Interuallo minoris segmenti CB secetur maius segmentum AC in D (siue ad praxim expeditiorem, replicetur CB ex C in D) eritq; ipsa pars AC secta proportionaliter in D; & CD (quod erat totius AB segmentum minus CB) erit ipsius AC segmentum maius. Rursus ipsius AC segmentum minus AD replicetur ex D in E; erit pars DC secta proportionaliter in E; & DE, quod erat ipsius AC minus segmentum AD, erit ipsius DC maius segmentum. Ac sic deinceps replicando segmenta minora supra maiora in infinitum, fient maiorum segmentorum sectiones proportionales, & segmenta minora fient maiora in sectionibus maiorum, iuxta exempla allata per vlteriores semper imminutiones.

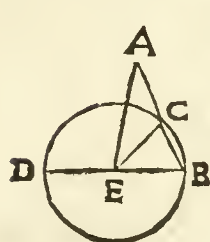
Quod attinet ad auctiones; sit DC, secta primo proportionaliter in E vt CE ad ED, ita ED ad DC. Maius segmentum DE apponatur ex D ipsi CD in directum, fiatq; auctio in rectam AC, quæ erit secta proportionaliter in D, & segmentum AD, quod erat maius (nempe ipsum DE in ipsa DC) erit iam minus in aucta AC. Rursus ipsius AC segmentum maius DC apponatur ex C ipsi CA in directum, fiatque noua auctio in rectam AB, quæ erit secta proportionaliter in C; & segmentum CB, quod erat maius (nempe ipsum CD in ipsa CA) erit iam minus in aucta AB. Ac sic deinceps explicando segmenta maiora in directum per infinitas auctiones, fiẽt semper sectiones proportionales maiorum, ac maiorum linearum auctarum.

Demonstratio vtriusq; operationis in hoc 3 problemate patet ex antecedenti Lemmate. 1. &c.

§. VI.

LEMMA II.

Si ſexanguli, & decagoni in eodem circulo deſcriptorum latera componantur, compoſita tota extremà, & medià ratione ſecatur, & maius ſegmentum eſt ipſius ſexanguli latus. & è conuerſo. &c.



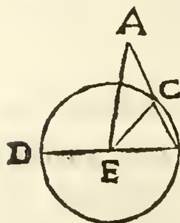
VT ſi in circulo DCB deſcripto latus decagoni ſit CB, cui adnectatur in rectũ CA latus hexagoni in eodem circulo deſcripti, cuius diameter DEB, cẽtrũq; E. Aio quod AB in puncto C extremà, & media ratione ſecatur, & maius ſegmentum AC eſt latus hexagoni. erit enim angulus DEC duplus ad angulum ECB, per 32 pri. & angulus ECB duplus ad angulum A. Sed idem angulus DEC quadruplus eſt ad angulum CEB, per vltimam ſexti (*vide ſchol. ſeq.*) Igitur anguli A, & CEB æquales, & idcirco triangula AEB, BCE inuicem æquiangula, & ſimilia. Quare ſicut eſt AB ad ipſam BE, hoc eſt ad ipſam CA, ſic erit BE, vel AC ad ipſam CB. Atq; ideo AB in puncto C extremà, & media ratione ſecatur. Quod erat demonſtrandum.

Quod ſi lineæ extremà, & medià ratione diuiſę maius ſegmentum ſit latus hexagoni in aliquo circulo deſcripti; tunc minus ſegmentũ erit latus decagoni in tali circulo clauſi. Item ſi minus ſegmentum ponatur latus decagoni, tunc maius erit latus hexagoni eiuſdem circuli. Quæ ſunt quaſi conuerſæ præcedentis. &c.

SCHOLION IV.

PRæcedens propoſitio eſt 9 libri 13 Eucl. quam habes, mi Tyro, opportunè ad finem hu. li. 6. ab interprete Lantzio. nos hìc eam

dedimus cum ſuis quaſi conuerſis ex Maurolyco breuitatis ſimul, & copiæ, ac varietatis gratia. Dum vero ait: idē angulus DEC *quadruplus* eſt ad angulū CEB, *nos ſine 33 prop. hu. 6. li. ſi lubeat pro Tyronibus in numeris indicabimus, poſito angulorū quantitatē apud Aſtronomos, & Gnomonicos ſpectari è numero graduū arcùs ſubtendentis angulum, à quo tamquam centro ductus ſit. Cum ergo recto angulo ſubtendatur arcùs quadrantis grad. 90, & duobus rectis arcus ſemicirculi grad. 150, & decagoni latus, iuxta ſonum nominis, ſubtendat decimam partem totius peripheriæ grad. 360, ideſt arcus CB ſit grad. 36, qualium eſt 180 ſemiperipheria DCB, ergo detractis 36 grad. arcùs CB ex 180 totius DCB, remanet arcus DC anguli DEC grad. 144, qui numerus eſt quadruplus numeri 36, ideſt angulus DEC quadruplus anguli CEB.*

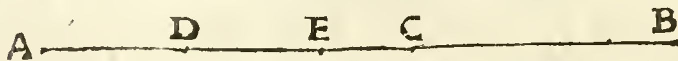


§. VII.

LEMMA III.

Si latus hexagoni ſecetur extremà, & medià ratione, erit maius ſegmentum latus decagoni inſcribendi circulo, cuius ſemidiameter eſt latus hexagoni ſectum media, & extremà ratione.

Hoc Lemma mox expediemus nos facilius, quàm Maurolycus, ex lemmate § 4, & Problemate § 5, ſic. Finge latus eſſe hexagoni AC, & iuxta anteced. lemma, adiectum eſſe latus decagoni CB, ita vt tota AB ſecta ſit in C ex-



tremà, & medià ratione. Replicetur, iuxta probl. § 5 anteced. CB in CD, erit per lemma § 4, AC ſecta in D medià, & extremà ratione, & maior portio DC æqualis, per conſtructionem, lateri decagoni CB.

§ VIII.

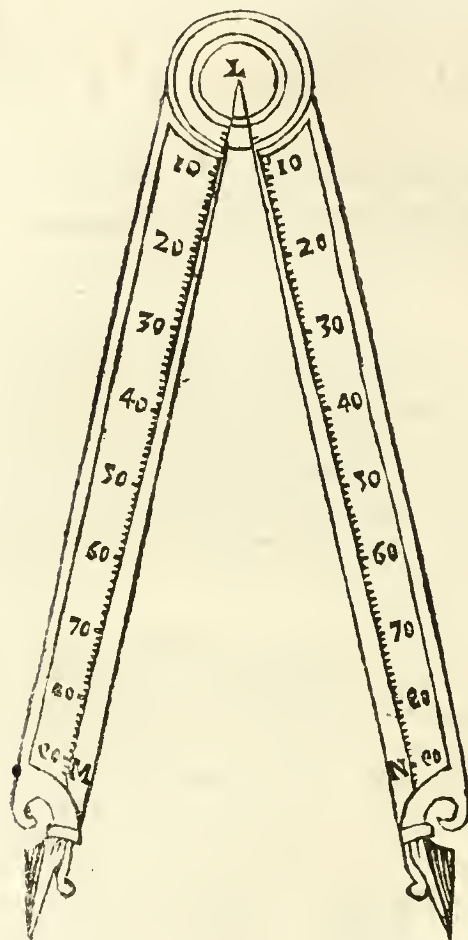
PROBLEMA V.

E circino proportionum expeditiſſimè datam rectam media, & extremà ratione ſecare.

QVemadmodum in praxi 2 ex antecedentibus, quæ purè geometrica eſt, è ſemel vnà proportionaliter diuiſà lineà quotcunque aliæ proportionaliter diuiduntur, ita ſi ſemel proportionaliter diuiſam vnam lineam transferas in vtrunque latus circini proportionum, poteris ex vnicà illà vnicæ lineæ proportionali diuiſione diuidere proportionaliter quotlibet datas (vt mox videbis) expeditius, quàm per antecedentes modos geometricos. Atq; hìc quidem organicus è circino proportionum geometrico demonſtratiuæ ſolertiæ fundamento nititur.

Nametiam ſine translatione ſectæ proportionaliter lineæ in vtrũque latus circini proportionum, latet arcanum hoc compendium geometricum in ea circini facie, in quam translati ſunt gradus 90 quadrantis; eſt enim vtriuſque lateris linea LM, LN ab L ad 60 diuiſa in numero 36 ſecundum mediam, & extremam rationem, vt mox demonſtrabo.

Itaque datam ver. gratia FG ſecturus media & extrema ratione, accipe illius quãtitatem, eamque interpone inter 60, & 60, diductis cruribus circini MLN, eàque immota manẽte diductione



ctione, accipe interuallum inter 36, & 36, eoq; ab alterutro datæ extremo F fac sectionem in M, eritq; FG secta in M mediâ, & extrema ratione. Demõstratio huius operationis patet è lemmate 3 præcedenti in § 7. est enim FG pro latere hexagoni, & maius segmẽtum FM latus decagoni. Nam positâ circuli peripheriâ graduum 360, eâq; per 6 diuisâ, latus hexagoni circulo inscripti subtẽdit gradus 60, & per 10 diuisâ eâdem peripheriâ, latus decagoni subtendit gradus 36 (atq; habes in circino LMN rectas subtẽdentes etiam vsq; ad gradus 90 nempè integri quadrantis) ideo habes ab L ad 60 latus hexagoni diuisum proportionaliter ab L ad 36, idest à latere decagoni.

Vt ergo ab L 36 latus decagoni ad 60 latus hexagoni, &c. sic interuallum inter 36, & 36 ad interuallum inter 60, & 60, idest FM ad FG, &c.

§ IX.

SCHOLION V.

Geo-

Geometrica philoſophatio cum paradoxo diſſolutoria oppoſitionis Arithmeticę contra operationem anteced. § 8.

QVoniam igitur hexagoni latus 60 diuiſum eſt media, & extrema ratione à decagoni latere 36, eſtq; ſecti 60 maius ſegmentum 36, minus 24, erit quadratum ex maiore ſegmento æquale rectangulo ſub tota 60, & minore ſegmento 24, per 17 huius. Eſt autem in numeris rectangulum ſiue productum è 24 in 60 numerus 1440. erit igitur & quadratum rectangulo æquale nempe ex ductu lateris decagoni 36 in ſe. At hoc non eſt. nam 36 in 36 ducta producunt 1296. Quis autem non videt non eſſe æquale quadratum 1296 rectangulo 1440? Ergo ex tuo iſtoc circino proportionum, inquit Tyro, prauè ſecaſti datam FG in puncto M pro media, & extrema ratione; ac latus hexagoni non ſecatur à latere decagoni extrema, & media ratione.

Reſpondeo primo. Anguſtiæ ſunt inter duas ſibi oppoſitas demonſtrationes, quarum neutram non eſt poſſibile negari. Nam Geometrica demonſtratio in anteced. § 7 non patitur dubitationem, ab eaque patet latus hexagoni ſecari à latere decagoni extremà, & medià ratione. Oppoſitè tamen, demonſtratio arithmetica eſt, quadratum ex latere decagoni non eſſe æquale rectangulo ſub latere hexagoni, & ſub minore ſegmento. Quid igitur dicendum? Tam certum eſt, ac demonſtratum id, quod impugnatur, quam id quod impugnat; ideo nec impugnatio labefactat impugnatum, nec impugnatum tamen ſoluit impugnationem.

A partibus ad totũ non valet argumẽtũ.

Reſpondeo nihilominus ſecundo. Aliquando non valet argumentari ab omnibus partibus ad totum, quod ex ÿs partibus conſtat. Aliquas enim aliquando affectiones patitur totũ continuatum, & non conciſum in ſuas partes, quas affectiones non habent partes etiam omnes ſimul ſumptæ totius. Sic & aliqua demonſtrantur aliquando in lineis, & figuris quantitatis continuæ, quæ non conueniunt etiam quantitati diſcretæ. Aliquando aliqua vera ſunt geometricè, quæ non poſſunt & arithmeticè vera oſtendi, præſertim vbi arithmetica ratiocinatio procedit per analogiam, quandam, non per identitatem cum geometricis. Ad vitandas igitur aliquas fallacias in elementaribus philoſophationibus videndum eſt in quo genere ſit demonſtratio, & ſi in genere quãtitatis continuæ, ſunt etiam conſequentes proprietates demonſtratæ intelli-

Nõ omnia geometricè demonſtrata poſſũt & arithmeticè demõſtrari

telligendæ in eodem genere, idq; fermè; licet plerunq; ita conueniant sorores Geometria, & Arithmetica, vt idem ab vtraq; demonstretur; tamen aliquando singulæ suam sibi sepositam habent dotem, qua non licet promiscuè vti, atq; abuti.

In exemplo igitur oppositæ hic difficultatis, proprietas illa, quam propos. 17 hu. lib. 6 demonstrat consequi ex tribus rectis lineis proportionalibus, vt mediæ quadratum sit æquale rectangulo sub extremis, accipienda, & intelligenda est in subiecta ibi materia, nempè in quantitate continua. Nam in quantitate discreta, id est in lineis per numeratas æquales partes concisis fallet te, mi Tyro, in eo casu peculiari, licet in aliquibus alijs geometricis non fallat Arithmetica.

Nullus numerus potest inæqualiter ita bifariari, vt productũ ex toto ĩ minorẽ partem sit æquale quadrato maioris partis.

Ratio fallaciæ, siue deficientiæ illius in Arithmeticis est quia nullus numerus ita potest in duos numeros diuidi, vt numerus productus ex toto in minorem partem, æqualis sit quadrato partis maioris. Idque demonstratur in Arithmetica philosophia ex absurdis impossibilium consequentiũ. Quas demonstrationes vide, præter alios, apud nostrum Clauium ad lib. noni propositionem 14, sub finem, atq; etiam ad 29 propos. eiusdem libri. Sic apud Commandinum ad lib. 9 proposit. 15, Barlam quidam monachus demonstrat etiam arithmeticè geometrica priora decem theoremata lib. 2 Eucl. tamen deficit in theoremate 11, quia non omnia vtriq; scientiæ conueniunt, licet pleraq; propter antedicta.

Igitur quid mirum si geometricè demonstratum est in antec. § 8 hexagoni latus à decagoni latere secari media, & extrema ratione, & tamen nec vtriusq; lateris in partes æquales concisi, nec vtriusq; segmenti maiores, & minores numeros habere proprietatem, quam habent lineæ, & latera illa geometricè sumpta? Id est vt quãtitates sunt cõtinuę; scilicet vt maioris segmenti, ac lineæ quadratum sit æquale quadrato sub reliquis duabus lineis extremis. Constat igitur operatio diuisionis lineæ datæ secundũ mediam, & extremam proportionem per circinum proportionum geometricè peracta, licet arithmeticum examen per numeros particularum æqualium in lateribus hexagoni, & decagoni sit fallax.

Paradoxum cõtra 17. propos. huius.

Concludamus cum paradoxo: Trium linearum inter se proportionalium quadratum ex media non est æquale rectangulo sub extremis. *Quod videtur contra 17 propos. huius, tamen ex antecedentibus est solutum.*

§. X.

PROBLEMA VI.

Datâ

Datà lineà pro minori ſegmento, addere illi alteram pro maiori ſegmento, ita vt tota compoſita ſecta ſit extrema, & media ratione.

ESto recta data linea MG pro minori ſegmento, cui quæritur altera linea, quam addere opportet pro maiori ſegmento, ita vt ex vtraq; compoſita ſecta ſit mediâ, & extremâ ratione. Interuallum datæ MG interponatur inter nu. 24, & 24 circini proportionum diducti, eaq; diductione manente, accipiatur interuallum inter 36, & 36, eoq; ex M ſecetur GM producta in F, eritq; compoſita FG ſecta extremâ, & media ratione. Nam FM 36, & MG 24 conficiunt 60 latus hexagoni, eſtq; maius ſegmentum FM 36 latus decagoni. Ergo, per lemma 3 in § 7, facta eſt additio maioris ſegmenti FM dato minori MG ita, vt tota compoſita FG ſecta ſit in M mediâ, & extrema ratione.

fig. 9 a

§. XI.
PROBLEMA VII.

Datà rectà pro maiori ſegmento, addere minus conficiẽs ſectionem totius proportionalem.

DAti ſegmenti maioris interuallum interponatur in diducto circino proportionum arcuum quadrantis inter numeros 36 & 36, &, immotà manente diductione, accipiatur interuallum inter 24, & 24, eoq; ex M ſecetur FM producta in G, erit, per antecedentia, compoſita FG è ſegmentis in M proportionaliter eam diuidentibus.

Aliter èadem problemata 6, & 7. &c.

DIducto circino proportionum ad interuallum dati minoris ſegmenti MG 24, accipiatur interuallum inter 60, & 60, & eo ex G ſecetur GM producta in F.

Diducto verò circino proportionum ad interuallũ dati maioris ſegmenti FM 36, rurſus accepto interuallo inter 60, & 60, ex F ſecetur

tur FM producta in G. Demõstratio operationis patet ex lẽmatib. antec.

Itaq; vel per additiones ad commune punctum M, & ex eo sectiones, ad extrema F, aut G, vel per compositiones, siue appositiones totius FG super alterutro segmento indefinitè producto, & per sectiones ab alterutro extremo F, G, soluitur problema.

§ XII.
COROLLARIVM II.

Datæ rectæ duas extremas proportionales adinuenire.

H*Oc problema, quod quasi conuersum est propos. 17 huius § 6, & ibi geometricè soluimus hic etiam organicè demonstratiuè deducitur, ac soluitur è proximè antecedentibus. Quoniam enim data futura est media inter duas inuentẽdas, hoc est quadratum eius esse debet æquale rectangulo sub duabus inueniẽdis, erit data pro segmento maiori. Cui si per proximè antedicta, adinueniatur minus segmentum ita, vt composita tota sit secta à cõmuni iunctura segmentorum extremà, & medià ratione, erit solutum problema.*

§ XIII.

Vsus multiplices, atq; amplissimi, ac miræ affectiones lineæ sectæ secundum mediam, & extremam proportionem indicati.

Linea proportionaliter secta irrationali proportione conciliat rationaliter etiã irrationalia infinita solida.

C*Ampanus ad propos.* 10. *lib.* 14 *in suo Euclide, præter cætera, hæc habet*: Mirabilis est potentia lineæ sectæ media & extrema proportione. Cui cum plurima philosophantium admiratione digna conueniant, hoc principium, vel præcipuum ex superiorum principiorũ inuariabili procedit naturà, vt tam diuersa solida tũ magnitudine, tum basium numero, tum etiam figura, irrationali quadã symphonia rationabiliter conciliet: *Habes in schol. § 9 antecedent. vnde intelligas quid sit lineã proportionaliter sectam habere proportionem irrationalem.*

Oron-

Orontius propos. 1 *lib. de rebus Mathem. hactenus desider.* Huius diuinæ proportionis beneficio quinq; regularium corporum ab Euclide conciliata est harmonia. *Scilicet vsus sectæ proportionaliter rectæ lineæ est amplissimus in Stereometria; quin & ipsamet sectio miras habet proprietates. Vide specimina, & exempla ab initio lib.* 13. *Eucl. vsq; ad extremum* 15 *librorum elementarium, præter alios Authores reconditioris Geometricæ Philosophiæ. Ipsemet Orontius vtitur sectione ea lineæ proportionali pro circuli quadratione lib.* 2, *propos.* 11; *pro inuentione duarum mediarum proportionalium lib.* 1, *propos.* 2, *vnde præcipua Stereometria pendet. Ac affirmat in cit. prop.* 1. *lib.* 1. *per sectionem proportionalem rectæ lineæ:* Nos bonam partem eorū, quæ in ipsis desiderabantur Mathematicis, tandem absoluimus *Addit:* Admirabiles rationum compositiones, similitudine sue data linea recta in se se complecti videtur, quæ proportionaliter, seu media, & extrema ratione diuiditur.

Regularium corporum harmonia à linea rationaliter secta

Quadratio circuli, & duæ mediæ à linea proportionaliter secta.

Propositione vero 2 *eiusdem lib.* 1 *applicat sub angulo normæ lineam proportionaliter sectam, cuius ope quæcunq; pollicitus est, exequitur, nec dubitat affirmare de norma eà cum eà lineæ proportionaliter sectæ inscriptione, esse thesaurum, atq; addit.* Gnomonis *(cum ea linea secta)* instrumentum *(sic)* absolutum (citra affectionem) futura admirabuntur secula *Bonus Orontius eloquitur candide id quod animo sentit, etiam de suo inuento. Ac licet aliquibus non videatur ea omnia præstare præcisè quæ pollicetur, tamen non erat quod eorum nonnemo inuidià, & odio etiam nationali Gallicum Philosophum tantopere argueret, sed si quæ minus probaret, omitteret, frueretur verò quamplurimis, quæ in eius Authoris libris valde laudanda sunt. Sane in Orontij Mathesibus facilitas, perspicuitas, varietas, & perpetuum acumen ingenij elucet, ac se præstat pro eo qui fuit Philosophus Mathematicus verè Regius. Apud quem vide in antecitatis locis vsus præcipuos, & insuetos lineæ proportionaliter sectæ.*

Reprehensi reprehensiores Orontij.

Laudes Orontij.

Frater Lucas ex Oppido S. Sepulchri iusto libro complexus est miras affectiones, ac vsus lineæ proportionaliter sectæ, præsertim è theorijs postremorum elementarium librorum Euclidis.

Vide & Pappum lib. 5, *propos* 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48, *&c. Commandini commentaria in eas Pappi propositiones, in quibus habet theoremata, & vsus præclaros lineæ proportionaliter sectæ. Vide apud Euclidem, præter alias, propositiones* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *corollar. ex* 17, *&c. lib.* 13. *& lib.* 14, *propos.* 2, 4, 10, 23, 25; *& li.* 15 *in Schol. Clauij ad propos.* 13, *& in Schol. ad propos.* 14. *&c.*

Vsus lineæ proportionaliter sectæ apud Pappum & Euclidem.

Exempla aliqua vſuum geometricorum lineæ proportionaliter ſectæ in aliquo problemate, ac theoremate circa figuras planas.

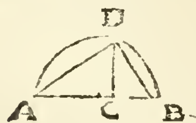
QVoniam Tyrones nondum imbuti ſunt cognitione, ac nondum demonſtrationibus inſtructi circa figuras ſolidas, de quibus agitur in poſterioribus elementis, hîc tantum apponam ſaltem vnum, vel alterum exemplum vſûs lineæ proportionaliter ſectæ in aliquibus figuris planis.

§.XIV.

PROBLEMA VIII.

Super data recta triangulum rectangulum excitare, quod habeat latera in eàdem inter ſe proportione.

NE videamur omnes, è tam multiplicibus, vſûs lineæ proportionaliter ſectæ tantum apud alios indicare, nullos verò nos hîc de noſtro, ac non paſſim vulgatos apponere, præter inſignem illum à nobis expoſitũ in antecedentibus de continuatione datæ proportionis in lineis innumeris ad maiores, & minores terminos, accipe hîc etiam non contemnendum.



Sit data AB, ſuper qua conſtruendum ſit triangulum rectangulum, quod habeat latera cõtinuè proportionalia, Secetur AB in C extremà, & medià ratione per varios modos antepoſitos. Deinde ſuper AB deſcribatur ſemicirculus ADB, ex C erigatur perpendicularis CD pertingens ad ſemicirculum in D, & iungantur rectæ AD, DB. Dico ADB eſſe triangulum primo rectangulum, quia angulus D in ſemicirculo rectus, eſt, ſecundò habere latera vt BD ad DA, ita DA ad AB. Quoniam enim ſectio

pro-

proportionalis est in C ipsius AB, est maius segmentū AC medium proportionale inter AB, BC; est autem, per corollarium octauæ huius, latus DB & ipsum medium proportionale inter easdem AB, BC, ergo, per 9 quinti, AC, DB sunt inter se æquales. Rursus per corollar. 8 huius, latus DA est medium proportionale inter AB, AC (idest inter AB, DB, quod DB ipsi AC probatum est æquale) ergo tria latera BD, DA, AB sunt inter se continuè proportionalia. Quare super data AB constitutum est triangulum rectangulum, quod habet tria inter se continuè proportionalia latera, idq; ope rectæ sectæ proportionaliter.

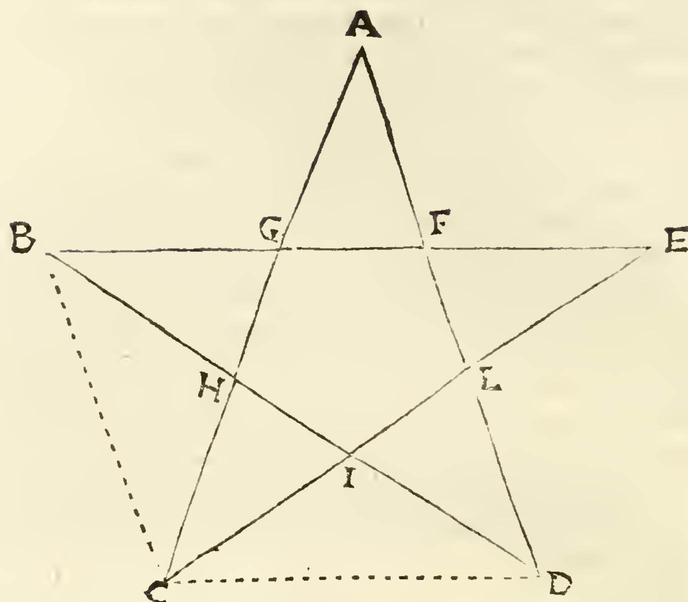
Hoc idem problema possemus demonstrare etiam per trium laterū in triangulo rectangulo quadrata proportionalia, quorum radices AB, AD, DB proportionales educerentur, sed minoris ea esset probatio facilitatis, simplicitatis, perspicuitatis, quàm modò hìc allata. Ideo eam omittimus. Quod sæpius diximus, non quærimus pompam, & existimationem apud doctiores varietatis, & copiæ inutilis in doctrinà, sed facilitatem & vtilitatem Tyronum, vt sine tædio, ac lubentius è nostris lucubrationibus Mathematicæ Philosophiæ penitiora adyta penetrent.

§. XV.

THEOREMA I.

Si dati pentagoni regularis latera vtrinq; producantur donec in angulos coeant, omnia latera secantur mutuis geminis sectionibus secundum mediam, & extremam proportionem, in quarum sectionū alterà maius segmentum est latus pētagoni maioris circumscribendi, in alterà verò minus segmentum est latus dati minoris pentagoni. &c.

Sit datum pentagonum regulare, hoc est æquiangulum, & æquilaterum GHILF, cuius latera vtrinq; producta coeant in angulos



los A, B, C, D, E (coibunt autem per ea quæ à nobis demonstrata sunt in propos 2. progym. 7. Apiar. 3) dico singula latera producta AC, BD, CE, DA, EB secari gemina sectione secundùm mediam, & extremam rationem, verbi gratia latus BD secari prima sectione in H, & I ita, vt maius segmentum DH, vel BI sit æquale lateri, verbi gra. ipsi BC, vel CD lateri maioris pentagoni regularis circumscribendi per cuspides A, B, C, D, E. Dico prætereà prioris sectionis maiora segmēta secari altera sectione secundum mediam, & extremam proportionē, verb. gratia segmentum maius BI secari in H, vel DH secari I extrema, & media ratione ita, vt commune minus segmentum HI sit latus dati minoris pentagoni regularis GHILF, tota vero secta sit æqualis lateri pentagoni maioris. Mira sane affectio propositæ figuræ, cuius omnia, & singula latera tot mutuis sectionibus concisa sunt solummodo sectionibus proportionalibus mediæ, ac axtremæ rationis, & consequenter prædita sint miris alijs proprietatibus, quæ consequūtur proportionalem eam sectionem in figura toties multiplicatam, sintq; per 17 huius, tot quadrata, & rectangula sub ijs segmentis maiora, minora inter sese æqualia. &c. Et latera pentagonorum. &c.

Ac patet quidem in figura segmentum HI, ac reliqua IL, LF, &c. esse latera dati minoris pentagoni, sed probandum erit ea esse minora

in

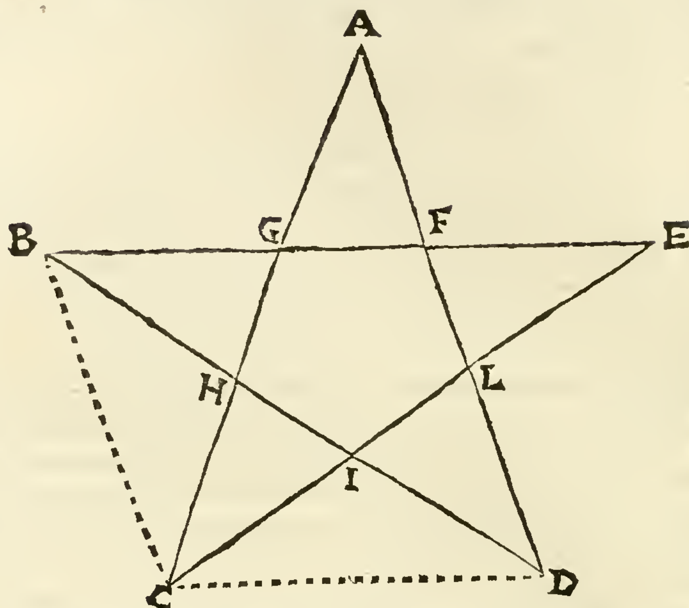
in sectione secundum mediam, & extremam proportionem. Vt vero vniuersa demonstratio singularum enuntiationum facilius à Tyronibus percipiatur, in aliquot particulas à nobis secabitur, alijs alias prælucentes, ac præparatorias.

1 *Iunctis lineis BC, CD, &c. ad vertices A, B, C, D, E, fiet pentagonum regulare. nam (per probata à nobis in cit. propos. 2, &c. Apiar. 3) quina triangula subijs verticibus sunt isoscelia inter se omnia æqualia, AGF, BGH, CHI, DIL, ELF, ac propterea triangulorum item isoscelium, & æqualium BHC, CID, &c. bases æquales sunt BC, CD. &c. Angulus verò BCD est pentagoni, qui continet sex quintas vnius recti, iuxta dicta à nobis ad 32 prop. libri 1 Elem. in To. 1 huius Ærarij. Quoniam enim dati regularis pentagoni angulus HIL continet sex quintas vnius recti, reliquus HIC ad complementum duorum rectorum continebit quatuor quintas vnius recti; pariq; ratione angulus CHI continebit quatuor quintas ergo ad complementum duorum rectorum in triangulo tertius ad verticem HCI duæ quintas recti cōtinebit. Rursus angulus CID ad verticem angulo pentagoni continet sex quintas vnius recti, ergo in isoscele ICD alteruter ad basim, ceu angulus ICD continet duas quintas vnius recti. Ac pari ratione angulus BCH continet duas quintas vnius recti. Cùm igitur singuli anguli BCH, HCI, ICD sint duæ quintæ vnius recti, simul compositi conficiūt angulum BCD sex quintarum vnius recti hoc est angulum pentagoni. Parique ratione de reliquis ad reliquos vertices D, E, &c. iunctis rectis. Erit ergo pentagonum maius circumscribendum regulare, hoc est æqualium laterum, & angulorum.*

2 *Primæ sectionis in I, vel H maiora segmenta æqualia esse lateribus pentagoni maioris circumscribendi, verbi gratia ipsam HD æqualē esse ipsi CD facilè patet ex antedictis; nam angulus DHC continet quatuor quintas vnius recti, & angulus HCD constat è duobus HCI, ICD, quorum singuli sunt duarum quintarum vnius recti; ergo totus HCD est isosceles, & æqualia sunt latera HD, DC.*

Pariq; ratione de reliquis CG, CB. &c.

3 *Iam verò fieri mutuas sectiones media, & extrema ratione laterum CA, BD, &c. sic demonstro. Duo triangula BDC, CDI æquiangula sunt. nā angulus IDC vtriq; cōmunis est, &, per antedicta, anguli DIC, ICB sunt æquales, nempe anguli pentagonici sex quintarū vnius recti, reliqui vero tertij CBI, ICD singuli sunt duarum tertiarum. Igitur vt BD ad DC, ita DC (idest DH ipsi DC probatum æquale) ad CI (idest ad HB ipsi IC æquale, per citata in antedictis ex Apiar. 3) ac proinde DH est media proportionalis inter duas DB, BH, estq; propterea*



pterea BD secta in H secundum mediam, & extremam proportionem. Ac pariter de BD sectâ in I, de CA sectâ vel in G, vel in H; ac de reliquis.

4 *Rursum segmẽtum maius DH sectum esse in I proportionaliter demonstratur è geminis triangulis DHC, CIH æquiangulis. nam DHC est communis angulus vtrique triangulo CIH, & HDC anguli HCD, CIH singuli sunt quatuor quintarum vnius recti, & reliqui tertij HCI, IDC sunt singuli duarum quintarum vnius recti, per ante probata. Igitur vt DH ad HC (idest ad ID ipsi HC æquale, per citata ex Apiar. 3) ita CH ad HI. ergo segmentum maius DH & ipsum sectum est in I media, & extrema ratione. Ac sunt, per antedicta, & probata, laterum minoris pentagoni productorum, & proportionaliter se mutuo secantium maiora segmenta æqualia lateribus maioris pentagoni circumscribẽdi, maiorum verò segmentorum proportionaliter sectorum minora segmenta sunt latera minoris pentagoni, &c. Quæ omnia erant demonstranda.*

§ 16.

§ XVI.
COROLLARIVM,

In quo sacra è pentagonicà cuspidatà figura in antec. § 15, in gratiam Chinensium Philosophorum.



HAbēt religiosi nostrates Doctores apud Sinas ab antec. § 15 locū ingerēdę pię memorię quinque vulnerum Christi Domini, iuxta pentagoni cuspidati applicationem apud aliquos, quam vides in appositâ figurâ. In qua explicent humanæ redemptionis mysterium, & pretium. Quis enim damnet in Religioso elementorum Geometricorum ornatore, atq; applicatore non solum apud Chinenses, & exteræ religionis quoscumque alios populos, sed etiam apud Christianos nostrarum regionum lectores, vel auditores eleuari pentagonam cuspidatam figuram ad pia, religiosa, & salutaria? De qua figura in antec. § demonstratum est totam esse in ea laterum sectione, quam aliqui diuinam sectionem appellarunt. Ac verè diuina sic erit apud nos consecrata.

Quinimmo ad eruditionem sacram nec dissimulandum censeo nummos aliquos argēteos extare apud antiquarios; quos excudi iussit olim Syriæ Rex Antiochus cognomento Soter, in quibus Pentagonum id cuspidatum est cum interpositis quinq; literis græcis ΥΓΕΙΑ, *salutem significantibus;*

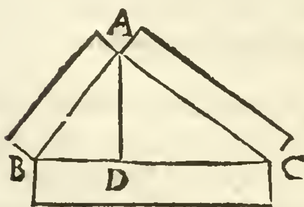
Inspice



Inspice schema secūdum hic appositum. Monumentum id est insignis victoriæ ab Antiocho de Galatis reportatæ cùm, in somnis admonitus, eam cum literis figuram vexillis militaribus imposuisset. Quin & Byzantij phalanx imperatoria Pentagonum idem cuspidatum scutis impreßum gerebat, ac nobiles illi milites appellabantur: Propugnatores: *quorum scilicet operâ, & bellicâ virtute salus exercitui cōparabatur. Dixeris, amice Lector, aptißimum prædictis ineße symbolum Religiosæ Cohortis, quæ Christi Iesu, seu Seruatoris, augustißimo nomine decoratur, & quæ Christianæ Religionis vbiq; gentium, etiam cum sanguinis effusione propagatricem, & propugnatricem se profitetur.*

Propos. XXXI. Theor. XXI.

In triangulis rectangulis figura, quæ fit à latere rectum subtēdente, æqualis est figuris, quæ fiunt à lateribus rectum continentibus, similibus; similiterque descriptis.



SIt triangulum rectangulū ABC rectum habens angulum BAC. Dico, id quod fit ex BC æquale esse illis quæ fiunt ex BA, AC similibus, simillterque descriptis. Ducatur perpendicularis AD, [a] erūtque

a *propos.* 86.

que triangula ABD, ADC à perpendiculari facta, & toti ABC, & inter se similia. Cumque ABC, ABD similia sint, erit vt CB ad BA, ita AB ad BD,[b] quando autem tres sunt proportionales, est vt prima ad tertiam, ita quæ à prima describitur figura ad figuram similem à secunda descriptam. Vt ergo CB ad BD, ita est figura ex CB ad figuram ex BA similem, similiterque descriptam: Eadem de causa erit vt BC ad CD, ita figura ex BC ad figuram ex CA. Ergo vt BC ad BD, DC, ita figura ex BC descripta, ad figuras ex BA, AC descriptas similes, similiterque positas: æqualis est autem BC ipsis BD, DC; ergo & figura ex BC æqualis erit figuris ex BA, AC similibus, similiterq; descriptis. In rectangulis ergo triangulis, &c. Quod oportuit &c.

b cor. 2 prop. 20. 6.

Aliter. [c] Cum similes figuræ in dupla proportione sint homologorum laterum, habebit figura ex BC ad figuram ex BA duplam proportionem eius, quam habet latus BC ad BA. Habet verò & quod ex BC quadratum ad quadratum ex BA duplam proportionem eius, quam habet BC ad BA. [d] Vt ergo est figura ex BC ad figuram ex BA, ita est quadratum ex BC ad quadratum ex AB. Eadem de causa est vt figura ex BC ad figuram ex CA, ita quadratum ex BC ad quadratum ex CA. Est ergo vt figura ex BC ad figuras ex BA, AC, ita quadratum ex BC ad quadrata ex BA, AC. Sed [e] quadratum ex BC est æquale quadratis ex BA, AC; est ergo & figura ex BC æqualis figuris ex BA, AC, similibus, similiterque descriptis. Quod oportuit demonstrare.

c propos. 20. 6.

d propos. 11. 5.

e propos. 47. 1.

§ I.

SCHOLION I.

Campus geometricus, & vniuersalis ex vsu propos. 31 pro auctionibus, imminutionibus,

diuisionibus, &c. quarumcunq; planarum rectilinearum figurarum, seruatâ semper eiusdem speciei figurâ in totis, partibus, residuis, compositis. &c.

Varios alios modos augendi, diuidendi, minuendi, &c. figuras habes à nobis in 1, & hoc 2 tomo, ac præterea speciatim circa quadrata (ac etiam circulos) è 47 lib. 1. Hic vniuersè ex hac 31 de quibuscunq; figuris rectilineis planis similibus augendis, diminuendis, diuidendis vniuersaliter secundum quamcunq; lubitam, ac datam proportionem, ac seruatâ semper similitudine datæ figuræ in totis, ac partibus, aliqua in aliquibus exemplis exhibebimus instar plurium, quæ ab hac fœcundissima, & vniuersalissima 31 deduci possunt. Nos & breuissimè, & facillimè demonstrabimus sine argumentationibus ex lib. 5, permutando, componendo, diuidendo, &c. quibus aliqui vtuntur, seu potius abutuntur, dum non necessarijs ambagibus Tyronum ingenia implicant. Summa laus in Geometrica philosophia est non ostentationis, sed facilitatis doctrinæ, vt appareat non opinionem scientiæ apud alios captari, sed vtilitatem publicam legentium. Estq; ingenij perspicacioris quæ intelligit facilè exponere potius, quàm indicare aut implicare sub prolixis, & obscuris inuolucris quasi ænigmata, quibus Oedipo sit opus. Igitur ad rem propositam.

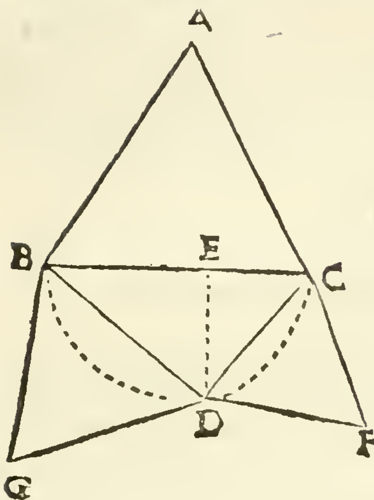
Laus facilitatis captāda potius, quam opinionis doctrinæ

§. II.

PROBLEMA I.

Ex dato rectilineo imperatam partem in lubita proportione auferre ita, vt in ablato, & residuo seruetur eadē figura dati rectilinei.

Sit quæcunq; rectilinea figura, facilitatis gratia pro Tyronibus, æquilaterum triangulum ABC, à quo tertia pars auferenda sit ita,



ita, vt ablatum, & residuum sint triangula æquilatera. Super vno latere BC describatur semicirculus BDC. Deinde, acceptà tertià parte rectæ BC in E, ex E educatur perpendicularis ad semicirculi arcum in D. Iuncta CD erit latus trianguli æquilateri, quod est tertia pars dati ABC; & iuncta BD erit latus triãguli æquilateri, quod est residuum ex ablatione tertiæ partis ab ipso ABC; suntque tres figuræ eiusdem speciei, ac similitudinis.

Quod ęquilaterum CDF sit tertia pars dati ABC, sic facile, ac breuiter demonstro. BDC est triangulum in semicirculo rectangulum; atq; ab angulo recto D demissa est perpendicularis DE; ergo, per corollar. prop. 8 huius, latus CD est medium proportionale inter BC, EC. Cùm ergo sint tres proportionales BC, CD, CE, erit vt prima BC ad tertiam EC, ita rectilineum ABC descriptum super prima ad rectilineum simile CDF descriptum super CD secundà, per coroll. 2 prop. 20 huius. At CE secta est tertia pars ipsius BC, ergo & CDF æquilaterum est tertia pars æquilateri ABC.

Quod verò æquilaterum BDG sit residuum, siue duæ tertiæ partes ipsius ABC patet ex hac 31. Nam ABC est æquale duobus BDG, CDF, vt ergo CDF est vna tertia, sic BDG est duæ tertiæ ipsius ABC.

Itaq; à dato rectilineo ABC detracta est pars imperata in proportione subtripla ita, vt & ablata tertia pars CDF, & residuum duarũ tertiarum BDG sint similis figuræ, nempe æquilateræ, cũ dato Æquilatero, &c.

§ III.

COROLLARIVM, seu Problema II.

Dato rectilineo duo æqualia construere lubitæ proportionis, & similia inter se, & ipsi dato.

Habes id præstitum in antecedenti problemate. In quo finge postulari vt dato æquilatero ABC construantur duo æquilatera, quorum alterum alterius sit duplum. Vtere antecedenti constructione, & demonstratione, & solutum erit problema.

§ IV.

COROLLARIVM, seu Problema III.

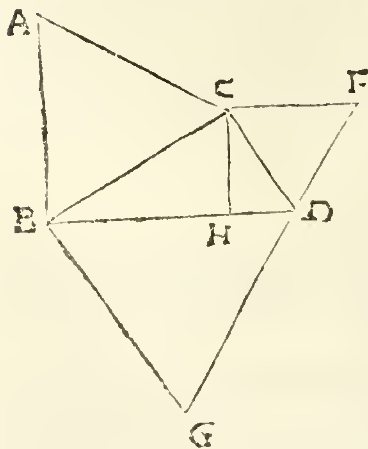
Datum rectilineum diuidere in duo similia dato, & inter se in lubita proportione.

Fit, & demonstratur, vt antec. problem. 1, & 2. Vide, & vtere ad facilitatem praxis porismate hic inferius, § 7.

§. V.

PROBLEMA IV.

Datum rectilineum augere in lubita proportione, seruatà eiusdem figuræ similitudine.



Datum Aequilaterum triangulum ABC sit augendum tertia sui parte, ita vt etiam auctum sit æquilaterum. Per problema 1 antecedens inuentà dati ABC tertià parte, quæ sit æquilaterum CDF, iungantur duo eorum latera BC, DC in angulum rectum C, & iunctà basi BD, atq; excitato æquilatero BGD, erit id auctum tertia parte, nẽpe addito CDF ipsi ABC, quibus duobus ipsum BDG est æquale, per hanc 31.

§ 6.

§. VI.

COROLLARIVM, seu Problema V.

Duobus datis similibus rectilineis tertiũ æquale, ac simile describere.

DVm enim auctum ex ABC additione ipsius CDF, & factum est BGD, nihil aliud factum est, quàm duobus datis ABC, CDF similibus constitutum simile, & æquale ipsum BGD. &c. Datorum igitur rectilineorum iunge bina latera homologa in angulum rectum, & excita simile super basi subtensa angulo recto, &c. & solutum erit problema.

§. VII.

PORISMA.

Datis duobus rectilineis similibus, inuenire facillime quam inter se proportionem habeãt, etiam sine cognitione duplicatæ proportionis laterum homologorum iuxta 20 huius.

DAtorum æquilaterorum ABC, CDF latera CB, CD iungantur in angulum rectum C, & iunctâ BD, ab angulo recto C demittatur perpendicularis CH. Dico rectilinea ABC, CDF habere inter se proportionem, quam habent inter se duo basis segmenta BH, HD. Quoniam enim, per hanc 31, ABC, CDF sunt partes conficientes totum BGD, & per problem. 1 ex antecedentibus, vt se habet BD ad DH, ita BGD ad DCF, idest compositum ex duobus ABC, CDF ad partem CDF; ergo diuidendo, per 17 quinti, vt se habet pars BH ad partem HD, sic ABC ad CDF. Quam vero proportionem habeant inter sese duæ rectæ BH, HD statim cognosces è cir-

circino proportionum, iuxta ea, quæ ad antecedentes huius libri 6 propositiones non semel, atque etiam in Tomo primo huius Ærarij docuimus ad propos. 10, § 3.

Finge igitur HD esse vnã quartam totius BD, habebit ergo ABC ad CDF proportionem triplam. Quod fuit inuestigandum, & inueniendum, sine alia cognitione proportionis duplicatæ (quæ aliquando Tyrones implicat) laterũ homologorum BC, CD in similibus rectilineis ABC, CDF, iux. 20 hu.

§ VIII.

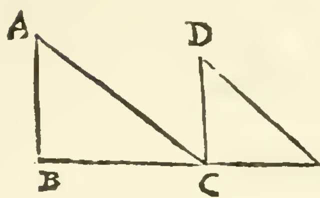
SCHOLION II.

HActenus sat esto pauculis antecedentibus exemplis indicasse vsum amplissimũ huius 31 propositionis in Geometricis problematibus soluendis non è vulgatis alijs modis ab alijs propositionibus. Plura addat Tyronum industria, quam ad vlteriora nostris hisce Geometricis vestigijs prouocauimus.

Est verò mirifica hæc 31 propositio ab Euclide vniuersalissima tantæ apud nos dignitatis, vt illi nos iniuriam facturos arbitremur, si post eam vllam aliam in hac 2 parte Tomi secundi huiusce illustremus, & vsibus vllis applicemus. Itaq; pro sua dignitate claudat agmen antecedentium nostrarum applicationum hactenus in hoc secundo tomo à nobis expositarum. Expositarum, inquam, quia præcipuas tantum aliquas alias breuioribus notis indicabimus ad aliquas propositiones reliquorum Elementorum geometricorum in tertio huius Ærarij Tomo, iuxta ea, & ob eas causas, quas in præfationibus huius 2 Tomi, ac 3 sequ. attulimus.

Propoſ. XXXII. Theor. XXII.

Si duo triangula, duo latera duobus lateribus proportionalia habentia, ad vnum angulũ componantur, ita vt latera homologa ſint parallela, reliqua latera in directum erunt conſtituta.



SInt triangula ABC, DCE habentia duo latera BA, AC, duobus DC, DE proportionalia. Vt AB ad AC, ita DC ad DE, ſintq; tam AB, DC, quam AC, DE parallela. Dico CE ipſi BC in directum eſſe. Cum enim in AB, DC parallelas recta AC incidat, [a] erunt anguli alterni BAC, ACD æquales. Eàdem de cauſa & CDE, ACD æquales erunt: vnde & BAC, CDE æquales ſunt. Cum igitur duo triangula ABC, DCE vnum angulum, qui eſt ad A, vni, qui eſt ad D, æqualem habeant, & circa æquales angulos latera proportionalia, vt [b] BA ad AC, ita CD ad DE, æquiangula erunt: anguli igitur ABC, DCE æquales ſunt. Oſtenſi autem ſunt & ACD, BAC æquales; totus ergo ACE duobus ABC, BAC eſt æqualis; cõmunis ACB addatur, & erunt ACE, ACB æquales his, BAC, ACB, CBA: ſed hi tres duobus rectis ſunt æquales: ergo & ACE, ACB duobus rectis æquales erunt. Ad punctũ ergo C rectæ AC duę rectæ BC, CE, non ad eaſdem partes poſitæ, angulos deinceps ACE, ACB duobus rectis æquales faciunt; in [d] directum ergo eſt BC, ipſi CE. Si ergo duo triangula, &c. Quod oportuit demonſtrare.

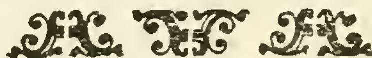
a propoſ. 29. 1.
b propoſ. 6. 6.
c propoſ. 32. 1.
d propoſ. 14. 1.

SCHO-

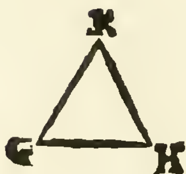
SCHOLION.

PRopositionem 33 hu.lib 6 habes apud nos in loco pro nostra methodo opportuniore, ad propos. 27 lib. 3.

Nonam vero, & decimam è lib. 13 ab interprete Lantzio additas in fine huius li. 6 nos ex traditione Maurolyci apposuimus probandis nostris commentationibus partim ad propos. 30 hu. partim ad 15 li. 4, vt vidisti in antecedentibus, & videbis in sequentibus in 3 To. hu. Aerar.



AMICE LECTOR,



TRiangulum appositum reponendum est ad figuras propos. 25, lib. 6 Elem. in hoc 2 To. Quod ibi est excedit veram, & requisitam in propositione quantitatem. Quod hìc est omissum est per errorem. Hæc, vt nihil à nobis diligentiæ requiras. Præterea —

— Pro citata aliquando tertia parte hu. 2 To. intellige tertium Tomum post sequentem Epinomen.



EPI-

EPINOMIS
POST PARTEM II
TOMI II
Ærarij Philoſophiæ Mathematicæ,

IN QVA

Gnomonicæ, & Machinariæ Philoſophiæ

EXODIA ſunt horaria,

SANDALIVM,

CITHARA,

MICROCOSMVS,

ARCVS,

TYMPANVM.

In gratiam Chinenſium Philoſophorum.



AMICO LECTORI
Rationes huius Epinomis, & Exodiorum.

CVm primum Geometricus Doctor præsertim è noſtra Societate apud Sinas (pro quibus noſtra hæc allaborata non ſemel edíximus) Auditoribus ſuis expoſuerit vel omnia, vel pro libito pleraq; ſaltem è præcipuis, quæ à nobis applicata ſunt propoſitionibus primi, & (iuxta noſtram methodum) ſecundo loco ſexti librorum elementariorum, expediet (experientia me ſic edocuit) à Geometricis Tyrones breui ſaltem aliquo tempore attollere ad ſublimiora, ſi nō certiora, mixtarum aliquarum ſcientiarum Mathematicarum, quarum vſus crebriores eſſe ſolent reliquis in ſcientijs, ac artibus, velut ad Aſtronomica, Geographica, Machinaria, Optica, & ſi quæ alia ſunt geometricè circa phyſicas materias philoſophantia.

Commodum accidit, vt in antecedentibus vtroque Tomo Ærarij varias propoſitiones expoſuerimus, quæ faciunt pro Aſtronomicis, Geographicis, Opticis, Machinarijs, & varias docuerimus linearum rectarum, & circularium diuiſiones, quæ vſui erunt in ſequentium Exodiorum figuris, & organicis operationibus. Igitur noſtræ Methodi hæc prima

ſit

ſit periodus,& ſtatio circa aliquid è ſphæra cęleſti, ac terrenâ exponendum. Tum, quaſi praxes Aſtronomicarum theoriarũ, apponantur Tyronibus quinq; ſequentia in hac Epinomi horaria Machinamenta. Quæ licet Chinenſibus proponamus, noſtris tamen Europæis erunt fortaſſe non inutiliâ.

Ac merito hiſce Horarijs Exodia nomen fecimus, quaſi ἔξω τῆς ὁδοῦ, quia quædam ſunt extra viam, & methodum quaſi diuerticula leuandis Tyronum animis aliqua varietate, ac nouitate, vt reliquum itineris geometrici ſtrenuè magis perſequantur. Ideo & Exodiorum Epinomen appellamus, nempe ſtrenam (quæ Græcis ἐπινομὶς) feſtum munuſculum animis philoſophicè, quaſi dicam, ſtrenuandis.

Exodia etiam ſunt iuxta morem antiquorum dramatum, quorum aliquando prolixitatem interpoſitis iucunditatibus hilarabant, ne tædium Auditores inciderent. Sed illi ficta ludicris interpolabant; nos hìc in veris, ac feriò demonſtratis feriamur.

Atq; hæc paucula Prologi loco. Quinque quaſi Actus quinarum horariarũ inuentionum mox conſequentur. Sub furis perſonâ in primo Exodio primus prodit Gnomonicus Genius. *Faueto Lingua*, mi Lector. Et caue de grege ſis eorum, qui de alienis malè loquentes peius ipſi audiunt. Vale.

SAN-

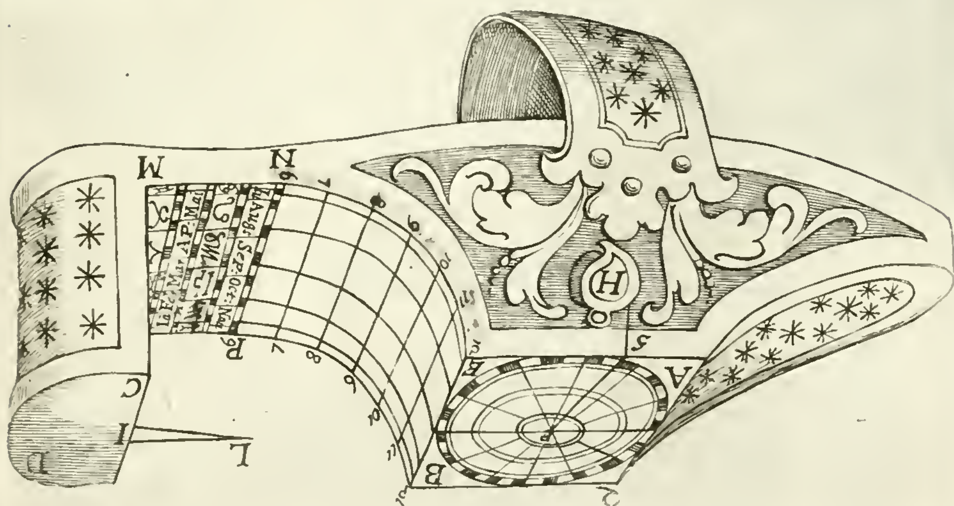
SANDALIVM.

Exodium horarium I.

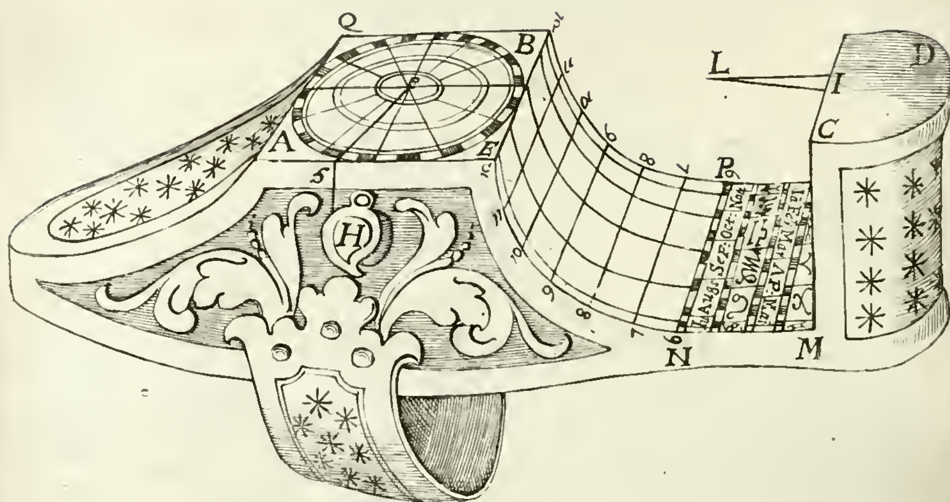
PROPOSITIO I.

Gnomonicæ Philoſophiæ Sandalium expoſitum.

NOMONICVS Genius Philoſophiæ Gnomonicę inacceſſa adyta clam nuper ingreſſus, ex eius mundo muliebri Sandalium ſurripuit, ac ſtatim ad me attulit. Erat id eius formæ, quam hic vides, Amice Lector, vel rectam, & erectam; *Gnomonici Genij furtũ ſcientificum.*



vel, si malis, hic supinam.



Sandalij Gnemonici descriptio.

Plana ABCD terram calcantia, erant argentea. Cætera omnia in Sandalio aurea, gemmea, mirifico opere, ac blandiente oculis colore variegata. Ne circa parerga distinear, venio ad Gnomonica in Gnomonico Sandalio.

In plano AB incisus circulus AEB diuisus erat in quater 90 gradus, & in 90 singuli quadrantes circuli. Ex centro F pendebat cum filo perpendiculum FGH, quod refigebatur, cum lubitum erat, ex F, & sub lamella H claudebatur.

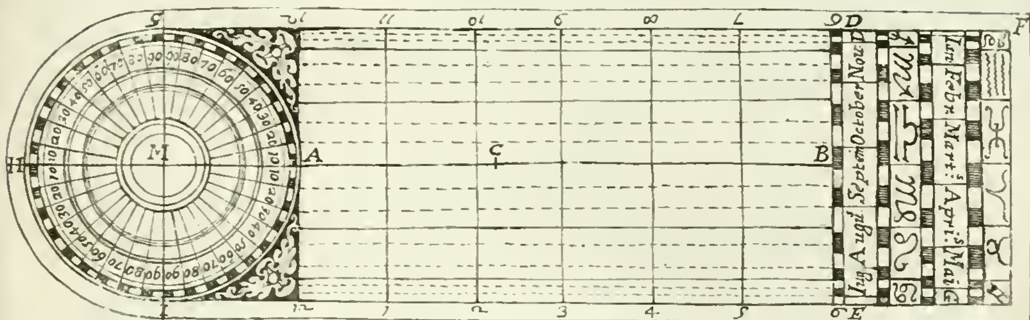
In plano CD longitudo styli IL erat æqualis distantiæ planæ, siuè lineæ rectæ MN. Animaduerti curuaturam NE esse quadrantem vnius circuli, cuius centrum in L. Horarum 7, 8, &c. lineæ rectæ, signorum verò Zodiaci erant curuatæ, quæ inter BE, PN. Denique comperi quadrantem cilindricè cauum EP esse horarium compendiosissimum, ac vniuersale referens quartam partem Zonæ cælestis, cuius latitudo vtroque Tropico terminatur. Sandalij ego conceptam constructionem breuissimam, facillimam, ac scientificam mox docebo, deinde vsum.

Pro-

PROPOSITIO II.

Sandalium Gnomonicum, hoc est Horarium uniuersale Zonæ cælestis torridæ facillimè construere.

QVoniam horaria sortiuntur appellationem à circulis cælestibus, quibus sunt parallela, hoc autem parallelum est Zonæ cælesti, quæ torridæ in terris correspondet, ideò libuit appellare Horarium Zonæ cælestis torridæ.



1 In ductâ AB indefinitâ pro amplitudine Horarij describendi sumantur sex spatia æqualia, per quorum terminos, ac puncta ducantur occultæ, ac indefinitæ septem lineæ. Deinde ipsius AB, quasi quartæ partis peripheriæ circularis, accipiatur diameter, sic ratiocinando. Si (ex Archimedis calculo) peripheria 22 dat diametrum 7, peripheria 24, nempe quadruplicata AB, quid dabit? Ex vsu Regulæ aureę prodibit quartus numerus 7 $\frac{7}{11}$, minutijs ad latiores reductis. Ad praxin faciliorem, erit quæsita diameter interuallum septem horarum in ipsa AB vna cum quinq; octauis vnius horæ, paullo insensibiliter plus. Accepti ergo spatij, siue lineæ ductæ horarum 7, & $\frac{5}{8}$ vnius horæ, dimidia pars est quæsita semidiameter, ad cuius inter-

Pro plano in curuando circulariter inquadrātē ratio inueniēdæ semidiametri.

uallum ducti circuli quarta pars erit curuatura pro cilindricè incauato quadrante, ad quem aptanda, & incuruanda erit AB.

Signorũ Zodiaci per lineas horarias ducẽdorum modus.

2 Eadem semidiameter terminabit, ac signabit parallelas horarias lineas terminis signorum Zodiaci sic. Diducto circino ad interuallum prædictæ semidiametri (quod interuallum finge esse CB) centro C duc arcum circuli tangentis in B, & ope circini proportionum, iuxtà ea, quæ docuimus ad 9, & 10 propositiones vtriusque tomi Aerarij, vel alia arte, accipe vtrinq; à B ad D, E maximas Trapicorũ, & aliorũ signorum minores declinationes, iuxtà tabellam, quam apud nos habes in Apiar. 9. cap. 6; & aptatà regulà ad C, & ad terminos, siue gradus declinationum in arcu ducto per B, vide vbi èadem regula signet lineam horæ inter D, E. Ea hora sic signata dabit & reliquas signatas, si nimirum sectiones in hora 6 transferantur in horæ 12 lineam, & aptetur regula ad sectiones signorum in vtraque extrema linea, siue hora 12, & 6; regula enim intermedias reliquas horarias lineas signabit, vt vides in apposita figura. Ac de more distingues per gradus mẽses, & signa, vt habes in spatio EF.

3 Terminatas verò Tropicis parallelas lineas horarum notabis vtrinque numeris, vt vides in figurà, in qua 12 horas senarijs oppositis progredientes habes ante, & post meridianam, &c. Cætera huc spectantia vide inferius in prop. 4, vbi de vsibus.

Ex altera parte circulum AGHI, atque in illo illi concentricos diuides in quattuor quadrãtes diuisos in gradus 90, vt ex centro M perpendiculum suspendas pro varijs Poli eleuationibus. Denique incurtuabis, & aptabis Zonam horariam (cuius longitudo AB) quadranti cilindricè curuato, & habenti pro semidiametro styli longitudinem, iuxtà quantitatem inuentam in num. 1 huius propositionis. Qui stylus erigatur vel ex B medià linea horæ 6, vel aliunde, modo eius vertex sit in centro quadrantis ex circulariter curuatà AB. Ceu vides apta, & aptata omnia in Sandalio Gnomonico propositionis 1 antecedentis.

Styli longitudo, & locatio.

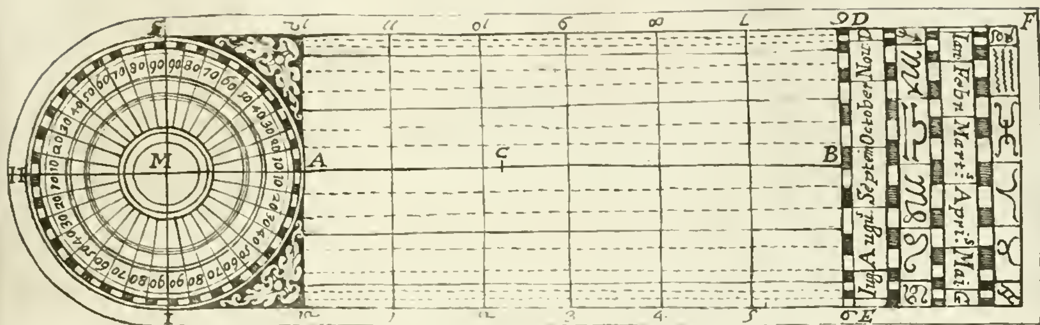
Animaduersio pro constructione fabrili, & physicà Sãdalij.

Animaduertendum verò est pro praxi, & pro apta forma Sandalij, (ne difformiter gracile formetur) non esse necesse curuaturam inter BN esse illius solummodo latitudinis, quæ vtroq; Tropico clauditur, sed dilatandam esse vltra terminos horarum vtrinq; ita, vt vacet spatium extra notas horarias. Dummodo enim, in fig prop. 1, intrà cauum BN sit descriptum horarium, nihil refert si citrà EN, & vltrà BP vacent spatia.

Scho-

SCHOLION,

In quo hallucinatio Tyronibus patefacta.



QVid multis? inquit Tyro, accipe ſpatium 4 horarum, & habes ſemidiametrum, hoc eſt ſextam partem circuli, cuius quadrans fit ex curuata circulariter AB. At fallacia eſt, quia ſemidiameter ſubtenditur quidem arcui quattuor horarum, ſed minor eſt arcu quattuor horarum in planum proiecto. Propterea CB minor eſt ſpatio quattuor horarum inter 2, & 6 horas in linea recta AB. &c.

Cautio in accipienda ſemidiametro pro quadrante in Sandalio.

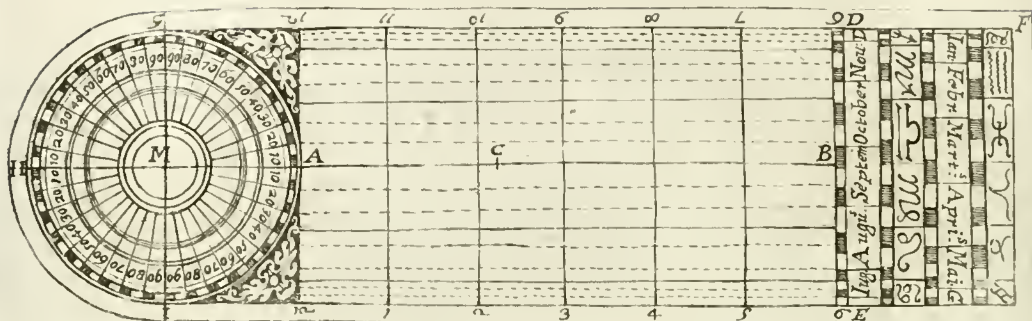
PROPOSITIO III.

Theoria praxeωn antecedentium.

Proiectura optica Zodiaci in planã, & in cilindricã concauam ſuperficiẽ.

1 QVarta pars plagæ cæleſtis (in qua ſunt circuli & Æquinoctialis, & horarum Aſtronimicarum, & paralleli ſignorum Zodiaci vſque ad vtrumque Tropicum) quæ ſphæricè curua eſt, hic proiecta eſt in planam cilindrice curuatam, dum circulorum horariorum curuitates in rectas lineas abiectæ ſunt. Quoniam autem declinationes ſignorum ſunt arcus

cus Colurorum, Coluri autem, & Aequinoctialis, & horarij circuli sunt maximi circuli in sphæra pro communi centro habentes terræ



globum, ideò eadem à nobis semidiameter CB accepta est & pro styli longitudine (idest pro distantia terræ à circulis horarijs) & pro quadrante lineæ Aequinoctialis AB circulariter incuruandæ, & pro arcu Coluri signantis solstitia D, E, & reliqua Zodiaci signa in planum proiecta.

Theorice circuli pro eleuationibus poli.

2 Circulus verò AGHI est instar meridiani, & pro axe Mundi est diameter GI, & pro vtroq; Polo (siue pro pro Arctico) est vtrumlibet extremorum G, & I, cuius Poli pro varia regionum obliquitate eleuatio proditur a quantitate arcus secti a perpendiculo, &c. vt horarium sit vniuersale.

Denique puta horarium vniuersale à nobis positum in 1 Progymnasmate Apiarij 9, idem esse cum hoc, nisi quod hoc cilindricè, seu circulariter incuruatum est, illud verò & proiecturas inæquales, & vsum in plano habet. Vise illuc, & confer cum hoc.

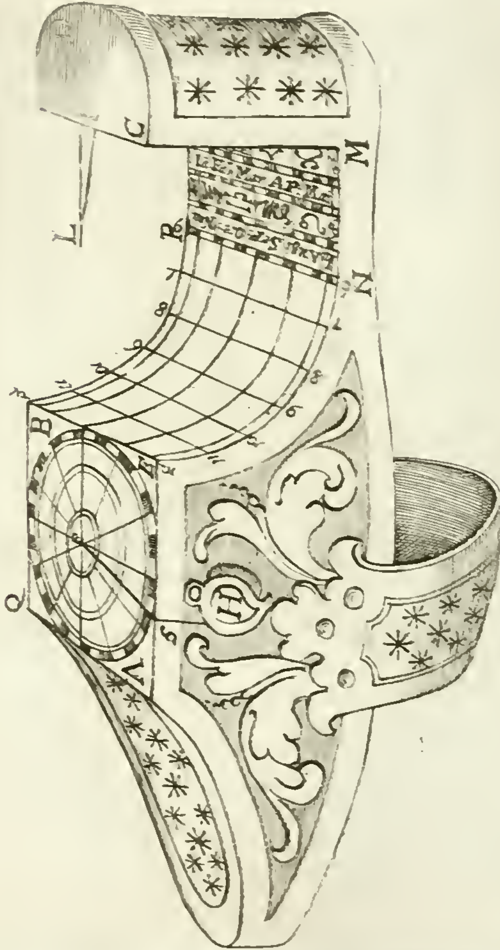
PROPOSITIO IV.

Vsus Sandalij gnomonici pro horis ad quamlibet poli eleuationem cognoscendis.

IV.ii-

1 VNiuersè loquendo obuerte Soli, atque oppone cauum cilindricum quadrantem horarium EP. Speciatim verò, ac pro horis ante meridiem Sandalium aſtronomicè vt collocetur, illud erige, & Soli concauum oppone vt hic

Pro horis agnoſcendis ante meridiē ſub ſole Auſtrali.



vides, radiāte Sole tibi ad ſiniſtram; circulum vero AB ita obliquato, vt perpendiculum & radat circuli planum, & ſignet gradum eleuationis polaris. Simulq; vmbra è vertice L ſignet Solis parallelū (vel diem menſis) inter lineas horarias. Ibi enim erit hora, vel horæ pars

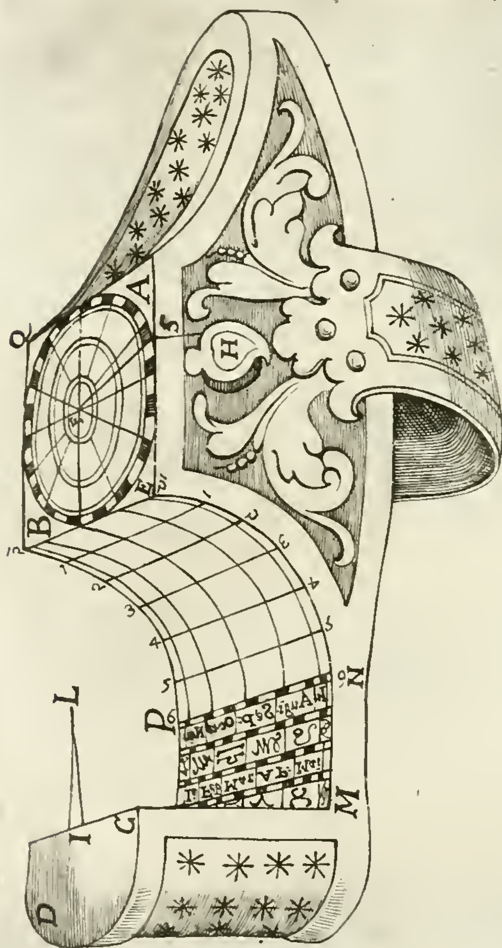
quæ-

quæſita. Numerabisque a P ad B deſcendendo 6, 7, 8, &c.

Quoniam vero breuitatis gratia poſitus erat vnicus ordo Signorum congruens cum curſu Solis (in Sādalio Gnomonicæ, quæ ſorori Aſtronomię in omnibus congruit) intelliges, ac efficies vmbram cadentem in ſignum oppoſitum ſigno, in quo Sol verſatur. Verbi gratia, Sole verſante in ſignis Auſtralibus, puta in ♒ gr. 10, fac vmbra cadat in 10 ♌. &c.

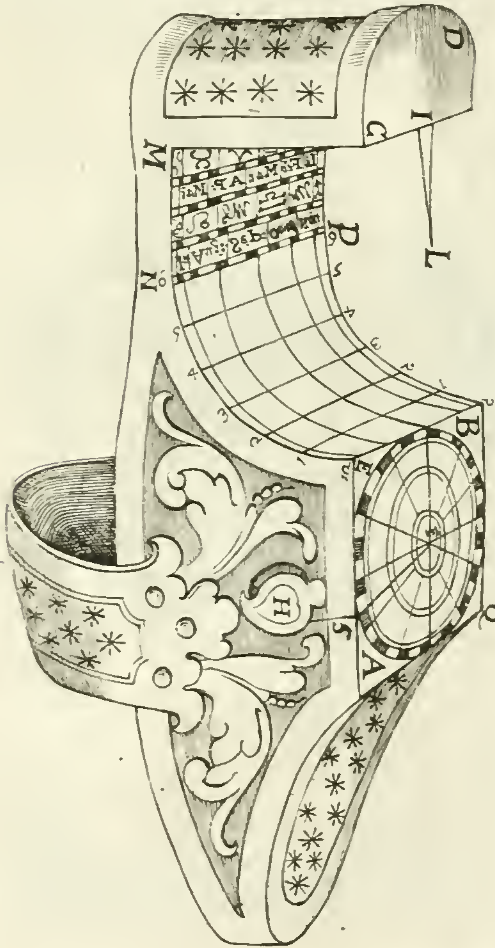
Ante meridiē ſub ſole etiā Boreali.

2 Sole vero verſante in Signis Borealibus, quo tēpore oritur ante ſextam a media nocte, vt habeas quotlibet horas ante ſextam, inuerte



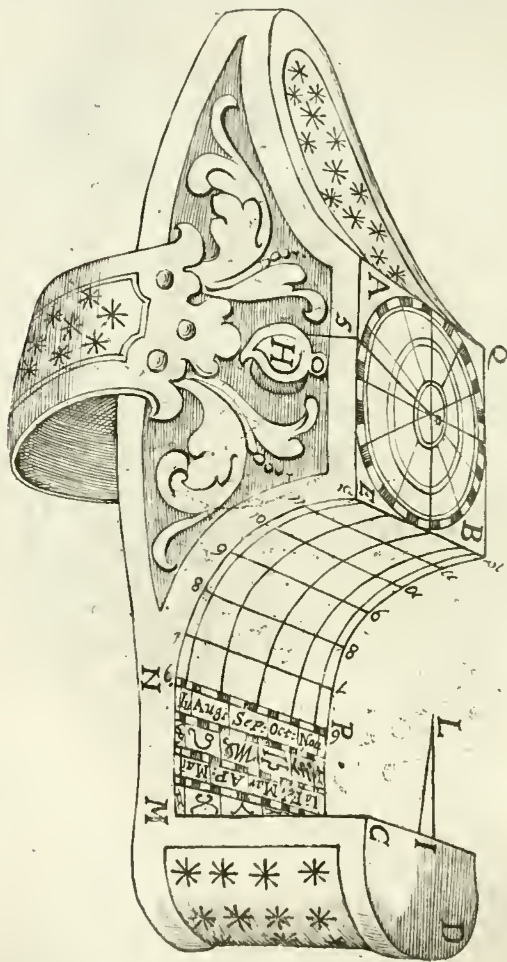
Sandalium, vt hic vides ad finiſtram, perpendiculo radente gradum eleuationis Polaris in ſemicirculo EB; ac Solis radius proijciat vmbrã è ſtylo in ſignum oppoſitum (vt prædictum, & cautum eſt in fine numeri 1 antecedentis) atque indicabit horam deſcendendo à B verſus P, ac numerando 1, 2, 3, &c.

3 Pro horis poſt meridiem verte Sandalium, vt hic vides in 3 ſitu Sandalij, radiante tibi Sole pariter ad ſiniſtram atq; in oppoſitũ ſignũ. &c. Vmbra ab E aſcendet verſus N; & numerabis horas 12, 1, 2, &c. *Poſt meridiẽ ſub Sole Auſtrali.*



Post meridiē sub sole etiā Boreali.

4 Quo tempore Sol occidit post sextam à meridiè, vt quotlibet horas habeas pro regionis, & temporis exigentia, inuerte Sādalium vt hic vides. Sol enim post sextam proijciet vmbram ascendēdo ab N versus E, numerabisq; horas 6, 7, 8, &c. Atque in omnibus hisce Astronomicis collocationibus Sandalij memento perpendiculi signātis eleuationem Poli vel ad partes inter EB, vel ad inter AQ.



Habes, mi Tyro, Gnomonicæ Philoſophiæ Sandalium horarium vniuerſale non indignũ, quo etiam Regina quælibet donetur, certe cui regia cedant Sandalia. Ac vide quãti facienda ſit ea ſcientia, quæ ſub pedibus Cælos, & ſydera geſtat; cuius vel in Sandalio tantum latet Philoſophiæ, atque vſuum Aſtronomicorum pro Ciuili vita, & humanis actionibus per certa tempotum ſpatia ritè ordinandis. *Velè Sãdalio Gnomon. Philoſ. dignitas*



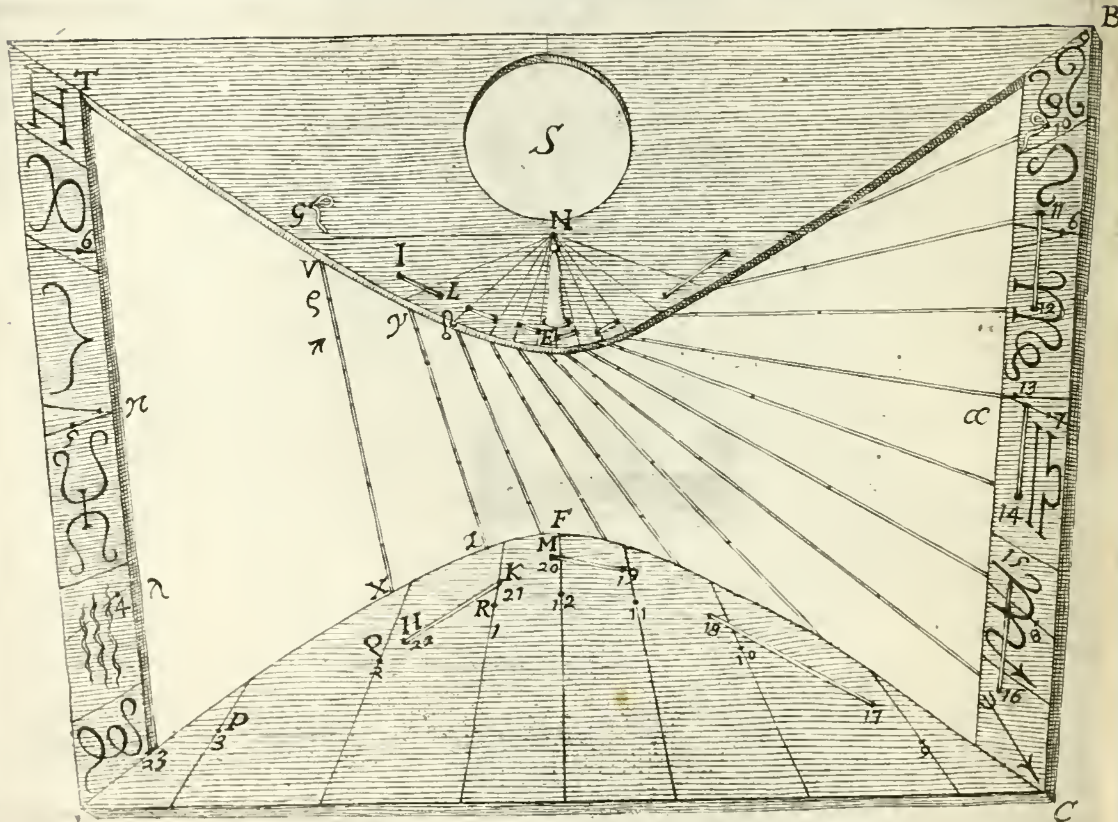
CITHARA.

Exodium horarium II.

PROPOSITIO I.

Citharæ horariæ facillima constructio.

1 IN lamina tenui, ac solida ex oricalco, vel ærea alterius materiæ, quam magnes non sequatur, ABCD describito ad tuæ regio-



nis latitudinem horarium horizontale vnicà circini diductione demonstratà, & vsurpata à nobis in Apiario 9. Prog. 1. cap. 5. & Prog. 4, cap. 1. Tum lineas horarias Astronomicas, & ab horizonte inchoatas terminato sectionibus conicis Tropicorum AEB, DFG, ac signato reliquorum Zodiaci signorum sectiones, iuxtà varios modos in cit. Ap. 9, prog. 4. cap. 3. Post hæc vltrà terminos horarum vtrinque notato puncta in directum tam Italicis horarijs lineis G, H, I, K, L, M vsque ad supremam 10, vel 9; quàm Astronomicis ab eodem centro N ad P, Q, R, &c.

Horarij horizotalis descriptio vnica, & demostrata circini diductione.

2 Mox incide planum horarium secus lineam horæ 23 Italicæ, & secus terminos Tropicos AEB, DFC, & prope latus BC; ceu vides in figura spatium vacuum 123 ad prope latus BC, & inter AEB, DFC. Deinde vbi puncta vltra tropicos notasti planum perforato, ac fidiculam sonoram longiorem traijcito per foramen G, ac inferne sub, & per H, inde ad K, & infernè per I, per L, per M, ac deinceps, vt vides in figura fictum pro lineis horarijs Italicis. Pro Astronomicis verò longe facilior erit consutio, & traductio sonoræ fidiculæ ab eodem centro N per foramina P, Q, R, ac deinceps. Quarum linearum astronomicarum fila per vacuum plani horarij nō traduximus, ne figura implicatior appareat; sed earum tantum initia ab N, & partes citrà tropicum DFC in plano horario per foramina P, Q, R, &c. traductas expressimus. Numeros horarum apponito ad foramina, &, signatis Zodiaci signis in latere vtroque AD, BC, ex ijs notato puncta in lineis horarijs. Quæ omnia vides in apposità figurà. Vbi S foramen maiusculum est, in quod pyxis cum acu magnetica ingerantur. EN stylus.

Fidiculis horarium horizotale consuere Italicū & - -Astronomicū facillimè.

3 Hac peracta constructione, horariam citharam in lineis Italicarum horarum sonoris tibi parasti, in qua Heptachordum est à linea horæ 9 ad 16 crescendo à fidibus breuioribus ad longiores, à Nete ad Paranetem, ad Triten, &c. vsque ad Parhypaten. A linea sonora horæ 16 ad lineam horæ 20 est Pentachordum decrescendo à longioribus ad breuiores. Denique à 23 Tetrachordum est rursus crescendo à breui fidiculà 20 ad longiores 21, 22, 23. Eæ porrò consonantiæ reddentur si ex arte à nobis tradita in Ap. 10, Prog 1, varia crassitie, vel tenuitate, ac intensione, vel remissione fides horarias adtemperaris.

Cur Cithara nomen huic horario. Musica ratio citharæ pro horis italicis, & pro Astronomicis.

Astronomicarum horarum fidiculæ geminatum Heptachordum cōponunt vtrinq; à 12 ad fidiculā horę 6 à meridie, & à media nocte.

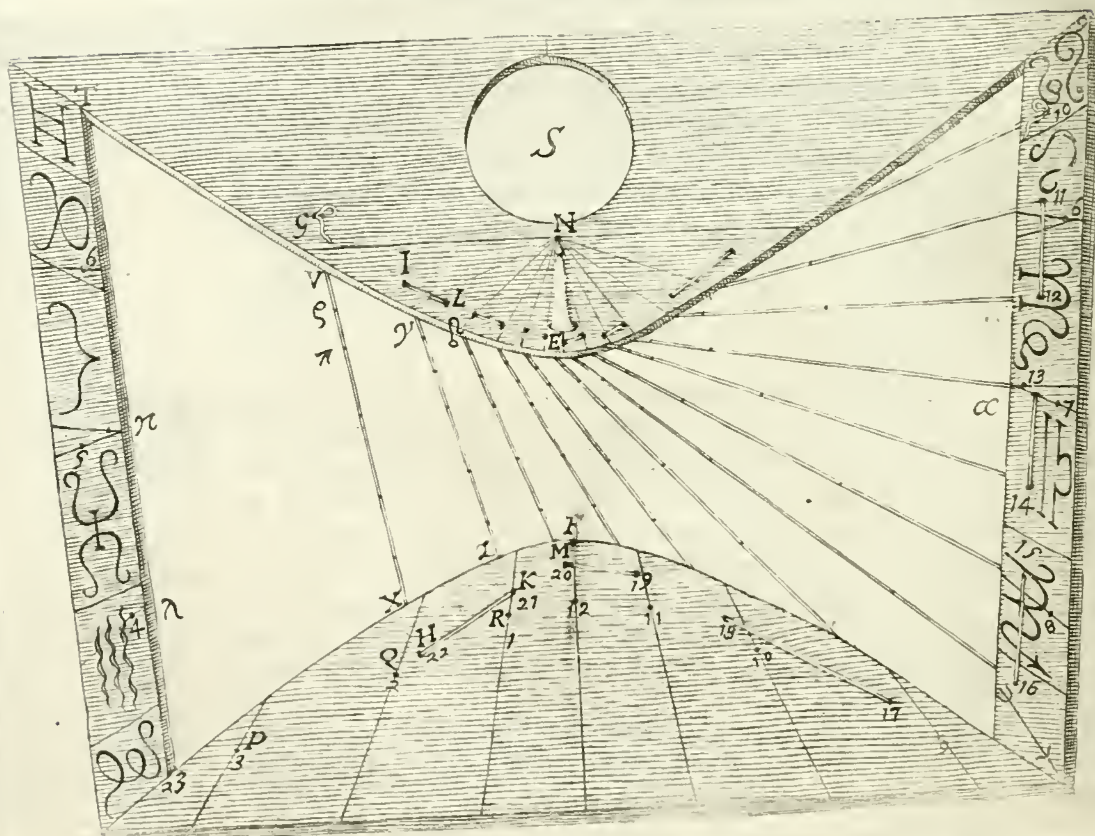
Fidiculæ sint agninæ, non æreæ; docuit enim rei experientia, æreas, dum per foramina plani horarij varie flectuntur disrumpi.

Fidicula cur non sint æreæ.

Pro-

PROPOSITIO II.

Citharæ horariæ vſus pro infinitis numero horizontalibus horarijs momento deſcribendis. Pro horis etiam in aqua labente videndis, & audiendis. Pro horis Babylonicis ex Italicis, & pro Italicis ex Babylonicis agnoſcendis, & deſcribendis. Aſtronomicas non ſignatas unico filo agnoſcere, vel ſignare.



1 NVllo negotio licebit ex horarià constructà citharà quotlibet quolibet momento horaria horizontalia describere. Nam plano ABCD aptato ad subiectam paginam, signabis eam punctis iuxtà extremitates horariarũ fidicularum; pro Italicis ad punctum T, & vbi numerus 23; ad V, X pro 22; ad y z pro 21, ac sic deinceps. Pro astronomicis ad V, & vbi numerus 6 in latere AD; ad γ, & x pro quinta à meridie; ad δ, & λ pro quarta, & sic deinceps. Ad E, F pro meridiana; ad x, α pro Aequinoctiali signentur puncta. Pro reliquis signis Zodiaci intra tropicos signentur puncta iuxtà signa in fidiculis, ceu iuxta ρ, ϖ, & cætera pũcta in singulis horarijs fidibus. Notentur styli locus, & longitudo; ac denique sublato plano ABCD, puncta in vtroque tropico, & latere opposita iungantur rectis lineis, eritque horizontale horarium descriptum etiam ab ignarissimo Astronomiæ, ac Philosophiæ Gnomonicæ. Eàdemque facilitate, ac temporis breuitate quotcunque alia in quotcunq; planis horizonti parallelis describentur.

E cithara momentanea descriptio quotcũque horariorũ horizõtalium Italicorum.

2 In promptu etiam est, vt statim horam quæsitam agnoscas, collocata cithara ABCD astronomicè iuxta directionem vel acus magneticæ in S, vel iuxta congruentiam rectæ imaginariæ EF cum lineà meridianà in plano horizontali ritè ductà, vel iuxta cuspidem vmbræ a stylo EN proiectę ad gradum signi, in quo Sol versatur, quẽ gradum dabit directio imaginaria ad signa Zodiaci in lateribus AD, BC signata.

Horam agnoscere in cithara horaria Italicã.

At verò non ita in promptu est vt etiam cæcus ex horizontali horario possit ab alio vidente, ac non pronuntiante, horam agnoscere. Quid ni? nempe si qui horam vidit, sublatà horarià citharà, pulset fidiculam horæ quæsitæ, reddatque tot tinnitus auribus adstantis cæci, quot hora postulat. Itaque didicisti in horario horizontali horas non solum videre, sed pulsare, & audire.

Etiam cæcus horam discet à cithara horaria

3 Adde paradoxo paradoxum. E lineis, & fidibus horarum ab occasu licet facillimè describere, ac videre horas ab ortu, & è lineis ab ortu describere, & videre horas ab occasu.

Nam si latus AD, quod spectat ad ortum Solis (dum cithara horaria pro inspectione horarum Italicarum astronomicè collocatur) vertas in occasum, & BC in ortum plano ABCD inuerso, ac resupinato, tunc eædem fides, quæ in subiecto plano indicabant, & describebant Italicas, Babylonicas indicabunt, & describent. Ac vice versà, citharàque horaria euersà, è Babylonicis Italicas agnosces, ac describes.

Horas Babylonicas ex Italicis, & versa vice, in plano horizõtali describere.

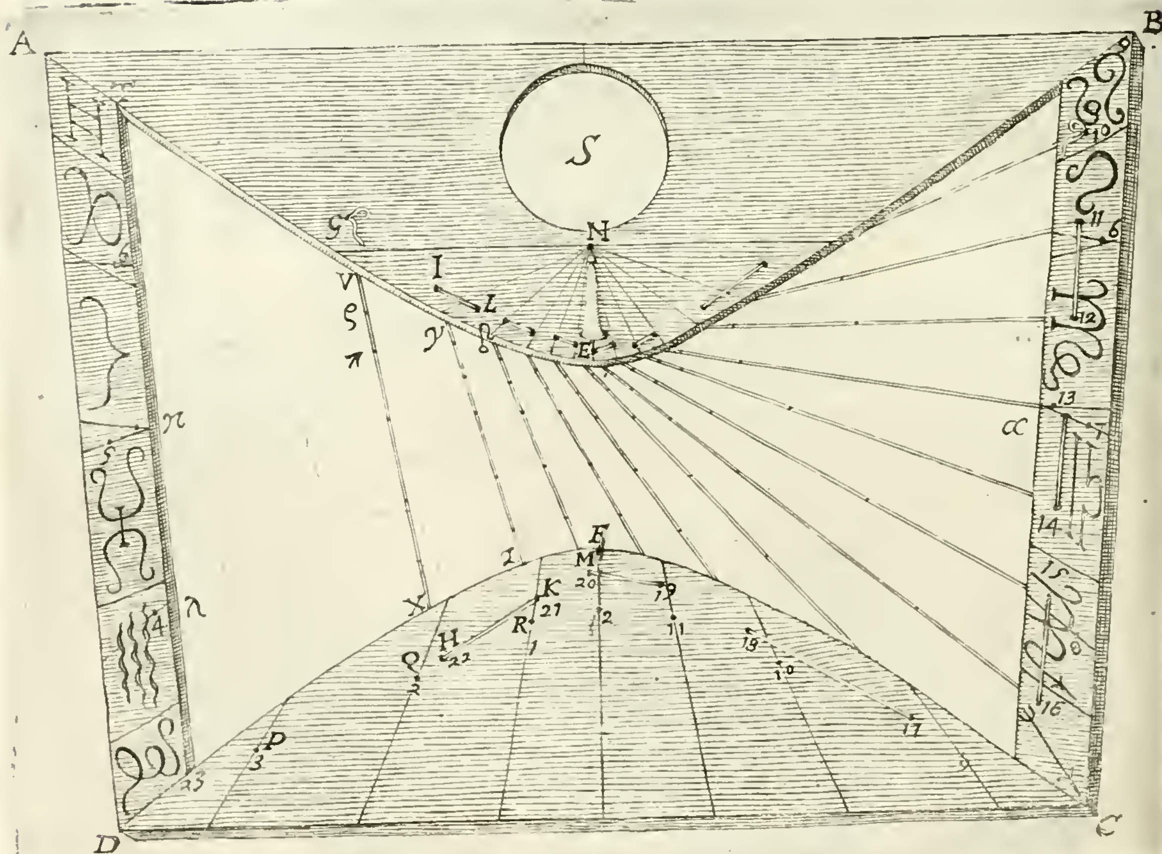
4 Quod verò ad Astronomicas horas attinet, collocatà astronomicè

Horas Astronomicas vnico filo cognoscere, describere vnica fidicula, vel regulâ.

micè citharâ horariâ ABCD, si filum, altero eius extremo in centro N fixo, deducas per latera AD, CB ita, vt contingat verticem vmbræ à stylo proiectæ, ostendet vel horam, vel partem horæ astronomicæ, quam indicat numerus ad foramen Astronomicæ notatus. Exempli gratia, si vmbræ apex cadat in ϖ, filum ex N deductum per π indicabit in latere AB penè 5 à meridie.

Sin autem filum adducas ad astronomicarum foramina, & puncta notaris ad oras vtriusque Tropici AEB, DFC, & notata apposita puncta rectis lineis coniunxeris, construxeris facillimè, & breuissimè operâ quotcunque libuerit horaria horizontalia astronomica.

Quæ tamen pariter omnia etiam fortasse facilius expedies, si regulam aptaris ad centrum N, & ad apicem vmbræ iuxta foramina astronomicarum, vt horam noris, vel ad ipsamet foramina, vt lineas horarias designes. &c.



5 Denique paradoxa præcedentia paradoxo claudam. In quolibet plano horizonti parallelo prædicta horarum tria genera spectare potes, siue solida, siue liquida, siue fixa, siue mobilia sint plana. Nam si superficei aquæ vel in vase, vel in lacu, vel in mari tranquillæ, ac stagnantis, vel etiam è fonte leniter, & æqualiter labentis, apponas astronomicè horizontaliter citharam, videbis cuspidem vmbræ signantem horam tacitè labentem in subiecto plano apertè labente, vt horas habeas ab horaria cithara non solum in terris, sed etiā in aquis, terra, marique gnomonicè instructus.

In planis etiā mobilibus spectare horas.

PROPOSITIO III.

Vsus præcipuus citharæ, siue horarij horizontalis pro facillimâ descriptione horarum Astronomicarum, & Italicarum ex Babylonicis, Babylonicarum ex Italicis in muro quocumque declinante, & in plano quocumque inclinato.

1 VSus in antecedenti 2 propositione à nobis excogitati non sunt præcipui etiam apud nos, sed ille est præcipuus, quem olim indicauimus in Apiar. 9. Progym. 4, cap. 4. Ac licet non nemo tentarit ex horizontali murale horarium describere, factis rimulis circa tropicos, & circa lineā Aequinoctialem, per quas rimulas filum à vertice styli traductum ad extrema horarum signaret in muro puncta extrema linearum horariarum in muro signandarum; tamen (præter alia incommoda, & deficientias) non licet habere partes horariarum linearū in plano horario inscriptas inter extrema, secus quas partes filum traducatur in murum, si quando accidat ob muri declinationem non totam signari posse lineam horæ alicuius. Cui dispendio obuiam iturus ego cogitaram rimulas facere secus singulas integras lineas horarias in plano horizontali. Sed multiplex ea rimarū incisio erat operæ prolixioris.

Imperfectæ aliquorum molitiones in horizontali horario ad muralia.

Itaque censuit Dominus Bartholomæus Proualia vnà mecū præstare vnicà, & breui opera totum spatium ab horis occupatum ab-

Expeditissimus vsus horarij horizontalis, citharizati ad muralia. &c.

scindere secus vtrumque tropicum, & horas ab omni impedimento liberas fidiculis consuere, vt factum iam vidisti in figura antecedentis propositionis,& adhuc hic vides in hoc secundo horario plano AB,in quo ad vsum expressimus non solum Italicas,sed etiam Astronomicas horas fidiculis protensas.

Cur in figurâ murale orientale.

Exemplum autem horarij in murum traducēdi ex horizontali dedimus non in signatione horarij muralis ad Austrum spectantis, quod fuisset facillimum; sed, ad omnem Tyronibus difficultatem eripiendam, selegimus obliquitatem,ac declinationem muri spectantis vtrūlibet horizontem, qualem hic vides CDEF spectantem ad Solem ortiuum, vt hac difficiliore praxi expositâ, nihil supersit Tyroni, vbi hæreat in facilioribus praxibus circa muros minus declinantes.

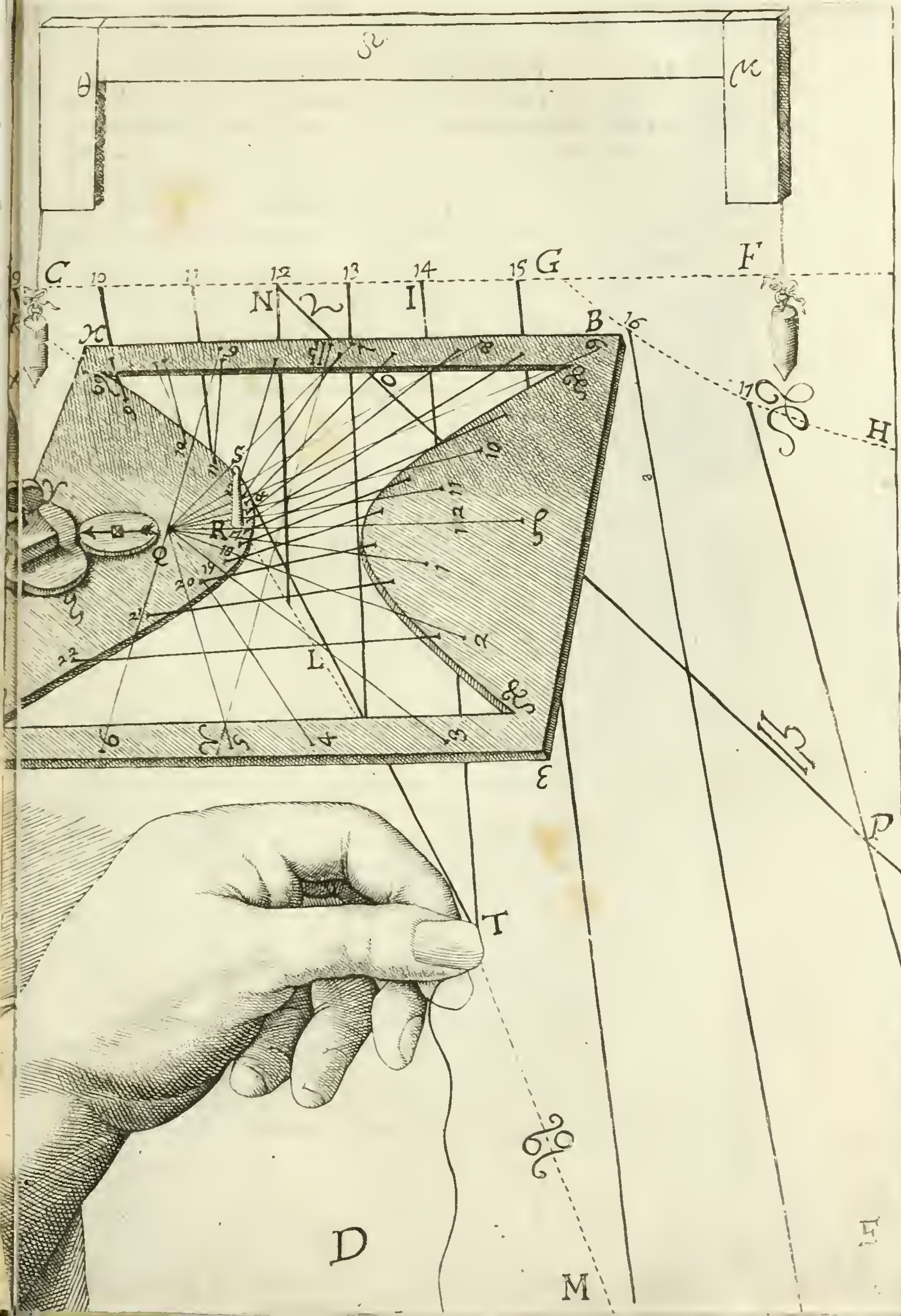
Distinctio, & cognitio linearū ī figurâ.

2 In primis caue te implicet in figura linearum multitudo, & varietas, atque in ea distingue instrumentum, siue citharam horariā designatoriam à muro, atque in vtroque lineas internosce. In Plano CDEF lineę crassiores horarum sunt in muro descriptarum 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 terminatarum partim ab horizonte CF, partim à Tropicis GH, KLM. Æquinoctialis est NP. In plano verò instrumenti horarij graciliora fila a centro Q traducta sunt pro horis Astronomicis, quarum numeri in plano tropici inferioris notati vtrinque à meridiana Q 12, sunt, 1, 2 3, &c. 11, 10, 9, 8, &c. Fila verò mediocri crassitie traducta sunt Italicarum horarum, incipiendo inuerso ordine a latere pro hora 23, earumq; numeri notati sunt in plano tropici superioris, vbi 22, 21, 20, &c. vsq; ad 9. Stylus perpendiculariter erectus vbi R, è cuius vertice filum traductum per contactum extremitatis lineæ horariæ Italicæ 14 terminatæ à tropico superiore ♋, eius horæ punctum infimum signat in muro vbi T. Prædictis præcognitis, ac distinctis, veniamus ad instrumenti constructionem, & vsum pro horarijs in quolibet muro declinante, & plano inclinato describendis.

Suspensorij forma, & ratio.

3 Muro, in quo cogitas horarium describere, affige suspensorium ligneum, siue ex oricalcho (modo non ferreum, propter acum magneticam in plano citharæ, &c.) velut in V, quod sit eius conditionis, vt habeat brachium, quale XY, quod ad angulum rectum sit mobile circa ZX, & clauo cochleato firmari possit in x; pars x* caua sit, per quam excurrere possit pars altera teres, *Y, quæ bifida, & latior sit in formam gemini labij, à ξ ad Y, & cocleato clauo ad Y constringi possit, vel dilatari. Planum citharæ horariæ AB ingeratur in ξY, & firmetur clauo Y parallelum horizonti. Quam ad rem conducet rotunditas partis *ξ, quæ facile circumuolui potest ad aptè librandū

pla-



C
10
11
12
13
14
15
G
F
N
I
B
16
17
H
S
R
Q
L
T
P
D
M

Citharæ horariæ aptè locãdæ, & librãdæ adiumenta.

planum AB, vt mox videbis. Pro modo horarij describendi fit modus, & quantitas distantiæ styli RS à muro. Quam distantiam vel imminues moto brachio XY circa ZX versus murũ, & immissa parte tereti ♉Y magis, ac magis in cauã X♉, vel augebis eductâ, & productâ parte ♉Y ex caua X♉, & mobili brachio XY versato circa XZ, & auerso magis, ac magis ab ea muri parte, in quam proijciendę erũt horariæ lineæ ab Instrumento AB.

Cõmmoda peculiaria horarij horizontalis pro suspendio ad horas in muris.

Habet hoc commodi horarium horizontale pro horis describendis in muris, quod, cùm ex inferiore plani horarij parte filum producatur ad puncta pro horis in muro, nihil officit operationi si planum horarium suspendatur etiam ex parte murum spectante, atque etiam quasi contingente. Quod genus suspendij non facilè licet, ac sine incommodo pro ductu horarum in alijs instrumentis horarum descriptorijs. &c. Quin etiam pro lubito, & commodo licebit suspendere planum AB in qualibet illius parte, non solum vt hic vides in Y♋, sed etiã in oppositã vbi ♉, vel in qualibet alia inter ♋ vtrinque, vel inter ♉ vtrinque.

Astronomica collocatio etiã sine acu magnetica.

Etiam nõ suspensæ citharę vsum vide inferius in Schol. 1. sequẽti. Denique ita collocabis AB, vt acus magnetica congruat cum axe Mundi, &c. vt in alijs Instrumentis. Vel sine acu magnetica, sub citharâ fige cartaceum planum cereis aliquot punctis, ac verte citharam donec apex vmbræ à stylo signet gradum signi, vel diem mensis, in quo Sol est. &c. Deinde aufer cartam citharæ suffixam. &c.

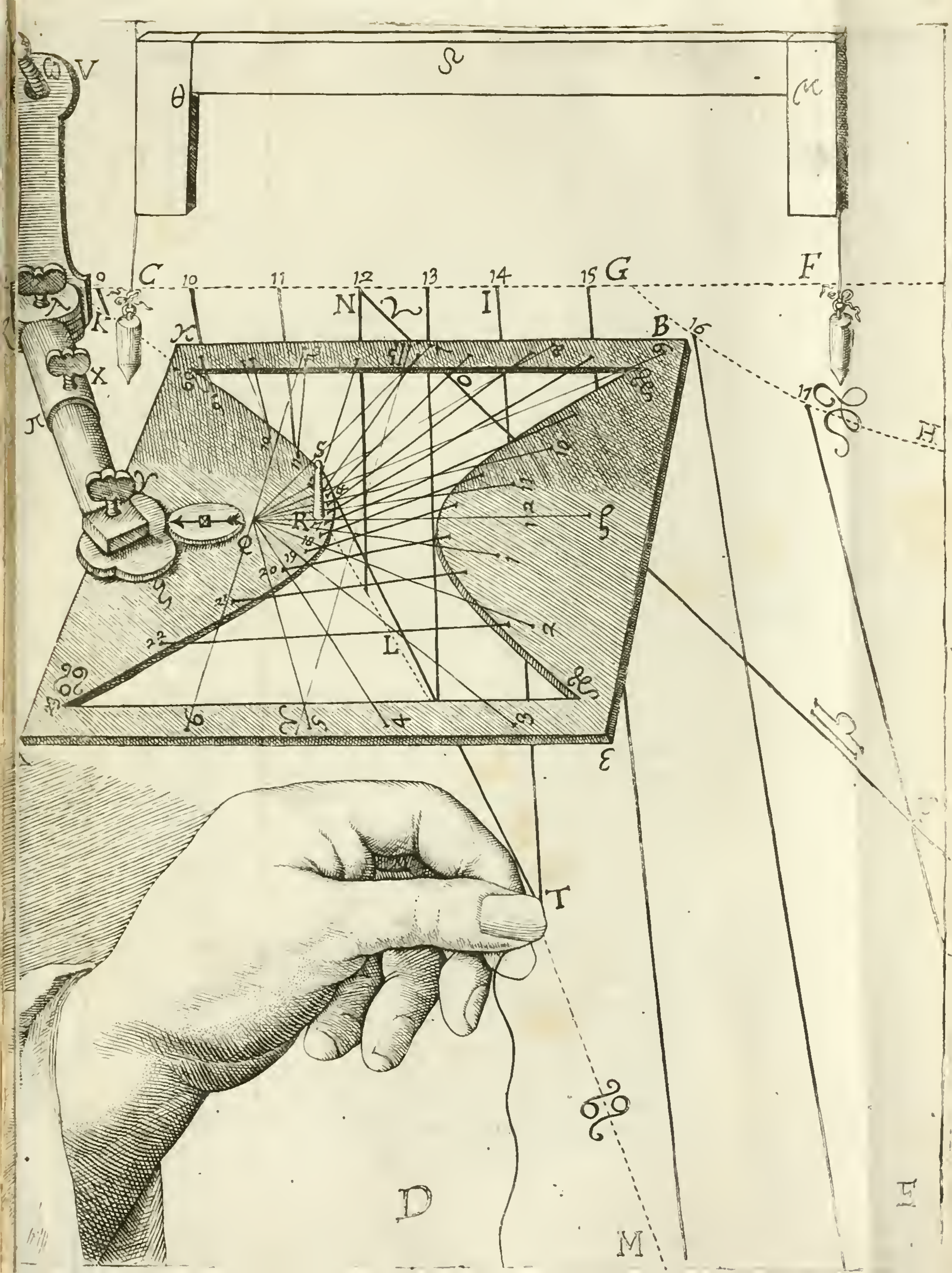
Pro horizõtali lineâ, & libratione instrumẽto parallela horizonti.

4 Collocato, & instructo sic Instrumento, ante omnia ducenda erit linea horizontalis CF. pro qua, & pro iusta librationе Instrumenti parallelas horizonti, faciet ponticulus è leui ligno dolatus, & ad rectos in $\theta\mu$ compactus, vtrinq; perpendicula gerens, qualem vides extra Instrumentum AB collocatum in spatio vacante, ne multiplicentur figuræ. Impones igitur plano horario AB ponticulum, siue geminatam normam ita, vt perpendicula dependeant secus rectam vtrinque signatam in vtroque latere θ, & μ, &c.

In primis notandum regulæ ♂ altitudinem æquandam esse longitudini styli RS. Collocato igitur, & æquilibrato $\theta\mu$ suprà AB, duces filum à vertice styli § ad murum ita, vt prius, ac simul tangat etiam summitatem regulæ ♂, atq; ad eius altitudinem duo, vel plura puncta notabis in muro, per quæ ducta erit linea horizontalis. Quibus punctis notatis, illicò depones ex AB ponticulum $\theta\mu$, quo non erit opus in cæteris lineis in muro notandis.

Proiectura optica horarũ hori-

5 Reliquum operationis perfacile est, ac per se patens. Apparet enim manifesta optica proiectura ab S fidicularũ in rectas lineas ho-



V
θ
C
10
11
12
13
14
15
G
F
N
I
K
X
B
16
17
H
S
R
Q
L
T
D
M

Zontalis, in murũ. rarias in muro. Velut fidiculæ, quæ in plano QRS notatur horæ Italicæ numero 14 occulto sub stylo; ea ex ɑ in T, ex O in I proiecta est. Ac pariter reliquæ, quarum muri obliquitas, & area pro horario destinata sunt capaces. Meridiana 12 Astronomica proijci non potest in murum spectantem ad ortum, vel occasum, quia muro parallela est; in muros verò varie declinantes eius variæ partes projciuntur; quemadmodum in apposita figura partes Aequinoctialis lineæ, ac reliquarum horarum in muro signatæ sunt.

Cur in figura nulla sit meridiana linea.

Ad praxim notaris pro signandis primis Italicis horis satis esse (filo meante iuxta partes aliquas fidicularum horariarum) duo, vel tria puncta notasse in muro, per quæ deinde ducantur lineæ horariæ ad partem superiorem vsque ad lineam horizontalem. Velut ex puncto ɑ proiecto in T, & ex puncto O proiecto infra I, recta linea horæ 14 producenda est per duo illa puncta vsque ad horizontalem in I. Atque hæc de horis Italicis, siue ab horizonte occiduo inchoantibus.

Praxis peculiaris pro signandis horis prioribus Italicis.

6 Quod attinet ad describendas in muro Babylonicas horas, siue ab ortiuo horizonte inchoatas, nihil facilius, atque hic etiam se prodit paradoxum in vsu propositionis antecedentis secundæ. Nam ex horis Italicis licet describere in muro Babylonicas, nempe educto plano AB ex YZ, & ita inuerso, vt latus Aɜ eat ad partes ɜB, & resupinetur planum horarium, refixa pyxide acus magneticæ, & ingestà in foramen inuersum. &c. Sic enim e cõuerso, & resupinato horizontali Italico AB describes secus fidiculas Babylonicum in muro ad ortum spectante. Quemadmodum in eodem muro descriptum est Italicum è conuerso Babylonico.

Horæ ab ortu descriptæ in muro ex horis ab occasu.

Astronomici Horarij in muro proiectio etiam patet radente filo fidiculas a centro Q protensas. Si fingas murum parallelum, atq; oppositum esse lateri Bɜ, nempe spectare ad Austrum, nihil facilius, & expressius apparet, quàm quemadmodum, & æquinoctialis, & Horizontalis, & Meridiana, & reliquæ Astronomicæ, atque etiam Italicæ, ac Babylonicæ horariæ lineæ optica proiectura eant in murũ.

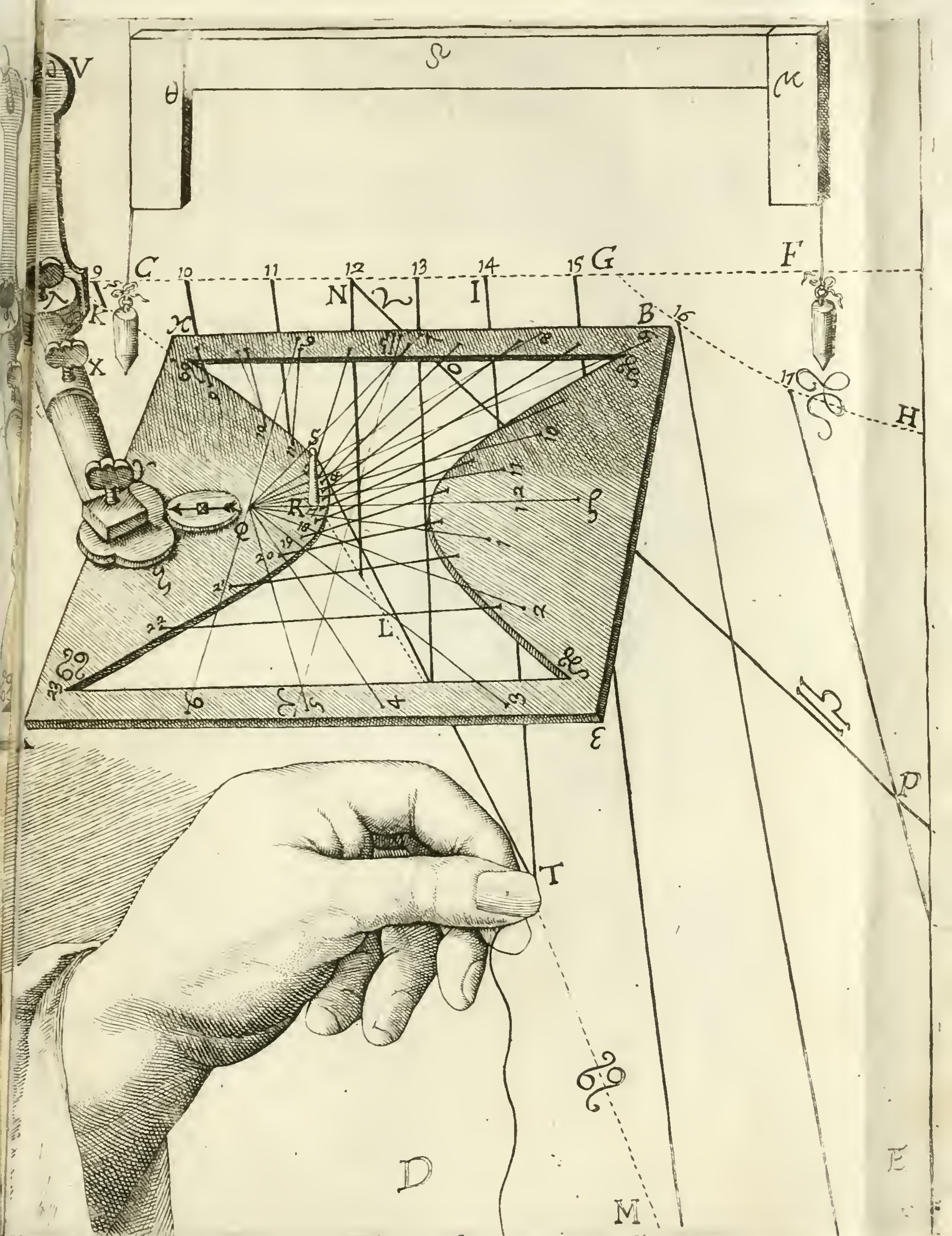
7 Quod in muris declinantibus præceptum est, proportione intellige de planis quibuscunque inclinatis, in quæ lineæ horariæ ope fili fidiculas radentis proijcientur ex instrumento astronomicè collocato iuxtà prædicta in antecED. num. 3 huius Propos. 3.

Pro describẽdis horis in inclinatis planis.

Præstiterit forcasse pro planis inclinatis, aut etiam necesse aliquãdo erit vice sospensorij vti fulcro; de quo in seq Schol 1.

Habes igitur, amice Lector, ex vnica circini diductione, qua horizontale horarium construitur, & fidiculis consuitur, facillimum compendium ad verticalia horaria, & quodammodo ad vniuersam Gnomonicen, quam aliqui prolixis voluminibus produxerunt.




V
C
G
F
N
I
B
H
K
X
Q
R
L
P
T
D
M
E

SCHOLION I.

Reliqua aliqua circa vsum (in antec. prop. 3) citharæ horariæ ad horaria in muris.

Examen opticum horarij ritè in muro descripti è cithara.

CÆtera, quæ communia sunt alijs instrumentis ad horas in muro, videlicet de longitudine, aut collocatione styli, designatione Tropicorum, & si lubeat, reliquorum etiam signorum Zodiaci, reuisæ in Ap. 9. Prog. 3, cap. 5. Hic tantum indico pro examine, & correctione horarij in muro descripti, licere opticè spectare è styli vertice S secus fidiculas, ac si linea visualis vniat eas cum lineis horarum in muro, argumentum esse horarij ritè descripti.

Vsus fulcri pro suspensorio.

Licebit etiam planum AB aliqua arte imponere cruri ligneo, vel grauiori æreo habenti pedem latiorem & valdè grauitantem, vt sine inclinatione, & lapsu sustinere possit laminam gracilem totius AB; ac, pro suspensione in γζ, circa clauiculum infixum vertici subiecti cruris ærei moueri possit AB semper parallelum horizonti. &c.

Cōditiones claui figentis suspensorium.

Clauus muro ad V infixus ne sit ferreus, ac propter magnetem in Q. &c. habeatq; cuspidem intra murum immissam ex ærea solidiore materia temperatam, qua murum possit perforare. &c. Prætereà partem extantem, circa quam liberè depēdet Suspensorium, idem clauus habeat sulcis quasi rugosam ad ω, vt suspensorium aptari possit pro exigentia minus, vel magis propè murum.

Denique quæ ad Theoricen pertinent videnda, & deducenda sunt ex ijs, quæ habes in Apiar. 9. Prog. 3.

SCHOLION II.

Horarium horizontale comparandum cum quolibet alio instrumento aptissimo ad horaria in quolibet immobili plano describenda.

NVllum horarium plures horas habet pro qualitate horizontiū, nec plures projicere potest in muros quamlibet Cœli plagam spe-

spectantes, quàm horarium horizontale; quod etiam in Ap.9. Prog. 5.cap.7.notauimus; ideò aptissimum est pro instrumento ad horaria muralia describenda. Nec illi est imputanda horariarum linearum in muro vel paucitas, vel accisio, sed ipsius muri declinationi, quæ inepta est vel pluribus, vel integris lineis horarijs excipiendis. *Horariū horizōtale plures habet horas, quàm murale quodlibet.*

At oppones: Horarium horizontale habet primas horas, velut 11, 12, 13, 14, 15 altero tantum tropico terminatas, velut etiam Astronomicarum non paucas ante, & post meridiem in lateribus A, B, ac proinde non potest eas integras proijcere in murum. Aliqua verò alia instrumenta (veluti tuum illud in Apiar.9, Prog.3) quoniam habent pro varia Poli eleuatione varias quidem, sed integras latitudines horizontales, è quarum circumductu signantur in muris horæ ab horizonte, vt à te in cit. Ap.9 docetur, ac pro Astronomicis etiam habēt integras horas; ideò possunt etiam primas horas ab horizonte, & Astronomicas integras proijcere in muros, quod non potest horizontale hocce Instrumentum.

Respondeo. Etiam si aliqua alia instrumenta vtantur horizontalibus integris latitudinibus, & horis integris Astronomicis, tamen eas integras non possunt in muros proijcere, dum ex ijs primæ horæ ab horizonte occiduo, & postremæ ab ortiuo, & Astronomicæ priores, & posteriores circa meridianam signantur. Nam earum latitudinum horizontalium, & Astronomicarum linearum pars extat suprà horizontalem lineam in muris, atque ideo superflua est, ac superfluè notaret partem lineæ horariæ extantem suprà lineam horizontalem in muris. Neque enim primi Solis orientis radij, vel extremi occidentis in primis aliquibus horis Italicis, & extremis Babylonicis, atque in aliquibus Astronomicis afflare possunt muros vltra, & supra lineam horizontalem, quę parallela est vero Orbis horizonti, & quemadmodum verus horizon, terminat, aut incipit etiam ipsa cum Solis cursu primos eiusdem, vel extremos radios.

In horas Astronomicas priores, ac posteriores ante, & post meridianam Sol vtrimq; citra, & vltra lineam Aequinoctialem sicut in horizontali iacit vmbram infinitam versus Tropicum ♑, sic in muralibus horarijs iacit infinitam versus ♋; propterea non habent ea horaria in dictis horis terminum alterutrius Tropici *Ratio aliquorum horarū in horizōtali, & muralibus interminatarū.*

Horarium igitur horizontale cum sit in plano terminato, & primas Italicas, & extremas horas Babylonicas vtrolibet sui latere, quasi linea horizontali terminet, & pro aliquibus horis astronomicis vmbram infinitam excipiat, ideo eas horas non integras habet, & earum tantum partes aptas excipiendis primis, vel extremis solaribus radijs

 proijcit

proijcit in plana terminata murorum, & congruit cum ipso Solis cursu. Quare nihil est, quo eius instrumenti aptissimum vsum ad omnes horas notandas imminuat quisquam, nisi se Philosophiæ Gnomonicæ, atq; Astronomicæ ignarum velit prodere. Præsertim, iuxtà præcepta 1. propositionis, nudatis omnibus eius instrumenti lineis horarijs ita, vt nullum sit in qualibet punctum, ex quo non liceat liberè proijcere vel totam, vel quamlibet horæ partem in oppositum murum, pro eius varia declinatione, vel areæ capacitate.

Comparationem prædictam citharæ horariæ intellige cum alijs instrumentis non vniuersalibus ad horas in muros proijciendas.



MI-

MICROCOSMVS.

Exodium horarium III.

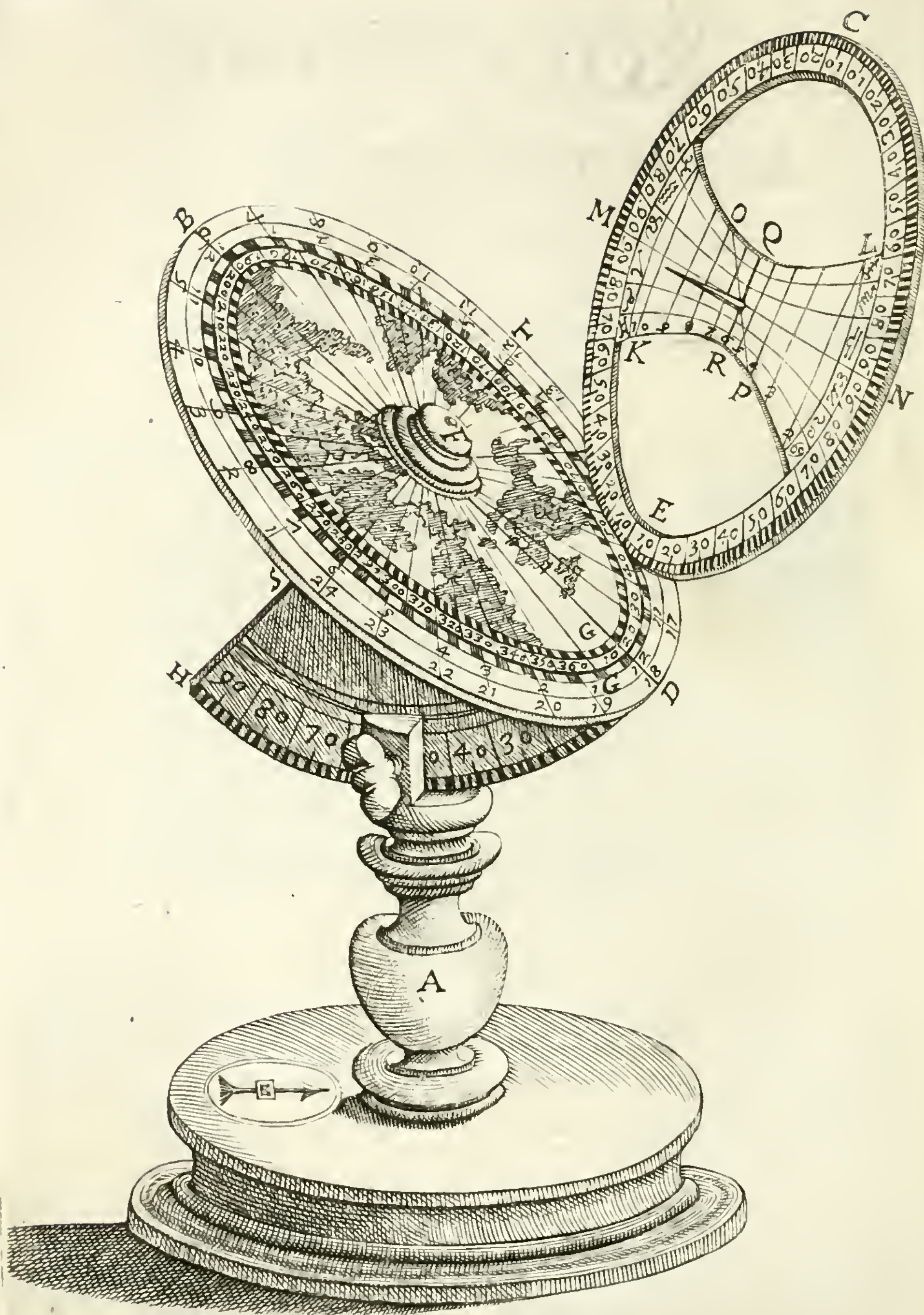
PROPOSITIO I.

Microcosmi theorica expositio, & facillima constructio.

1 Icrocosmon libuit appellare quā infra vides machinulam ABC, in qua totius orbis terreni, & cæleſtis ad præcipuas Geographicas, Aſtronomicas, Gnomonicas operationes compendium eſt. Cuius ope, præter cætera, ad quamlibet Poli eleuationem facillimè agnoſcas quota ſit hora Aſtronomica, Italica, Babylonica, eaſq; horas etiam deſignes in quolibet plano immobili; ac ſcias præterea etiā horas non ſolū in peculiari loco, ſed eodem momento, etiam cuiuslibet loci, atq; vbiq; gentium. Hic enim præſtitimus quod polliciti ſumus in Analecto 29 ad 4 editionem noſtrorum Apiariorum, ac iunximus in vnum inſtrumentum quidquid in quinque libris noni Apiarij docuimus, & ad finem Apiarij 12 addidimus, multoque hìc facilius, quàm ibi, vt in ſequentibus videbis, ſi ea contuleris cum dictis in cit. Ap. 9, & in fine 12 Apiarij. *Cur microcoſmi nomen.*

Quod verò mirum, atque amabile eſt in hoc Microcoſmo ad tam multa conflato eſt, quòd longè facillima eſt eius conſtructio, quam quilibet ignarus Gnomonices, Aſtronomiæ, Geographiæ poteſt cōficere. Nihil enim pene aliud requiri videtur, quàm diuiſiones circulorum in gradus, & diametrorum, & parallelarum ductus per puncta inuenta vnica circini diductione. Præterea tota Machina poteſt ita in partes diſtrahi, vt compoſitæ alia ſuper alia occupent loci exiguum, & facile circumferri, & cum opus eſt, facilè rurſus conſtrui poſſit, iuxtà dicta in Ap 9. Prog. 3. cap. 1. Sed iam veniamus ad exponendas Microcoſmi partes. *Microcoſmi facillima conſtructio.*

2 Circulus BD continet proiectam in planum circuli Aequinoctialis ipſam ſuperficiē Hemiſpherij terreni cū Polo F, per quē, tanquā *Explicatio tium ?cosmi.*



commune centrum, interſecant ſe crebri meridiani, quos vides in figura, & qui locorum longitudines, ſiue à primo meridiano (vbi G) diſtãtias terminant. Gradus ipſi inter meridianos ſunt pro totidẽ imaginarijs meridianis. Gradus latiores peripheriȩ maioris diuidunt circulum æquinoctialem in 24 æquales partes, ac horas, horarumque ſingularum quadrantes. Pro gemini Hemiſphærij proijectura Boreali, & Auſtrali ſufficit vna tantum hìc in figura exhibita, in qua eædem ſunt operationes pro oppoſito hemiſphærio. Vide inferius propoſ. 2.num.2, & 3.

Microcoſmi pars altera præcipua CE continet proiecturam in planum dimidiæ Zonæ Zodiaci, & circulorum horariorum, qui rectis lineis excipi poſſunt in planum KL.

Ordinis diuiſionum in gradus quadrantis HD, & peripheriæ EC rationes vide in Ap.9. Prog 3.cap.3,4,5.

Habes in eodem Ap. 9 prog. 1. cap. 5. modum, quo per vnicam circini diductionem à nobis demonſtratam inuenias puncta, per quæ parallelæ horariæ lineæ ducantur, habes & modum per fila è Conicis demonſtratum, quo Tropici deſcribantur terminatores linearum horariarum. Quarum tria ſpatia à media QK (velut à centro circuli ad 3, vel 9) conficiunt ſtyli longitudinem in plano KL.

Zona extrema circuli BD, quæ continet numeros, & gradus horarum, immota eſt. Ea verò pars eiuſdem Circuli BD, quæ clauditur peripheria terminante numeros meridianorum, ſiue ſemidiametrorum, mobilis eſt circà centrum, ſeu Polum F.

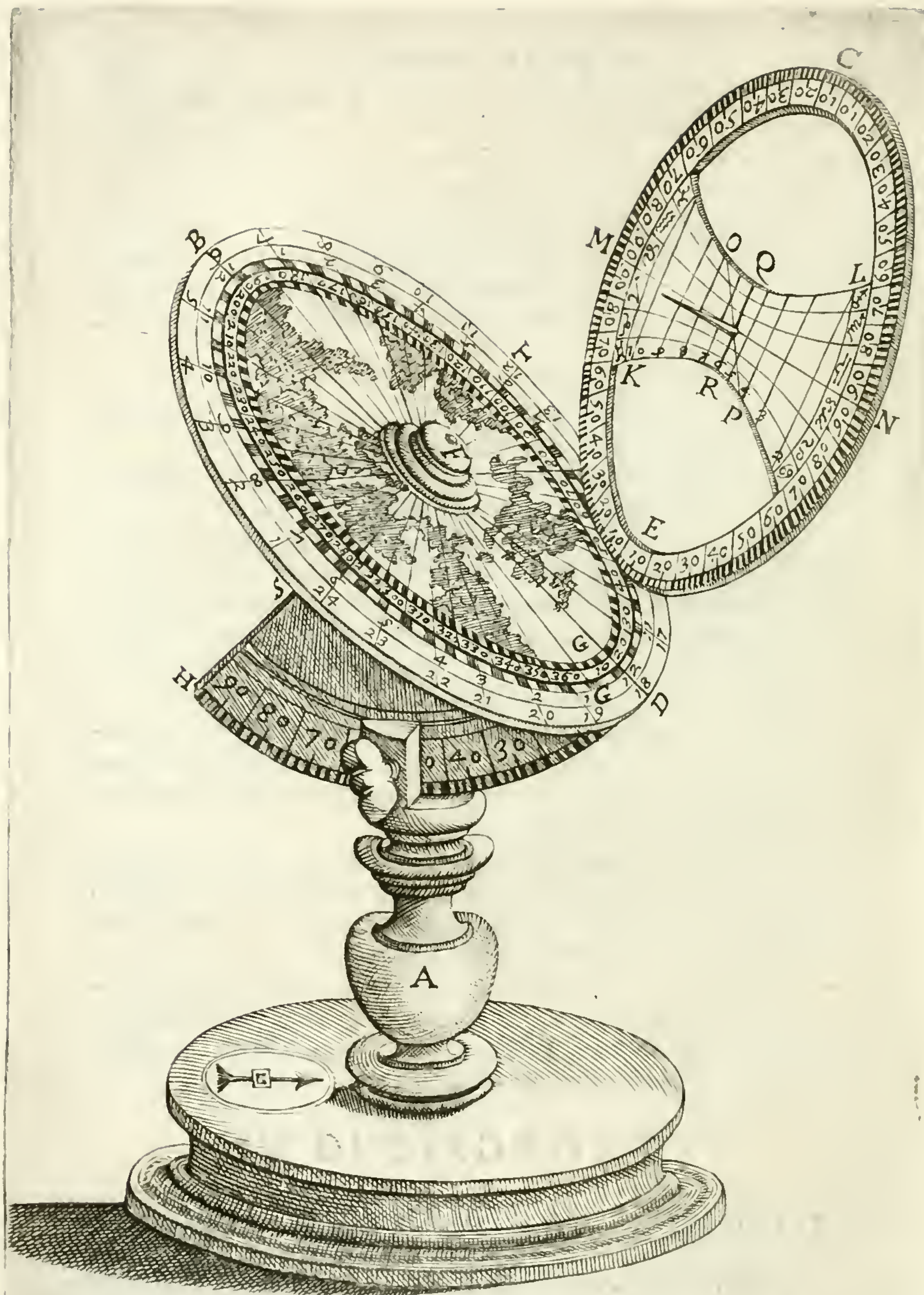
Inter, & ad extrema meridianorum exigua, & crebra foramina ſint, in quæ poſſit infigi ad angulos rectos peripheria CE habens ſolidam, ac tenuem cuſpidem ſub inferiori extremo lineæ, quæ eſt ſub E, quæque in directum eſt horȩ 6 in plano KL.

Habes igitur in prædictis & partes, & partiũ compactionem, & luxationem, & expoſitionem, & theoricen, & totam denique conſtructionem Microcoſmi noſtri horarij. Mox vſus aliquot præcipuos indicatos accipe in ſequentibus.

PROPOSITIO II.

Vſus Microcoſmi pro horario vniuerſali Aſtronomico Italico, &c. & vniuerſaliſs. ad horas vbiq; gentiũ eodẽ momento cognoſcẽdas.

Col-


B
C
M
O
Q
L
K
R
P
N
E
G
D
H
S
A

COllocetur aſtronomicè Microcoſmus, vt cum Mundo maiore congruat, ſcilicet infixa cuſpide (quæ eſt ſub extremo lineolæ vbi E) in foramen ad extremum Meridiani eius loci, in quo venaris horam, ſitq; ad grad 40 longitudinis, vt habes in exemplo figuræ. In qua longitudine habes in noſtra tabella, ad finem Apiarij 12, collocatas tres Siciliæ Vrbes, Catanam, Meſſanam, Syracuſas, neglectis minutijs, quibus non egemus pro noſtro hìc exēplo, in quo vero potius propinqua ſimilitudo, quàm præciſio ſpectatur. Puta igitur te eſſe Syracuſis, & meridianum 40 vna cum EC adducito ad horam 12 aſtronomicam in directum ipſi D; deinde quadrantem HD eleuato ad altitudinem Poli Syracuſij, pariterq; appoſita regula ad centrum (vbi ſtylus perpendiculariter eſt erigendus, vel erectus) in plano KL ſecet eundem gradum poli Syracuſani à C deſcendendo verſus M, vel ab E aſcendendo verſus N, ducaturq; recta obliqua OP pro horizonte occiduo, ſiue pro hora Italica 24.

Collocatio aſtronomica Microcoſmi.

Pari modo in omni aſtronomica collocatione Microcoſmi debent eſſe in eadem Poli eleuatione quadrans HD, & obliqua ducta per centrum plani KL. Porro licet in figura non ſit ſignata altitudo poli congruens cum Syracuſana, tamen fingatur pro exemplo. Locetur denique Microcoſmus iuxta directionem acus magneticæ, ac pars circuli vbi B inclinet ad Auſtrum, pars verò vbi D inclinet ad Boream, & in CMN planum KL excipiat Solem apertum, & quaſi dicam, in faciem. Vel ſine acu magnete illitâ, adducto E in D, verte Machinulam donec cuſpis vmbræ à ſtylo proiectæ attingat in plano KL locū paralleli, in quo Sol verſatur; eritq; collocatus prorſus aſtronomicè Microcoſmus.

2 Vt aſtronomicam horam quęſitam inuenias in circulo BTDS, ita CMEN moueto, vt vmbra è vertice ſtyli in plano KL tangat lineam intermediam QR, & ſub E habebis, in exemplo figuræ, horam 10 à media nocte, quam indicat mobilis linea meridiani Syracuſani.

Horam aſtronomicam inuenire pro loco, in quo ſis.

Ac eodem tempore ſcies etiam quota ſit hora aſtronomica vbique gentium ſub quacunq; altitudine vtriuſq; poli, & ſub quocunque meridiano habitantium. Nam, licet ignotam habeas poli altitudinem, modo (ex tabella longitudinum, quam habes in fine 12 Apiarii) ſcias longitudinem cuius libuerit loci, eius meridianus in circulo BSDT indicat horam ſibi in directum oppoſitam in Zona circuli extremà. Verbi gratia, in exemplo figuræ, qui habitant ſub meridiano 30 habent horam 11 pene cum dimidia à media nocte; qui ſub meridiano 20 duodecimam cum quaſi tribus quadrantibus; qui ſub meridiano 10 duodecimam; quatenus licet videre in obliqua hìc figurà. Quam cùm

Eodem momēto ſcire horam aſtronomicam vbiuis gentium.

per-

perfectè circularem tibi conflaris, etiam in ea præcisiora videbis. Parique modo fiet pro horis post meridiem, adducto E ad quadrantem inter DS.

Horam Italicã inuenire etiã eodem momẽto cuiusc̃nq; loci sub eadem, & sub opposito parallelo.

3 Italicam horam inuenies moto EC, cum subiecta mobili rota meridianorum, donec a styli vertice cuspis vmbræ feriat partem aliquam obliquę lineæ OP; tunc enim linea meridiani sub E in rota meridianorum, indicabit in extremà orà horam Italicam. Qualem puta in figurà (citrà, vel vltrà 10 astronomicam) circa 17, vel circa 15 Italicam magis, aut minus, prout Sol Australis, vel Borealis ferit partes ab Aequinoctiali lineà versus O, vel P, magis, vel minus distantes, & obliquas. Vide in Ap. 9. prog 3. cap. 7.

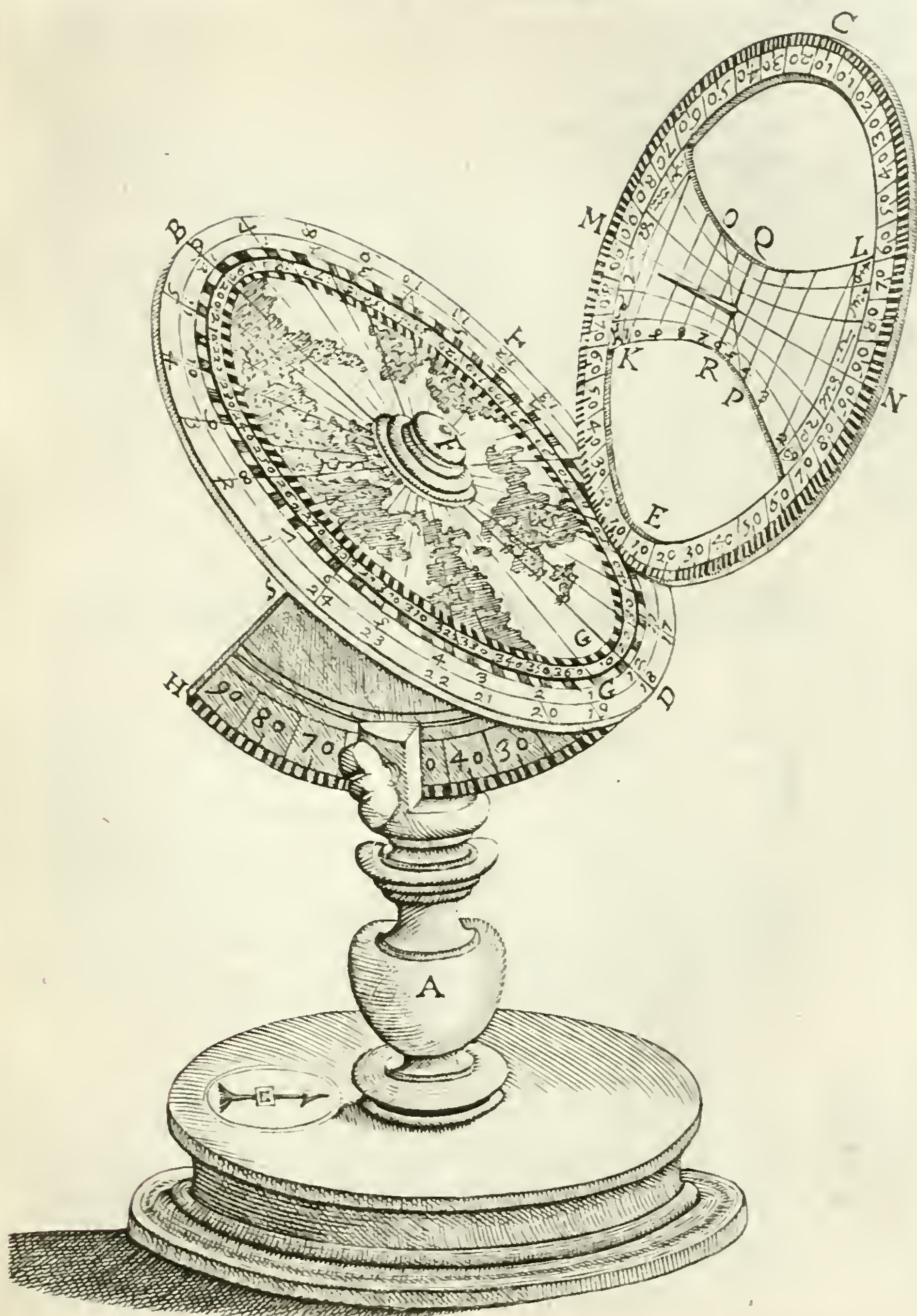
Atque hic modus organicus in Microcosmo inueniẽdi, ac sciendi horam Italicam, & eius distantiam ab astronomica, valet etiam in omnibus meridianis toto Orbe sub eodem, et sub opposito parallelo, siue sub eadem altitudine vtriusque Poli, sub qua habitat qui horam venatur. Nam (in exemplo allato horæ 10 astronomicæ à media nocte, inuentæ sub meridianò 40) si fingas te inuenisse horam italicam distantem citrà 10 astronomicam (cui in directum est 16 Italica, & occultantur ambæ ab obliquitate arcus sub E) spatio semihoræ, scilicet horam 16 ½, pariter in meridiano 10 indicante horam astronomicam 12 à media nocte, hora Italica erit distans per spatium semihorę citra 12, idest erit 18 cum dimidia. Ac pari proportione in alijs meridianis sub eodem parallelo vtrinque pari spatio distante ab Æquinoctiali, vel ab vtroque polo. Denique prædictus idem modus organicus sciendi horam ab horizonte, valet pro Periæcis, & Antæcis. Ratio theorica est, quia in omnibus locis eiusdem altitudinis vtriusque poli, sub qua horam astronomicam inuenisti, est èadem obliquitas, & quantitas horizontis OP, ac propterea eandem habes differentiam, siue distantiam, ab astronomica inuenta. &c.

Ratio inuentæ horæ Italicæ momẽto codẽ pro horis omnibus eiusdẽ, & oppositi paralleli.

Pro hora italica vbiq; gentium eodẽ momento cognoscenda quid agendum.

4 Pro alijs verò vtriusque poli eleuationibus extra eleuationẽ, sub qua versaris, inuentà per prædicta in numero secundo, hora astronomicà, vt scias etiam Italicam nõ licet vti obliqua OP, sed ipsa astronomica hora inuenta vertenda est in Italicam ea arte, quam habes in Ap. 9. Prog. 2. cap. 2. Pro qua facit cognitio arcuũ diurnorum, & nocturnorum in omni eleuatione poli; cuius etiam rei singulare compendium habes in plano KL, in quo propterea horæ signatæ sunt numeris facientibus ad quantitatem arcuum interceptorum vtrinque inter obliquum horizontem OP. Vt hæc expressius intelligas, vide Ap. 9. prog. 2. cap. 5. vbi omnia clarissimè sunt exposita, atque ideo non hic frustrà iteranda.

Ra-



B
C
M
O
Q
L
F
K
R
P
N
E
G
H
D
A

Ratio cur idem horizon nō faciat pro hora Italica vbiq; eodem tēpore cognoscenda.

Ratio theorica cur eadem obliqua OP non faciat pro horâ Italicâ etiam in alijs poli vtriusque eleuationibus, est quia pro varia vtriusque poli eleuatione variatur etiam obliquitas, & quantitas rectæ, siue horizontis transeuntis per centrum plani KL, atque ea varia quantitas inuestiganda est, & inuenienda ex varia quantitate arcuum diurnorum in varijs poli eleuationibus, scilicet ope plani KL, vt habes in Ap.9, Prog.3. cap.4, 5.

Horam Babylonicā ex horizonte Italico inuenire.

Pro horis Babylonicis inseruiet idem horizon OP, si totam machinullam EC in tenui lamina elaboratam, & sub extremis O, P signatam geminis punctis in postica parte, ita inuertas circa cuspidem fixam sub E, vt partes, quæ sunt in M eant ad N, & quæ in N eant ad M, et postica pars Solem excipiat. Ac pari proportione operare, vt dictum est pro horis Italicis.

SCHOLION.

Cautio pro operationibus antedictis in Semestri Hyemali.

CVm planum Aequinoctiale BSDT sit eleuatum parallelus vero Aequinoctiali, & Sol in Semestri hyemali versetur infrà id planum, officiet vmbrâ suâ plano KL, ac proinde non licebit excipere Solem, qui radiet in stylum. &c. Remedium habes iuxtà cauta in Ap. 9. Prog. 3 cap. 6. Itaque in Semestri hyemali attolle peripheriam CMEN, infixo sub E stylo productiore ita, vt inter arcum sub E, & planum Aequinoctiale BD sit tanta distantia perpendicularis, quantâ opus erit, vt stylus radijs solaribus afflctur.

PROPOSITIO III.

Vsus Microcosmi pro horis Astronomicis, & ab horizonte inchoatis in quocūq; plano declinãte, vel inclinato facillimè designandis.

Huius


C
M
L
K
R
P
N
E
G
D
H
A

HVius tertię propositionis vsus quoniam nihil hic habet noui, præter ea, quæ copiosè habes exposita in Ap.9 Prog. 3, &c. vbi docemus horas in muris, & in alijs immobilibus planis describere ex nostro illo Instrumento facillimo, & vniuersali; propterea illuc te, mi Tyro, prouoco, vt hic tantum indicanda ibi videas in exemplis, & præceptis, & Theorijs explicata, & absoluta. Itaq; adducto E in D, & astronomicè collocato Microcosmo ad poli eleuationem, sub quà versaris, filum à vertice styli dependēs vel traducito per extrema linearum parallelarum in plano KL ad contactum muri oppositi; vel, si velis vti vnicà horaria lineà, puta intermediâ QR, filum traducito per Q, & per R extrema ipsius rectæ QR circumductæ, moto E per oram circuli BSDT ad singulas horas Astronomicas. &c.

Pariter pro horis Italicis circumduces obliquam OP, moto E ad horas Italicas in orà circuli BSDT notatas, quarum extrema puncta per O, & P in muro notata iunges rectis lineis, & suis numeris subsignabis. &c. Pro horis ab horizonte ortiuo siue Babylonicis, inuertenda erit peripheria MN, & in ea planum KL, vt prædictum est in fine numeri 4 propos. 2 antecedentis, & proportionaliter operandũ, vt modo dicebam pro horis Italicis. Vide cit. Ap.9. &c.

SCHOLION I.

Vsus alij non horarij machinulæ nostræ Microcosmicæ indicati.

Arcus diurni ĩ quacũq; eleuatione ex Microcosmo. Meridianam ducere è Microcosmo. Poli eleuationẽ inuenire in Microcosmo. Latitudines horizontales è Microcosmo.

1 PRæter antecedentis Microcosmi horarios vsus, & indicatũ in Apiarijs vsum plani KL pro inueniēdis arcubus diurnis ad quamlibet Poli eleuationem, vide in Ap.9 alios etiã vsus partim astronomicos, velut pro ducenda linea meridiana in planis horizontalibus, & pro poli altitudine inuenienda, pro latitudinibus horizontalibus. &c. Ap.9, Progym. 2. cap. 4, 5, 6. Progym. 3. cap. 7; partim Geographicos Ap. 9. Prog. 2, cap. 5. In primis plura alia Geographica indicata vide in fine Ap. 12, vbi Aranea Cosmographica, propos. 8.

2 Quod verò pertinet ad inuenienda puncta variæ vtriusque poli eleuationis in singulis meridianis pro recta locorum collocatione in Geo-



C
M
L
K
R
N
E
B
H
G
D
A

Ars inueniẽdi acros locorũ situs in Microcosmo.

Geographico circulo BSDT, diuidenda est vna è meridianis lineis in 90 gradus paulatim magis, ac magis imminutos versus polum F; vt habes in figuris citatæ Araneæ nostræ Geographicæ, atq; operandum, vt ibi docetur propositione 4.

Ratio graduũ inæqualium in diuisione rectilinei meridiani pro eleuationibus poli.

Cur verò in ijs figuris Araneæ Cosmographicæ diuisio illa lineæ vnius meridianæ sit per gradus inæquales, ratio est, quia dum arcus quadrantis circuli meridiani proijcitur in rectam lineam, quæ est semichorda eiusdem circuli meridiani, & dum singuli gradus illius arcus deducuntur in subiectam chordam per lineas parallelas diametro, quoniam illi gradus semper sunt obliquiores versus polum, ideò semper sunt minores in chordam proiecti. &c. Exempli gratia, quia gradus à C ad M semper sunt obliquiores, quò magis versus M accedunt, propterea proiecti in rectam interceptam inter M, & inter pedem styli (seu centrum plani KL) semper minores efficiunt partes diuisionum versus M. Figuræ aptiori applica tu, mi Tyro, hanc opticam theoricen, vt hic indicata peruideas apertius.

SCHOLION II.

E tabulis longitudinum iuxta nouum, & ingeniosissimum inuentum Clariss. Viri Langreni Regij Cosmographi in Belgio, vsum sui Microcosmi optat Author Ærarij ab amicà posteritate.

Macula, seu facula Bettina in Lunà.

SCilicet in perpetuum monumentum grati animi erga Virũ Clarissimum, qui vni è maculis, seu faculis per tubospicillum in Luna conspicuis (è quarum illuminatione locorum longitudines venatur) nomen Bettinæ (Ærarij authore, nisi post factum vulgatum, conscio) indidit; ac, opinor, ea beneuolentiæ significatione monuit, vt animum extra mortalia præcelsum, ac verè nobilem præferat, ceu olim lunulati calcei nobilitatis insigne fuere. Pergat in bene captis exemplo Lunæ inanes canum latratus non audientis, dum illi nocturno strepitu auras diuerberant, opinor, lucẽ in Luna nõ ferentes.

Alciat. Em.bl.

— ET PERAGIT CVRSVS SVRDA DIANA SVOS.

Fr. Iohannes Riccius Matheseon in Bononiensi Gymnasio publicus Lector, Langreni, & Bettini concinis sui beniuolentissimus.

AR-

ARCVS.

Exodium horarium IV.



PROPOSITIO I.

Ab arcu temporis Astronomico tela Mortis horaria.



NVper in manus meas incidit autographum olim ab ipsomet Authore P. Christoforo Griembergero Societatis nostræ Roma transmissum ad non neminem iam vita perfunctum. Censui & ipsi Authori, & reipublicæ Gnomonicæ iniuriam, & detrimentum fieri, si diutius ingrato silētio inuolueretur tam ingeniosum, & exactum instrumentum vniuersale pro horarijs in muro describendis; in quo apparet præclarus vsus sphæræ armillaris, è qua duorum semicirculorum circumductu horæ Astronomicæ, atque ab horizonte inchoantes describuntur. Arcum appello, quia verè ab vtraque semiperipheria Meridiani, & Horizontis velut à gemino arcu Temporis filum, quasi sagitta, emissum per varios vtriusque arcus gradus, oppositum muri planum gnomonicè ferit & horas opticè proijcit in lineas, quæ & ipsæ quasi quædam Mortis tela sunt; quorum vnum incertum certò nos aliquando tandem confodiet. Ideo parati simus ad singula. Accipe iam quæ sequuntur ex Autographo: figuram, & verba Griembergeri bona fide posteritatis bono à nobis hic transmissa sunt sequentia.

Cur Arcus nomē huic exodio.

Pro-

PROPOSITIO II.

Partes instrumenti.

a.a. SVnt duo stipites laterales, qui coniunguntur regula transuersâ g, & tabella semicirculari b, quæ refert planum libratum, quando stipites affixi muro respondent perpendiculo.

c. est primus Cursor circa axem h f vna cum suo fulcro d e mobilis, & firmatur cochleolà i.

n m. est secundus cursor ita teres, vt intra fissuram prioris gyrari possit, & adduci, vel reduci ad centrum h. firmaturque cochleà n.

o u. est appẽdix mobilis circa axem p habentem cochleolam p.

V. est foramen, cui immittitur clauus T, qui affixus est quadranti S cum sua cochlea, quæ in figura non est expressa, quia intelligitur existere retro quadrantem.

S. est centrum quadrantis cum suo perpendiculo.

V. est crassities quadrantis, cui affigitur circulus Aequinoctialis ABC, quem conuenit esse æreum, & debet esse ad angulos rectos cum superficie quadrantis.

AC. est linea horæ 12, seu meridiana, & debet respondere eidem superficiei quadrantis, vel saltem eidem æquidistare.

FG. HD. sunt duæ regulæ sibi mutuo cohærentes ad angulos rectos, suntque mobiles circà centrum E, vbi etiam possunt firmari cochleolà ex parte inferiori circuli Aequinoctialis.

FG. est index horarius.

HD. sustentat reliquas partes instrumenti mobilis. Omnia enim mouentur ad motum regularum FG, HD.

LEM. est Semicirculus Meridianus, cuius diameter LM semper æquidistat Aequatori, & semidiameter IE semper coincidit cum axe Mundi.

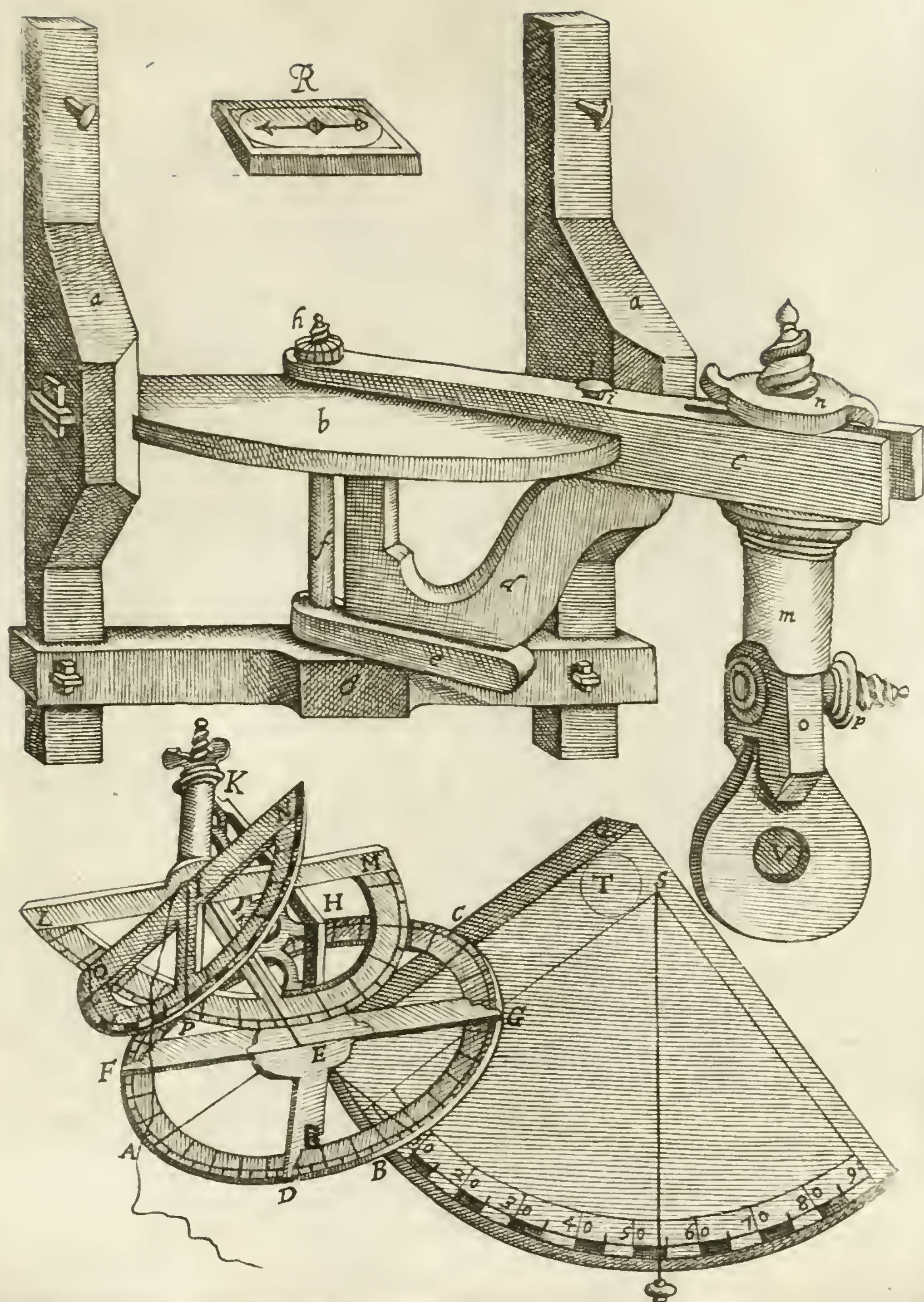
OPN est alius semicirculus, & potest vocari horizon mobilis, estq; affixus axi cilindrico IK, & radio ad semicirculum LEM.

EHK. est fulcrum affixum regulæ DH, sustentans tum semicirculum LEM, tum axem IK.

K. est cochlea astringens semicirculũ OPN semicirculo LEM.

R est pyxis magnetica, qua dirigitur quadrans S secundùm positionem circuli Meridiani.

Pro-



F

PROPOSITIO III.

Constructio Instrumenti, & vsus.

PRimo opus est vt planum Quadrantis S respondeat meridiano. Secundo, vt filum perpendiculi cum latere SG faciat angulũ complemẽti altitudinis Poli. Quæ omnia assequemur beneficio cursorum, perpendiculi, & pyxidis magneticæ. Et hoc facto, Aequinoctialis ABC habet suam positionem debitam.

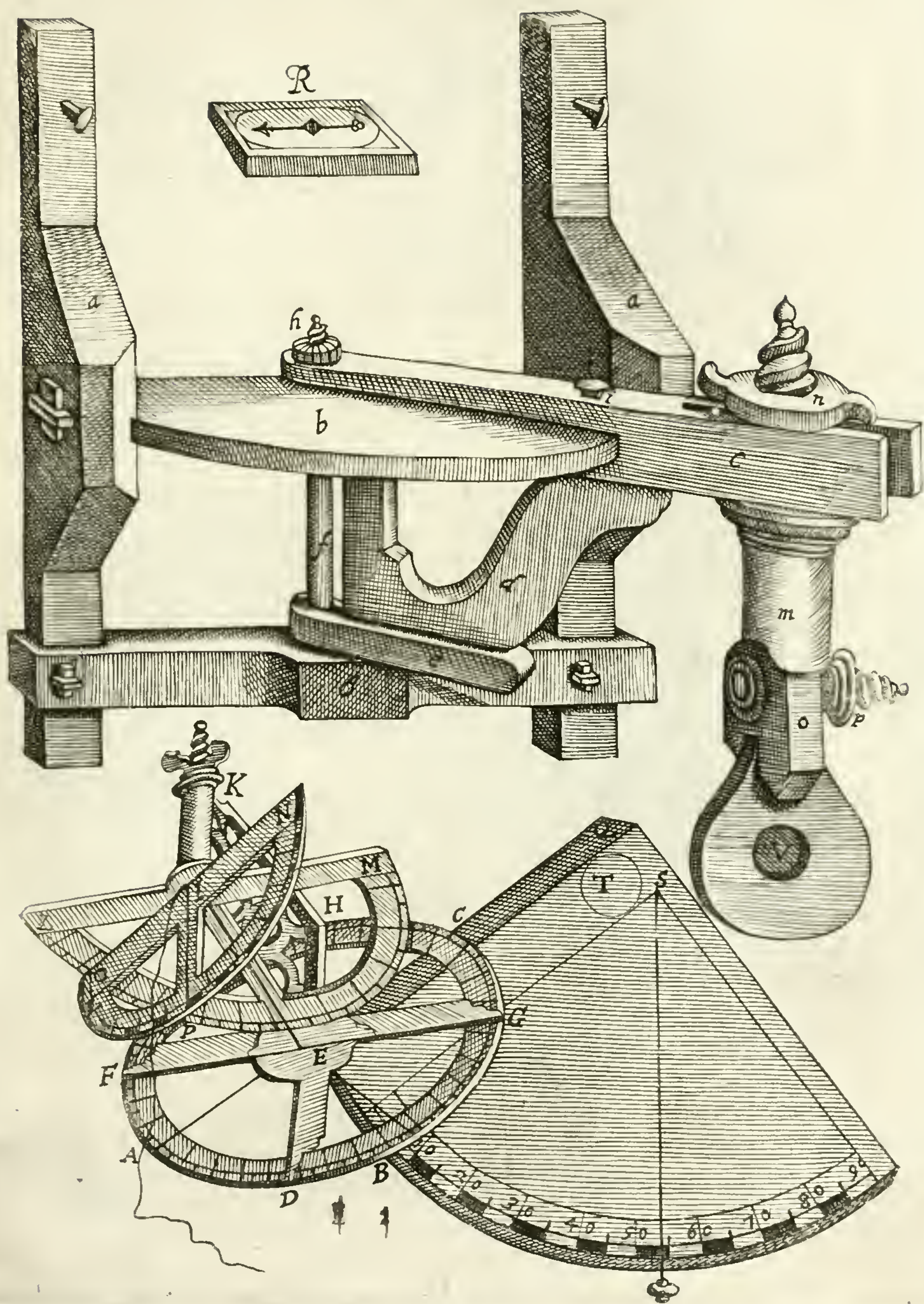
Tertio. Quando regula FG applicatur, v.g. Horæ 3 astronomicæ, tunc semicirculus LEM habet eum situm, quem circulus horæ 3 in Sphæra. Et idcircò si tunc secundum eiusdem semicirculi superficiẽ extendatur filum vsque ad murum, siue transeat per centrum I, siue non, designabit idem filum in muro punctum horæ 3. &, si plura hoc modo puncta designẽtur, omnia sunt in linea rectà indicante horam 3. Eademq; est ratio de omnibus alijs.

Quarto horis ab ortu, vel occasu seruit semicirculus OPN hoc modo. Pro hora 24 ponitur regula FG suprà horam 12 astronomicam, & in quadrante ME, vel LE, prout ratio exigit, numeratur, v. gra. arcus LO complementi altitudinis poli, eoque deducitur diameter OIN. Sic enim semicirculus OPN refert semicirculum horizontis vel orientalem, vel occidentalem. Et ideò filum extensum per eiusdem semicirculi superficiem designat in muro lineam horizontalem, seu lineam horæ 24 ab ortu, vel occasu.

Immo idem semicirculus OPN eo modo, quo dictum est, constitutus potest referre quemcunq; alium circulum horæ ab ortu, vel occasu, si succesiuè regula EF applicetur alijs, atq; alijs horis astronomicis. Et horam quidem ab ortu, vel occasu primam referet, quando radius FG steterit supra horam primam astronomicam; secundam quando supra secundam &c. vt patet è Sphæra.

Circuli enim horarum ab ortu, & occasu nihil sunt aliud, quàm Horizon ad motum primi mobilis circumductus.

Quinto puncta Tropicorum, vel quorumcunq; aliorum: punctorum Eclypticæ inueniuntur beneficio vtriusq; semicirculi. Si enim in semicirculo LIM ab L, & M versus E computetur declinatio puncti propositi, & per puncta declinationis propè centrum I extendatur filum vsq; ad parietem, illic habebitur punctum quæsitum, quamcunq; habeat positionem semicirculus LEM in Æquatore ABC. Vnde



F 2

de patet Tropicos desumi posse inueniendo puncta tam in lineis horarijs, quàm extrà lineas horarias.

Idem assequemur si in semicirculo OPN dicto modo constituto, loco declinationis, numerentur ad vtranq; partem semidiametri IP punctorum Eclypticæ latitudines ortiuæ. Filum enim eductũ ex cẽtro I per huiusmodi puncta latitudinum, dummodo semicirculus habeat positionem alicuius circuli horarij ab ortu, vel occasu, disignat necessariò in muro punctum pro arcu illius puncti Eclypticæ.

Doctè, ingeniosè, ac exactè, vt semper, prædicta Griembergerus.

SCHOLION.

Adiumenta pro vsu Arcus ad horas ab horizonte, & à meridiano, & pro eleuatione poli. &c.

PRo vsu arcus OPN ad horas ex horizonte signandas in muris opus est tabella latitudinum horizontalium ad quamlibet poli eleuationem, quam tabellam habes, præter alios, apud. Clauium inter tabellas alias facientes ad Gnomonicen.

Sin autẽ careas eà tabella, habes in promptu apud nos organicum compendium in Microcosmi plano KL, iuxta indicata in Scholio post propositionem 3 exodij 3 antecedentis, & iuxta exposita in Ap. 9 prog .2.corollar.in fine capitis 5.

Pro horis vero à meridiani LEM arcu, siue astronomicis, faciet tabella declinationis punctorum eclypticæ apud nos Ap.9.Prog.1.in fine cap.6.

Pro inuẽtione altitudinis polaris habes vsum è Microcosmo iuxta citata ex Apiarijs in Shol.post propos.3.exodij antecedentis, nu.1.



Tym-

TYMPANVM.

Exodium horarium V.

PROPOSITIO I.

Tympani, siue aquarij Authomatis ingeniosissimi, ac simplicissimi horaria operatio.

1 

Vemadmodum in antecedentibus Exodijs horarijs vsus aliquos Gnomonicos prodidimus ex Astronomia, cuius aliqua cognitione inter nostram Geometricam Methodū imbuendos Tyrones censuimus; ità si Astronomicis institutionibus aliquid etiam è Machinaria Philosophia libeat addere siue ex Aristotelis libro de Mechanicis, siue ex alijs neotericis Authoribus circa pondera, & Machinas geometricè philosophantibus, vt vsum aliquem eius scientiæ iucundum, ac facilem habeant, libuit quintum hoc horarium Exodium apponere, in quo, sublatis operosissimis tot rotarum dēticulatarum compactionibus, & implexionibus, sine vllis rotis, præsertim ferreis, aut aliter æreis, solà aquà inclusà solidæ, ac tenuis laminæ tympano (à cuius expressa figura nomen huic Exodio fecimus) & addito æquipondio, horæ ostēduntur, atque etiam pulsantur, mirificà quidem, atque ingeniosissimà, simplicissima tamen arte, quam in sequentibus prodemus. Propter facilem eius Machinæ constructionem, & constructæ circunlationē, ea vsui, atque in promptu esse poterit Militibus in Castris. Ad quos enim Tympanum magis, quàm ad milites pertinet? Aqua (cuius rara est inopia, præsertim in classibus) modò non desit, nec deerit pro æquipōdio bellici alicuius tormenti pila vel ferrea, vel marmorea, nec aberit copia funis, saltem illius, quo accenso exploduntur bombardæ.

Vnde nomen tympani huic exodio 5.

Authoma hoc horariū aptissimū militibus.

In gratiā præcipuè Chinensiū vulgatur hoc Authoma.

2 Habui nuper hìc Bononiæ in cubiculo formam, quam hìc videbis, Authomatis propositi Ingeniosissimi, ac facillimi huius inuenti cognitione (quæ adhuc ad paucos manauit, apud quos sunt, ac vidi ego aliqua exemplaria in hac vrbæ ac alibi) priuandam non censui posteritatem, ac præcipuè Chinenses Philosophos. Europæarum in-

uen-

Huius Authomatis Author anonymus.

Nō nupera huius Authomatis inuentio.

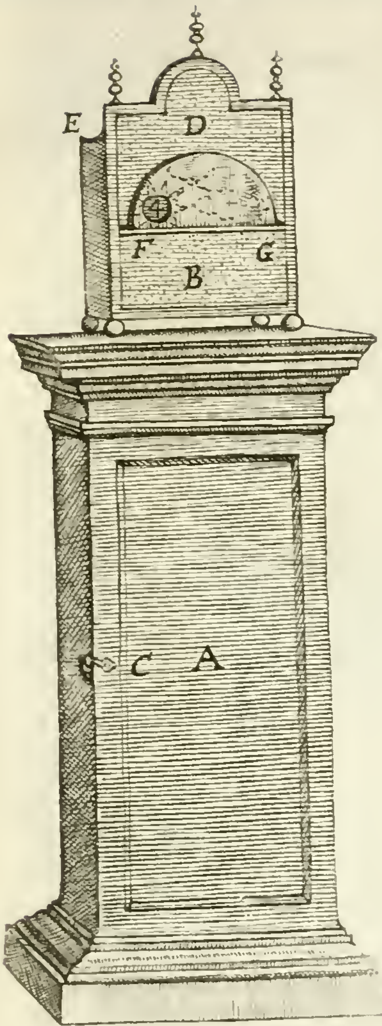
uentionum admiratores, atque auidè appetentes, quibus meę Religionis Socij Mathematicarum scientiarū occasione, veræ fælicitati aditum iam pridem fælici euentu, & feraci cum fidei Catholicæ prouentu aperiunt. Nullius Authoris iuribus hac vulgatione fit iniuria, dum nulli certò compertus habetur (quicumq; olim fuerit, suam illi laudem non inuideo) qui primus horariam hanc machinam sit molitus. Quem certe nostri æui non fuisse (præter cætera) produnt inscriptiones numerariæ ab aliquibus fide dignis visæ, quæ in aliqua huius generis Machina sunt Anni 1535. Atq; ego aliqua vidi alicubi tympana eiusmodi aquaria, & horaria, quę adeò antiquitatem olebant, vt colores vsu quasi penitus obliterati circa ea vix apparerent. Non inficior tamen & hanc, quę apud me nuper fuit, & alias aliquas ad exemplaria vetera esse nostris etiam temporibus fabrefactas eiusmodi machinas. Quo in genere præ alijs Domini Horatij Seraphini militum Tribuni plurimum se prodidit manuum, & ingenij industria. Veniamus ad machinam.

3 Machina est AB eiusformę, quā in apposita vides figura. Ligneę cauæ quadrilaterę columellæ A adapertili ad C impositū est Authoma BE; cuius ipsa facies, seu planum BD incisū est, habetq; quasi apertā fenestram semicircularem, intrà quam planū semicirculi apparet, in quo est oculus radiosus quasi sol, vbi numerus (pro exemplo) 4, qui rectilineæ sectionis, quasi horizontis, prope a tecum extremum F collocatus, tacitè circulariter cum plano semicirculi mouetur, & ab F oriendo, & versus D progrediendo, atq; inde ad G occidendo, spatium vnius horæ absumit; dumq; in G occidit, & celeri motu intrà, & infrà GBF properat, auditur campanulæ tinnitus resonantis numerum horæ, quæ incipit; simulq; apparet in orientali puncto supra F rursus ocellus radiosus inscriptus mutato numero, puta 5, indicante horam recens pulsatam, & labentem cum radioso foramine, & plano semicirculari intra BD.

Itq;, reditq; viam toties, ac totidem horis, quot partibus 24 æqualibus Sol verus in cælo circa terrarum orbem circulatur. Itaq; si, hora non auditâ, videre sit opus quænam labatur, eam pro indice intrà picti Solis ocellum numerus exhibet, qui toties mutatur, quoties in Authomate post occasum repentè renascitur. Atq; hæc quod ad primam hanc propositionem de operatione horaria Tympani à me aquarij appellati, quia, vt inferius videbis, aquæ intus transmeantis, quasi animæ motu cietur.

Sed mirificæ simul, ac simplicissimæ artis est modus, quo, sine rotis, hora quælibet & pulsatur, & intra foramen radiosum ex ordine nu-

meris



meris mutatur, ceu mox in apertà, & in partes diſtinctà machinà patefiet.

Præter indicatam, & inferius magis exponendam ingenioſam huius Authomatis ſimplicitatem, taceo alia commoda, quæ experiri licet, ſi quis paret domi ſibi ſimilem. Caret rotarum multitudine, ſtrepitu, ærugine, &c. nec eget maiori curà, quàm authomata rotata, & dentata. Facilè paratur, & reparatur. &c.

Commoda aliqua machinæ.

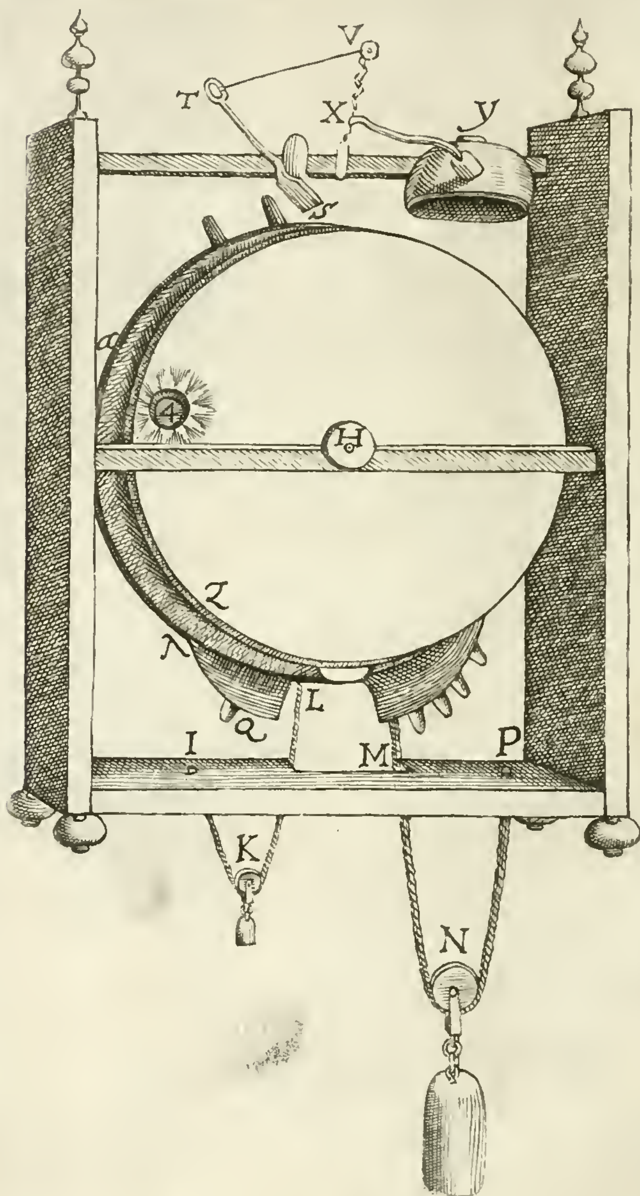


PROPOSITIO II.

Tympani horarij externum artificiũ prodere.

In

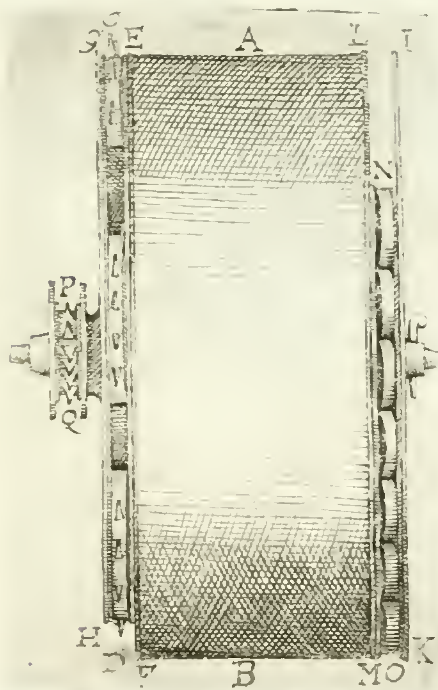
IN antecedenti prima propositione Tympani occulti operationem horariam indicauimus, hìc aperti artem sa ltem externam prodemus.



Itaq;

Itaq; subducta præcedentis figuræ columella A, & sublato plano BO, quasi aperta facie, apparet expressa forma tympani per centrum traiecti ab axe, cuius polus apparens H; circa alterum polum non apparentem it funis IKLMNP, cuius duo extrema infixa in I, & P. Trochleola (si lubet ærea) K cum exiguo pondere funem leuiter tẽdit, vt vltra L adhæreat circa polum occultum. At pondus maius sub trochlea N du funem detrahere nititur, axem asperatum, & quasi dẽticulatum (vt videbis in sequenti figura) vna cum tympano mouet, & numerus 4 ascendit, & post tympanũ asseres mobiles, ac ex ligno, ferro ve dentati (quorum formam, & artem inferius prodemus, & quales aliquos vides dependentes Q, R) dum impingunt in mobilem, ac cedentem laminam S, ea, cõnexis manubrijs T, V, X adductis, malleolum ad horarum pulsum eleuat in latere campanulæ Y.

Ars numeri mutati in foramine vbi 4 (quam aperiam in 4 propos.) latet sub plano circulari 3 4 Z; quemadmodum & ars (de qua item in 4 prop.) asserum dentatorum sub plano tympani opposito S α λ.



Antequam singulas tympani partes exponam, hic eas compactas etiam à latere lubet proponere. Vides in tertia hic apposita figura tympani dorsum, atq; alterum latus AB. Sub postica parte latẽtes dentati asseres sunt C, D interclusi, ac mobiles inter duo plana, quorum alterum est occludẽs immediatè tympanum, nempè EF, alterum extimum, atq; adnexum GH. Inter duo pariter similia, similiterque posita circularia plana IK, LM ex anteriore tympani parte interclusi sunt mobiles asserculi NO, in quibus signatæ sunt notæ horarũ numerariæ. Quorum asserum artem seorsim videbis inferius in 5, & 6 figuris.

PQ est pars axis asperata mucronibus, quibus imposita chorda dum distinetur, atq; ab annexo pondere detrahitur, mouet axem, ac tym-

Cōpendium à fune machina.

panum. Habes in hac machina id etiam commodi, & compendij, quòd breui fune mouetur, & rariſſima eget reductione ponderis ad ſuperiora; tantillum enim funis, quantum congruit exiguo circulo PQ, ſatis eſt pro ſpatio ſingularum horarum.

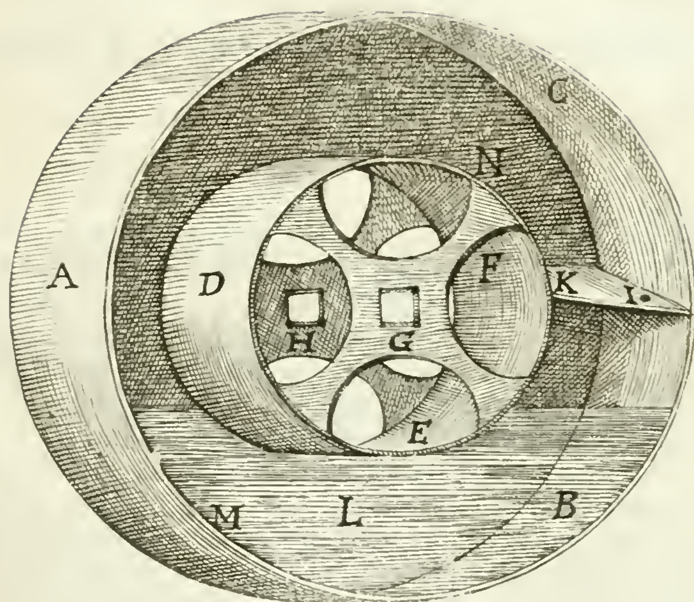
PROPOSITIO III.

Interius ingenium Tympani perſcrutari.

DEtracto altero circularium planorum Tympanum immediatè claudentium, eòq; ex altera parte aperto, ceu vides in 4 hic appoſita figura, ecce tibi apparent intra tympanum duæ concentricæ cylindricæ ſuperficies ABC, DEF. Intrà concauum minoris fulcra ſunt G, H, in quorum foramina ingeritur axis tympani. Inter conuexum minoris, & concauum maioris eſt IK planum, quod iunctum eſt ſuperficiebus cilindricis, & planis circularibus tympanum claudentibus. Per foramen I exiguum plani IK tenui fluore tranſmeat aqua, quando vi ponderis motà machinà, & deſcendente C, aqua premitur a plano KI.

Igitur dum funis circa rotulam dentatam poſt H, vi ponderis degrauantis ad partes hìc aſpectanti dextras, quales F, E, voluit axem traiectum per G,H vnà cū machinà, planū KI deſcendit, & impingit in aquam, eamq; premit verſus partes aſpectanti ſiniſtras, velut M, A. Interim ſtillat aqua per foramen, & paullatim planum KI intercipitur medium inter aquam, donec interfluente magis, ac magis per foramen I aqua, & plano KI aſcēdente ad partes verius A, D, (ſeu ſpectanti ſiniſtras) maxima pars aquæ; infra planum quæ defluxit, auget vim ponderis circa axem H pēdentis, & efficit vt planū KI, quod iam conceſſit in partes A, D, cum exigua aqua (quam ſupra ſe habet nondum penitus defluentem) tandem ex A, D celeriore motu voluatur verſus C, (ſeu ad partes aſpectanti dexteras) & inde rurſus deſcendat, & aquam premat, quæ rurſus per foramen trāsfluat, &c. & ſic perpetuis vicibus machina voluatur, ſemel ſingulis horis orbem rotationis complens.

Ars

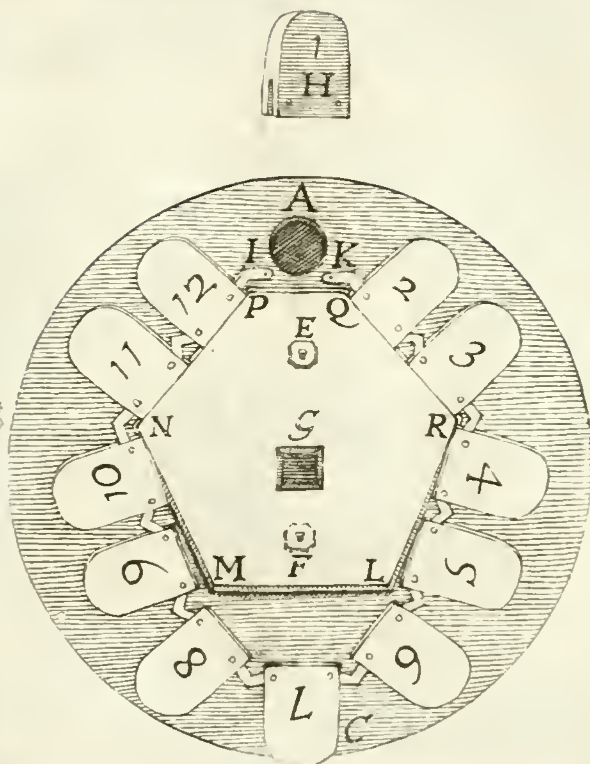


Ars est vt stillicidium aquæ perseueret per integram horam, donec post lentum, atque insensibilem machinæ motum per horam, repentè machina voluatur in exordium stillicidij. In qua reuolutione hora in postica tympani parte pulsatur, in anticà vero mutatur nota numeri horam in solari ocello indicantis.

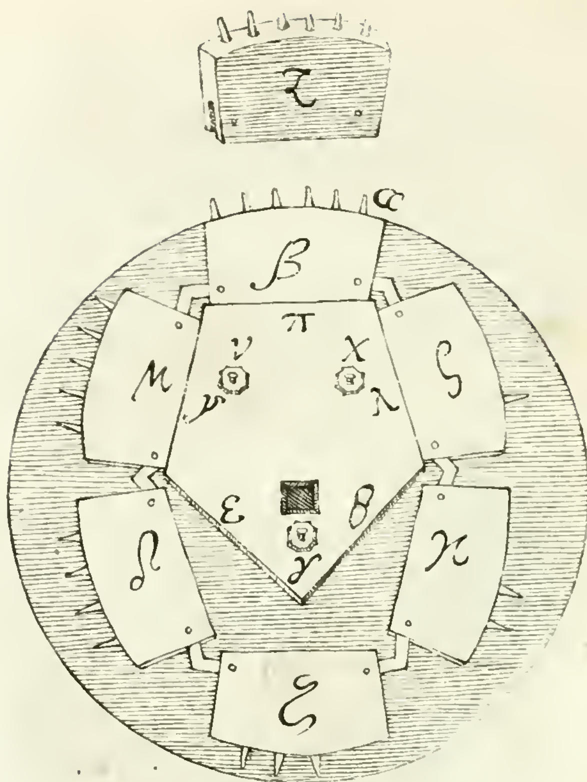
PROPOSITIO IV.

Ingeniosissimam, & facillimam artem exponere, qua & horarum numeri perpetuo mutantur, & horæ, sine vulgato aliorum authomatum artificio, pulsantur in Tympano horario.

1 CVius pulsationis, & mutationis ingenium accipe in vtraque hic 5, 6 figurà. Ac primo quidē, quod attinet ad mutationem numerorum horas indicantium, finge ab anteriore occlusi tympani parte abductum esse planum IK in figura 2. prop. 2.) cum interclusis asserculis NO. Id planum ab interiore parte oculis expositum exhibet in apposita hic 5 figura circulum ABCD, cui affixum est in E, F planum hexagonum, in latere vno PQ imminutum dimidia parte cuiusuis reliquorum laterū; estq; id hexagonum eccentricum circulo ABCD, habens commune cum circulo foramen G (quod circuli centrum est) in quod axis Tympani traijcitur. Foramen sub A est id, sub quo apparent ex altera parte in asserculis numeri horarum indices, qui notandi essent in posteriore asserculorum parte, sed in figura, euidentiæ gratia, notati sunt in facie oculis apparente. Vides eos asserculos connexos lamellis angulatis, quarum extrema circa infixos clauiculos mobilia sunt intrà asserculos. Specimen habes artis in seiuncto H, & vbi I, K. Finge igitur asserculum H esse suo in loco inter I, K, atque insistere lateri PQ, quod est capax vnius tantùm asserculi, cætera latera duorum, vt vides (in figura. Dum igitur H inter I, K ostentat numerum (qui concipiendus est ex altera parte) horæ primæ per foramen A, & cum tympano sensim voluitur circulus ABCD, puta versus D, asserculi 8, 7 aptant se lateri MI, & 6, 5 lateri LR, & 4, 3 lateri RQ, & ob obliquitatem, remoto asserculo H ex latere PQ, in eius locum succedit 2, seq; sub fora-



foramine oſtentat. H, & 12 deinde aptant ſe lateri PN, 11, & 10 lateri NM, 9, & 8 dependent infrà ML, & 8 cedit in locum medij 7 dependentis. &c. ſemperq, dependent terni extrà, atq; infrà vnum latus, vt vides 6, 7, 8 infrà ML. Eaq; ingenioſa, facili, ſimplici, ac mira arte mutant aſſerculi vices, ac ſinguli poſt ſingulas horas oſtentant inſcriptum horæ numerum ſub aperto foramine A.



2 Quod verò attinet ad horarum pulsationes, finge à postica occlusi tympani parte abductum esse planum GH (in figura 2 propositionis 2) cum interclusis asserculis dentatis CD. Id planum ab interiore parte oculis expositum exhibet in apposita hic 6 figura circulum ST, cui affixum est in V, X, γ planum pentagonum eccentricum circulo ST, habens commune foramen quadratum (quod est circuli centrum) in quod axis tympani traijcitur. Seni quadranguli dentati (pro numero pulsandarum horarum) asseres sunt habentes bases subæquales pentagoni lateribus, & innexi sunt angulatis lamellis circa extrema mobilibus, vt vides in figura, & factum est in asserculis horarum indicibus in antecedenti circulo.

Vt

Vt formam, & artem melius agnoscas, habes seiunctum Z. Finge lamellam (cuius impulsu adducitur malleus ad horæ pulsum) esse in α, & cum tympano volui circulum ex S versus α Γ, asser β senis cuspidibus impingens in α, sex tinnitus ex campanulâ edet pro horis, & statim delabetur ad partes infrà α, tunc obliquato β ad partes T, asser δ aptat se lateri ι, & ζ lateri θ, & κ lateri λ, &, sublato β ex π propter obliquitatē descēdentis β ab α versus S, ρ succedit, & aptat se lateri σ. deinde β it ad latus y; μ cedit in locum ipsius δ, δ ipsius ζ, ζ ipsius κ, ac deinceps in orbem. &c.

Ars facillima construendi Authomatis ad ludicra spectacula.

Notandum, atq; efficiendum (quidquid sit hìc in figura) vt dentati asseres circuli ST ita conueniant cum asseribus circuli BD antecedentis figuræ 5, vt pulsent horam, quam mox ostentaturus est sub foramine numerus mutati asserculi in circulo BD eiusdem fig. 5.

3 Habes in vtroq; circulo vtriusq; figuræ in hac 4 propos. BD, ST artem, qua ludicri aliquid, gratia releuandi animi, moliaris; scilicet exhibendo post circulum à pondere motum simulacra rerum variarum sese ostentantium vel supra, & extra oram supremi circuli (vt dentati asseres per vices post circulū ST in 2 hic figura) vel intrà, & post foramen, vt asserculi in circulo BD figuræ hic prioris. &c.

PROPOSITIO V.

Constructio Authomatis, & recta partium dispositio.

EX analysi Authomatis aquarij horarij suas in partes hactenus à nobis expositi patet eiusdem constructio, compactis partibus in vnum, vt habes in figura priore secundæ propositionis.

1 Addo in eadem figurà prouidēdū vt ocellus hora inscriptus diametraliter oppositus sit plano KI in figura propositionis tertię, per cuius plani foramē aqua stillat; & sit idem oculus horarius oppositus asserculo dentato pulsanti horam (non signatam in ocello) numeri proximè sequentis, ita vt, cum oculus horarius radiosus est infra hori-

zon-

Situs oculi radiãs, & aſſerculi horam pulsãtis.

zontem horarium diametraliter oppoſitus campanulæ, & in eo oculo, per artem indicatam in propoſitione quarta, mutatur horæ numerus, eodem momento aſſerculus dentatus pulſet horam, quæ mutatur, quæq; mox apparet ſupra horizontem horarium.

Duo foramina infũdẽdæ, ac refũdẽdæ aquæ

2 Circa foramen I, per quod fluit aqua vtrinque ſupra, & infra planum KI (in figura propoſ. 3.) in dorſo machinæ conuexo gemina ſunt foramina latiora, per quæ aqua in tympanum infunditur, &, cum opus eſt, tota ſtatim exhauritur; ac per eadem foramina patet minuſculum foramẽ I in plano KI, vt illi prouideatur, ſi quid incommodet ſtillandæ aquæ per id foramen minuſculum. Maiora vero ea duo foramina in dorſo tympani circa planum KI facili negotio, & cluduntur, & aperiuntur geminis æreis lamellis cera, vel apto alio glutine affixis.

Praxis in exẽplari, quanto pondere quãtum aquæ ritè voluatur.

3 Authoma, quod ex nuper meo exemplari conſtructũ eſt, ac ritè ſuo fungitur officio, & continẽter, ſine vlla vel fallacia, vel ſollicita, & extraordinaria curà diu, noctuq; horas indicat, & pulſat (quemadmodum alia vidi eorum authomatum exemplaria à pluribus iam annis adhuc ritè in orbem perpetuum ad horarum momenta gyrantia) aquæ intus incluſæ quantitatem, ac pondus habet librarum 13. Pondus vero plumbeum machinam de fune voluens, eſt librarum 23. Alterum pondus æreum minuſculum, chordam continens circa trochleolam axis dentatam, eſt trium librarum. Hæc ad praxim apponenda cenſui, vt videas, datà machinà circa axem æquilibrata, quantum aquæ inſuſæ quanto pondere in praxi ritè voluatur, horas indicet, ac pulſet. Animaduertenda tamen aliqua, quæ inferius videbis in theorijs machinarijs.

PROPOSITIO VI.

Animaduerſiones circa cauſas incommodantes, & earum remedia.

1 IN primis curandum vt compactum tympanum ſine aqua infuſa ſit ita æquilibratũ, vt in tota machinę reuolutione centrũ grauita-

uitatis eiusdem machinæ semper sit in axe, & si aliquo in situ reuolutionis fiat aliqua eccentricitas, corrigenda est appositione alicuius lamellæ in partem oppositam dorsi. Sic enim æquilibrata machina, aquà deinde impositâ, erit aptissima vt continuato motu voluatur.

Cętrum grauitatis Authomatis sit in axe.

2 Quod si tamen aliquo momento motum intermittat, vel retardet, additione factâ ad pondus è chordâ deuoluens, resumet, vel accelerabit motum, qui si eà additione fiat celerior, quàm pro horà, celeritas ea corrigenda est additione aliqua infusæ aquæ, vel ponderis detractione. Curandum etiam præ cæteris vt aqua infusa sit defæcatissima, naturalis, non igne calefacta. Per mensium interualla aliqua effundenda, & machina interius tergenda, & noua aqua defæcata refundenda. Hyemis tempore non exponatur machina extra cubicula cœlo aperto ita, vt aqua congeletur. In summis caloribus propter aliquam euaporationem, vel occultam, etiã intra tympani claustra, mutationem aliquam, aquæ aliquid addendum.

Motus intermissio, vel anomalia, qui corrigãtur.

Cautiones circa aquã inclusã.

3 Axis ipsius poli quamminimùm attingat in ferreis (sic voco) horizontibus, quibus vtrimq; axis extrema fulciuntur. Facilius enim sic voluetur cum axe machina, nec aliquo in momento motum intermittet. Nec deesse aliquando possunt causæ intrinsecæ obluctantium, vel se intermiscentium intus inclusorum aeris, & aquæ; ac aer quidẽ inclusus faciles patitur mutationes ab extrinseco aere. Quibus ex causis fieri aliquãdo possunt in machinæ motu anomaliæ Quę tamen in praxi multorum annorũm nõ effecerunt quo minus machina ritè mearit. Quæ deniq; Machina, vt docet praxis, minoribus incommodis patet, & minori eget curà, si comparetur cum vulgatis rotatis horarijs.

Poli quã minimũ tangãt.

Aliqua incõmoda extrinsec a ab ambiente.

4 Si quando quierit à motu machina, scilicet vel non retracto fune cum pondere, vel negligentia, vel lubentià possidentis, lubeatq; tympanum reponere motui, ac hora Solis discrepet à numero horario in ocello radioso, vel à dentato assere horam pulsaturo, ecce (quod non in vulg. authom.) quã in promptu remedium, & restauratio. Digitis ingestis inter plana, quibus intercludũtur asserculi notati numeris horarum, fac numerus horæ proximè pulsandæ apponatur foramini, siue oculo radioso, & è diametro similiter in altera tympani parte oppone dentes pro horæ numero, &c. Mox cum Solis horà incipe machinæ motum.

Post quietem restauratio machinæ ad motum, & asserculorum ad horas &c.

5 Deniq; caue hallucineris, ac putes machinam hanc pro aqua posse incluso puluere cieri. Nam puluis per exiguum foramen plani KI (in figurà propositionis tertiæ) prementis non facilè proflueret, præ-

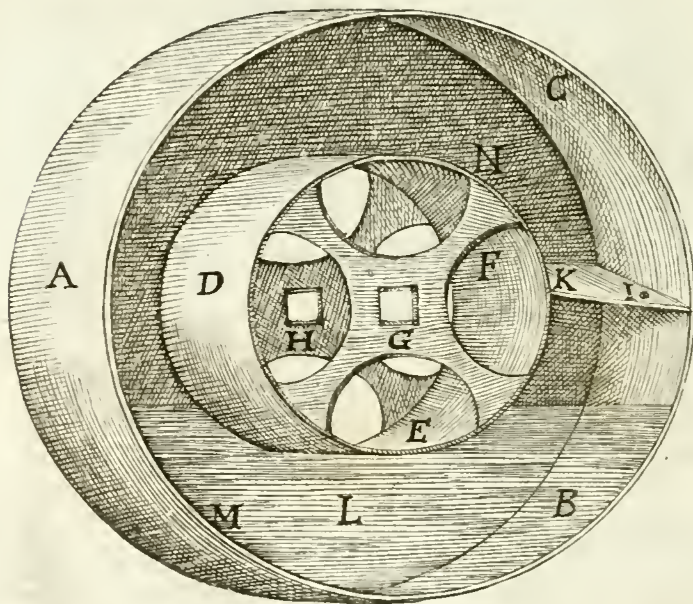
Pro aqua ineptus est puluis quilibet.

in vsum machinæ. præsertim dum pressura lateralis est; licet fortasse flueret puluis plano non lateraliter pressus, sed impositus; quæ res nihil ad hanc machinam, in cuius potiore motus parte aqua stillat per foramen dum lateraliter vrgetur à plano KI.

PROPOSITIO VII.

Theoria Machinaria, ac Physica.

HIc vsus, fructus, ac finis apud verè philosophos, circa arte facta potius causas, quàm praxes venari. Quod qui faciunt etiam in alienis habent potiora de suo. Igitur,



I Quod ad Machinariæ Philosophiæ theorias in hac machinà latentes attinet, agnosce non vsitatum modum vectis primi generis, in cuius altero extremo est potentia mouens, in altero res quæ mouetur, hypomoclium intermedium.

Hic

Hic vectis concisus est in duas partes, immobiles, atq; infixas in eodem axe non eodem in loco, altera breuior est semidiameter dentata rotulæ circa extremum axis immotæ, de cuius extremo funis pendet cum pondere machinam mouente; altera pars vectis longior concipienda est ab axe ad extremum plani aquam mouentis. &c.

Vide fig. priorem propos. 2, vel hanc hìc, in qua iucundum est animo concipere vectem primi generis in machinæ reuolutione ita formam intra idem genus mutare, vt dum in primo situ planum KI incipit aquā premere, & quasi velle eleuare à B versus A, extremū partis maioris sit ex eadem parte, in qua est etiam extremum partis minoris, donec gyrāte sensim machinà, & plano KI vergēte prope partes A, tunc extrema partialium vectium sunt opposita, & apparet ritè exposita forma vectis primi generis; at dum KI reuolutum per B in A, attollitur supra A, & vergit in C, & redit versus B, tunc magis, ac magis infringitur forma recta vectis primi generis, & pars maior magis, ac magis eleuat sui extremum extra rectam lineam cum vectis parte minore, quæ in rotulà ad H fixà, semper habet per varias dētatas mobiles semidiametros sui extremum ad easdem partes Lectori figuram spectanti dexteras. Fit ergo perpetua gyratio partis maioris vectis, & lineæ ex vtraque parte vectis compositæ, ac rectæ perpetua infractio.

Paradoxū formæ, & motus vectis in machinà.

2 Agnosce igitur pondus è chordà dependens pro potentia mouente in altero vectis extremo, nempe semidiametr. dentati in rotulà circa axem fixà, & machinam mouente; graue verò seu res, quæ vecte mouetur, est quantitas aquæ in tympanum infusæ. Cuius pondus quantumuis moueatur à tantillo vecte rotulæ dentatæ, propter ponderis è chorda pendentis grauitatem excedentem aquæ grauitatem.

Ac si per modum paradoxi, non ponderatis grauitatibus aquæ, ac ponderis mouentis, aueas scire quam inter se proportionem habeant extrema illa duo grauia, & qua arte statim locari possint in æquilibrio, & quæ grauitas vel minima possit machinam ciere; habes in promptu modum philosophicæ, ac machinariæ huiusce venationis à regula Archimedeà, à nobis clarissimè, ac geometricè exposita in Ap. 4, prog. 2. ante prop. 1. *Vt distantia ad distantiam ab hypomoclio, sic reciprocè pondus ad potentiā, vel potentia ad pondus.* Igitur in hac machina fac ita se habeat semidiameter dentatus, quæ est distantia potentiæ (siue ponderis mouentis) ab axe (pro hypomoclio) ad distantiam ab axe perpendicularem ad extremum vsque plani KI aquam mouentis; vt pondus aquæ ad pondus e chorda dependens, ac erunt in æquilibrio. Metire igitur quantitatem semidiametri dentati,

Ars æquilibrandæ machinæ, sine pōderatione grauis, & potentiæ.

&

& in eius partibus metire perpendicularē ab axe ad extremum plani KI,& in earū proportione constitue pro maiore grauitatem ponderis è fune,ac erunt in machina aqua,& pōdus in ęquilibrio.Quod si quid exiguum ponderis addideris ponderi è fune pendenti, videris quid sufficiat motui machinæ, quantoque plus addideris, tanto ibit velocior.

Motus machinæ difformiter vniformis; & causæ.

3 Quod attinet ad philosophationem aliquam physicam circa hanc machinam, eiusq; motum, ac motùs causas,accipe sequentia. Motus huius Machinæ est difformiter vniformis, & ab insensibili semper magis, ac magis ad sensibilem,& in extremò apertè velocem. Ratio est,quia initio dum planum KI lateraliter impellit totam aquę inclusæ molem, èaque stillat per exiguum foramen I, semper imminuitur pondus,& resistentia aquæ,cuius pars, per foramen quæ trāsfluit,& augetur,concedit in partes auxiliarias ponderis è rotulà dentatà machinam mouentis,atq; ea propter augetur motus, donec tandem aquà penè totà per foramen transfusà, deficiente supra planum KI ponderoso, reuoluitur ocyus, ita tamen, vt motus ille extremus velocior (dum ocellus plano KI oppositus, horà notatus, reuoluitur infra horizontem machinæ, atq; ad eundem ascendit) sit cum aliqua quasi grauitate in ipsa velocitate. Ratio est quia tunc aer machinà interclusus non potest in ictu oculi totus transmeare per foramen plani KI, egetque vel exigua temporis morà, vt aer, qui est in concauō superiori (occupante inferius aquà per foramen iam transfusà)ac supra planum KI, transmeet continuatis partibus per foramen I,donec planum KI rursus in aquam impingat.

Finis quinti nostri Exodij horarij, quasi quinti Actus. si placuere hæc Exodia, mi Lector, *plaudito.*

Atq; Hactenus Tyrones Mathematici nostris his Exodijs satis,vt arbitror,ac scientificè recreati,lubentius iam prosequantur reliquam geometricam nostram Methodum in sequenti tertio ~~parte huius secundi~~ Tomo correptam, si non correctam.